**Exercices résolus de mathématiques.**

# Algèbre

# ALG 42

**EXALG420 – EXALG429**

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Juin 2012

## EXALG420 – EPL, UCL, LLN, juillet 2011 série 1.

Au cinéma Paradisio, les enfants de douze ans paient demi-tarif.
Jean-Luc, Anne et leurs cinq enfants, qui ont moins de douez ans, viennent assister à la séance du samedi après midi. En plus de leurs entrées, ils achètent pour chacun des sept membres de la famille un sachet de pop-corn, et pour chaque enfant une limonade; ils paient au total 64 €.
Leur viel ami Armand, qu'ils n'avaient plus vu depuis 14 ans, les rejoint à la même séance. Il achète un sachet de pop-corn et une limonade et paie au total 13 €.
Pierre et Aline et leur fille Lexie viennent aussi au cinéma. En plus de leurs entrées, ils achètent une limonade pour chacun des trois, et cinq sachets de pop-corn. Au total, ils paient 43 €.
Lexie a-t-elle moins de douze ans?
Combien coûtent l'entrée plein tarif, la limonade et le sachet de pop-corn chacun?
Justifier en donnat le détail de votre raisonnement.

---

## Solution proposée par Nicole Berckmans

$x =$ entrée 1/2 tarif
$y =$ prix pop-corn
$z =$ prix limonade

$(1) \quad 9x + 7y + 5z = 64$

$(2) \quad 2x + y + z = 13$

$(3) \quad 5x + 5y + 3z = 69$ Si Lexie < 12 ans

$(3bis) \quad 6x + 5y + 3z = 69$ Si Lexie > 12 ans

$(1) - 2(2) \Rightarrow 5x + 5y + 3z = 38$ ce qui est incompatible avec l'équation $(3)$.
Dès lors Lexie a plus de douze ans.
On résoud le système $(1), (2)$ et $(3bis)$ et on trouve

$$x = 5 \text{ €}, \qquad y = 2 \text{ €}, \qquad z = 1 \text{ €}$$

---

Le 12 septembre 2012

## **EXALG421** – EPL, UCL, LLN, juillet 2012 série 2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter en fonction du paramètre réel $a$ l'inéquation suivante.

$$x + a > 5\sqrt{ax}$$

---

## Solution proposée par Nicole BERCKMANS et Louis FRANCOIS

Conditions $\begin{cases} (1)\ ax \geq 0 \\ (2)\ x + a > 0 \end{cases}$

- Si $a = 0$, $\quad x > 0 \quad \Rightarrow \quad S : ]0, \to[$
- Si $a < 0$, $\quad$ alors $x \leq 0$ et $x + a \leq 0 \quad \Rightarrow \quad S : \varnothing$
- Supposons $a > 0$. Dans ce cas $x \geq 0$ et on doit avoir $(x+a)^2 > 25ax$

  c'est-à-dire $x^2 - 23ax + a^2 > 0$

$$\Delta = 525a^2 = 25 \times 21a^2$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{23a - 5\sqrt{21}a}{2} \\ x_1 = \dfrac{23a + 5\sqrt{21}a}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad S : [0, x_1[ \cup ]x_2, \to[$$

---

Le 12 septembre 2012

## EXALG422 – EPL, UCL, LLN, juillet 2012 série 2.

Trouver dans $\mathbb{R}$ le polynôme $P(x)$ de degré 2 dont les racines sont les carrés des racines du polynôme

$$P_1(x) = x^2 - ax + b$$

où $a$ et $b$ sont deux nombres réels tels que $a^2 > 4b$

---

## Solution proposée par Nicole BERCKMANS et Louis FRANCOIS

$P_1(x)$ ayant un réalisant strictement positif $\left(a^2 - 4b > 0\right)$, admet deux racines que nous noterons $x_1$ et $x_2$.

Nous savons que $x_1 + x_2 = a$ et $x_1 x_2 = b$

Notons $y_1, y_2$ les deux racines $P(x)$

$$y_1 + y_2 = x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2b$$

$$y_1 y_2 = \left(x_1 x_2\right)^2 = b^2$$

Donc $\boxed{P(x) = x^2 - \left(a^2 - 2b\right)x + b^2}$

Remarquons que $P(x)$ admet bien deux racines car son réalisant =

$$\left(a^2 - 2b\right)^2 - 4b^2 = a^4 - 4a^2 b = a^2\left(a^2 - 4b\right) \geq 0$$

éventuellement si $a = 0$, on aura $y_1 = y_2$

---

Le 12 septembre 2012. Modifié le 5 septembre 2014.

# EXALG423 – EPL, UCL, LLN, juillet 2012 série 2.

Trouver algébriquement l'ensemble des valeurs de $z$ (dans le plan complexe) vérifiant l'équation suivante :

$$|z|+|z+i|=1$$

ou l'écriture $|a+bi|$ représente le module complexe correspondant.

*(Un raisonnement géométrique éventuel est également accepté)*

---

## Solution proposée par Nicole BERCKMANS et Louis FRANCOIS

<u>1ère méthode</u>

$$z=a+bi,\quad |z|=\sqrt{a^2+b^2},\quad |z+i|=\sqrt{a^2+(b+i)^2}$$

$$\sqrt{a^2+(b+i)^2}^{\,2}=1-\sqrt{a^2+b^2}^{\,2}\quad \text{où}\quad \sqrt{a^2+b^2}\le 1$$

$$a^2+b^2+2b+1=1+a^2+b^2-2\sqrt{a^2+b^2}$$

$$b=-\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow\begin{cases}\bullet b=0, a=0 & S_1=\{0\}\\ \bullet b\ge 0 & S_2=\varnothing\ \Rightarrow S=\{bi\mid -1\le b\le 0\}\\ \bullet b<0\Rightarrow b^2=a^2+b^2\Rightarrow a=0 & \end{cases}$$

<u>2ème méthode</u>

Soit $z=r\operatorname{cis}\theta,\ \ z+i=r\cos\theta+(r\sin\theta+1)i,$

$$|z|+|z+i|=1\Leftrightarrow r+\sqrt{r^2\cos^2\theta+(r\sin\theta+1)^2}=1\Leftrightarrow r+\sqrt{r^2+2r\sin\theta+1}=1$$

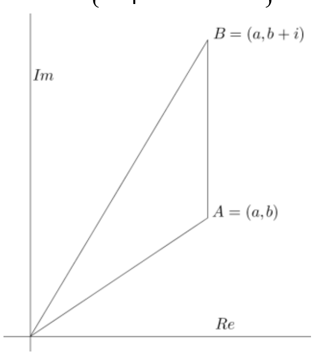
$$\begin{cases}\bullet\ \text{Si } 1<r\Rightarrow S=\varnothing & \\ \bullet\ \text{Si } 0\le r\le 1:\quad r^2+2r\sin\theta+1=1+r^2-2r & \\ \qquad 1)\ r=0\Rightarrow z=0 & S=\{-ri\mid r\in\mathbb{R}^+, 0\le r\le 1\}\\ \qquad 2)\ \sin\theta=-1\Rightarrow\theta=-\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow z=-ri & \end{cases}$$

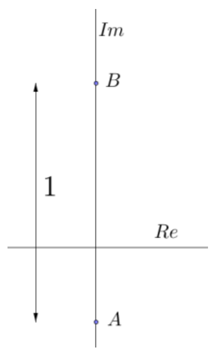
<u>3ème méthode</u>

$A=a+bi,\quad B=A+i$ se trouve une unité au-dessus de $A$

Puisque $\overline{OA}+\overline{OB}=1,$ $A$ et MB se trouve sur l'axe Im de part et d'autre de $O$.

$\Rightarrow S=\{bi\mid -1\le b\le 0\}$




---

Le 12 septembre 2012

## EXALG424 – EPL, UCL, LLN, juillet 2012 série 2.

Céline a décidé de passer quelques jours de vacances en Poldavie.
A la frontière, elle change 300 euros en monnaie locale. Elle reçoit 70 dollars poldaviens (DP), 17 shillings poldaviens (SP) et 0.05 euro de retour. Emerveillée par la flore du parc national de Poldavie, dont l'entrée lui a coûté 1 DP et 2 SP, elle invite sa soeur Eve à venir la rejoindre.
A l'entrée du parc, Eve change des euros au même taux qu'à la frontière. Pour 250 euros, elle reçoit 50 DP et 100 SP en plus de son billet, et est remboursée de 0.10 euros.
Combien de SP vaut 1 DP, et combien coûte l'entrée du parc en euros? Justifiez en donnant le détail de votre raisonnement.

---

### Solution proposée par Nicole BERCKMANS et Louis FRANCOIS

$$300€ = 70DP + 17SP + 0.05€$$

$$250€ = 50DP + 1DP + 100SP + 25P + 0.10€$$

$$x = DP \text{ et } y = SP$$

$$\begin{cases} 70x + 17y = 299.95 & (1) \\ 51x + 102y = 249.9 & (2) \end{cases}$$

$$6(1) - (2) : x = 4.2 \text{ et } y = 0.35$$

$$\frac{x}{y} = 12 \text{ donc } 1DP = 12SP$$

$$\text{L'entrée coûte :} (4.2 + 2 \times 0.35)€ = 4.9€$$

---

Le 12 septembre 2012

# EXALG425 – EPL, UCL, LLN, septembre 2012.

Résoudre dans les réels et discuter en fonction du paramètre $a$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{x-a}{3y-2a} = \dfrac{1}{3a^2} \\ \dfrac{x+a}{3y+4a} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

---

## Solution proposée par Nicole BERCKMANS et Louis FRANCOIS

$$CP : \begin{cases} y \neq \dfrac{2a}{3} & (1) \\ y \neq -\dfrac{4a}{3} & (2) \\ a \neq 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^2x - 3y = 3a^3 - 2a \\ 3x - 3y = a \end{cases} \Rightarrow 3\left(a^2-1\right)x = 3a\left(a^2-1\right)$$

• Si $a^2 - 1 \neq 0 \;\Rightarrow x = a$ et $y = \dfrac{2a}{3}$ à rejeter $(1)$

• Si $a = 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 1 \\ 3x - 3y = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 3y = 1,\ y \neq \frac{2}{3} \text{ et } y \neq -\frac{4}{3} \right\}$$

• Si $a = -1 \quad \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y = -1 \\ 3x - 3y = -1 \end{cases}$

$$\Rightarrow S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 3y = -1,\ y \neq \frac{2}{3} \text{ et } y \neq -\frac{4}{3} \right\}$$

---

Le 12 septembre 2012

## EXALG426 – EPL, UCL, LLN, septembre 2012.

Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel $m$ l'équation suivante :

$$(m+1)x^2 - 4mx + (m+1) = 0$$

possède-t-elle deux racines réelles positives?

Détaillez bien votre raisonnement.

---

## Solution proposée par Nicole BERCKMANS et Louis FRANCOIS

Conditions : 1. $\rho = 3m^2 - 2m - 1 \geq 0$

2. $P = \dfrac{m+1}{m+1} = 1 > 0$

3. $S = \dfrac{4m}{m+1} \geq 0$

| $m$ | | $-1$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | + | + | + | 0 | − | − | − | 0 | + |
| $P$ | + | / | + | + | + | + | + | + | + |
| $S$ | + | / | − | − | − | 0 | + | + | + |

Conclusion : $m \in \left] \leftarrow, -1 \right[ \cup \left[ 1, \rightarrow \right[$

---

Le 12 septembre 2012

## EXALG427 – EPL, UCL, LLN, septembre 2012.

Calculez les racines complexes de l'équation suivante :

$$iz^2 + iz + (1+i) = 0$$

où $i$ est l'unité (la particule) imaginaire (ou encore $i^2 = -1$).

---

## Solution proposée par Nicole BERCKMANS et Louis FRANCOIS

Multiplions par $i$ : $z^2 + z + (-i+1) = 0$

Réalisand : $1 - 4(-i+1) = -3 + 4i = 5\operatorname{cis}\theta = 5\operatorname{cis}126.87°$

$$\Rightarrow z = -1 \pm \sqrt{5}\operatorname{cis}\frac{\theta}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} z = i \\ z = -1 - i \end{cases}}$$

Remarques

1) On peut aussi voir immédiatement que $i$ est une racine, donc

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & 1-i \\ i & \downarrow & i & i-1 \\ \hline & 1 & 1+i & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad (z-i)(z+1+i) = 0$$

2) Autre méthode : $-3 + 4i = (a+bi)^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 + a^2 - b^2 \\ 4 = 2ab \end{cases} \qquad \Rightarrow \text{etc.}$$

---

Le 12 septembre 2012

## EXALG428 – EPL, UCL, LLN, septembre 2012.

Jean et son ami Adrien ont enregistré une démo de hard-core qu'ils voudraient reproduire pour la faire écouter à leurs amis. A la Flaq, les CD à graver coûtent 0.58 euros la pièces, mais Jean a trouvé sur le site de orenok.com des CD à prix dégressif : il est de 0.66 euros la pièce, mais pour un achat d'un nombre quelconque $x \geq 10$ CD, orenok.com accorde une ristourne en pourcents de $50\left(1-\frac{100}{x+100}\right)$% (Ainsi pour 25 CD par exemple, la ristourne est de $50\left(1-\frac{100}{125}\right)$%, c'est-à-dire de 10%, et le prix à payer - hors frais d'expédition - est de $25 \times 0.66-\frac{10}{100}25\times 0.66=$ 14.85 euros.) Au moment de passer commande, Jean s'aperçoit que orenok.com compte 12 euros pour les frais d'expédition, quel que soit le nombre de CD commandés.

En fonction du nombre de CD, déterminez si l'achat est moins coûteux à la Flaq ou sur onerok.com. Expliquer soigneusement votre raisonnement.

---

## Solution proposée par Nicole BERCKMANS et Louis FRANCOIS

Coùt Flaq : $y = 0.58x$

Coùt orenok : $\begin{cases} y = 0.66x+12 & \text{si } x \leq 10 \quad (1) \\ y = \left(1-50\left(1-\frac{100}{100+x}\right)\times\frac{1}{100}\right)\times 0.66x+12 & \text{si } x > 10 \quad (2) \end{cases}$

• Si $x \leq 10$, il est clair que coût Flaq < coût onerok

• Si $x > 10$, on compare $(1)$ et $(2)$

$$\left(1-50\left(1-\frac{100}{100+x}\right)\times\frac{1}{100}\right)\times 0.66x+12 = 0.58x$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{x}{100+x}\right)\times 0.66x+12 = 0.58x$$

$$\frac{x+200}{x+100}\times 0.66x = 0.58x-12$$

$$0.25x^2-20x-1200=0$$

$$\rho' = 100+300 = 400$$

$$x = \frac{10\pm 20}{0.25} = \begin{cases} 120 \\ -40 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Pour $x \leq 120$ : coût Flaq $\leq$ coût orenok

---

Le 12 septembre 2012

## EXALG429 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 2012.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^{2n}+2x^n\cos\alpha+1=0,$ si $n$ est un paramètre strictement positif et $\alpha$ un paramètre réel.

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université :**
[http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes](http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes)

En posant $X=x^n$ on obtient $X^2+2X\cos\alpha+1=0,$ équation du second degré dont le discrimant, négatif ou nul, est $4\left(\cos^2\alpha-1\right)=-4\sin^2\alpha$ et dont les deux solutions sont $-\cos\alpha\pm i\sin\alpha,$ ou encore, en utilisant l'abbréviation $\operatorname{cis}x=\cos x+i\sin x, \operatorname{cis}\left(\pi\pm\alpha\right).$
Ces deux nombres sont distincts sauf si $\alpha$ est un multiple de $\pi$.
Les solutions de l'équation initiale sont les racines *n*ièmes de ces nombres; elles forment l'ensemble :

$$\left\{\operatorname{cis}\frac{(2k+1)\pi+\alpha}{n};k=0,1,\ldots,n-1\right\}$$

---

Le 28 novembre 2012