Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 49

EXALG490 – EXALG499

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Septembre 2014

EXALG490 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2014.

Pour quelles valeurs du paramètre réel m le polynôme

$$X^2 + (2m-1)X + +m^2$$

admet-il deux racines positives dont l'une est le triple de l'autre?

Quelles sont les racines?

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf

Solution. En notant a et $3a$ les deux racines, on a:

$$(X-a)(X-3a) = X^2 - 4aX + 3a^2 = X^2 + (2m-1)X + m^2\,,$$

d'où on tire $2m-1 = -4a$ et $3a^2 = m^2$. On élimine m en égalant les valeurs de $4m^2$ tirées de ces deux égalités; cela donne:

$$1 - 8a + 16a^2 = 12a^2 \quad \text{ou encore} \quad 1 - 8a + 4a^2 = 0\,,$$

équation dont les racines (positives toutes les deux) sont

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2-\sqrt{3}}{2}\,.$$

Les valeurs de $m = (1-4a)/2$ correspondantes sont

$$-\frac{3+2\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2\sqrt{3}-3}{2}\,.$$

Le 25 novembre 2014.

EXALG491 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2014.

Résoudre l'inéquation suivante :

$$(x-1)\sqrt{x+4} < 2-4x$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf

Solution. La condition d'existence est $x \geq -4$; on se limite donc au domaine $[-4 : +\infty[$. Ce domaine se partitionne comme suit:

- Si $-4 \leq x < 1/2$, le membre de gauche est négatif et celui de droite est strictement positif; l'inéquation est vérifiée.
- Si $1/2 \leq x < 1$, les deux membres sont négatifs.
- Si $x \geq 1$, le membre de gauche est positif et le membre de droite est strictement négatif; l'inéquation n'est pas vérifiée.

Seul le deuxième cas nécessite une étude plus poussée. Dans l'intervalle $[1/2 : 1[$, l'inéquation se récrit en

$$\sqrt{x+4} > \frac{4x-2}{1-x} \quad \text{ou encore} \quad (x+4)(1-x)^2 > (4x-2)^2\,,$$

ce qui se simplifie en

$$x^3 - 14x^2 + 9x = x(x^2 - 14x + 9) = x(x-a)(x-b) > 0\,,$$

avec $a = 7 - 2\sqrt{10}$ et $b = 7 + 2\sqrt{10}$. On note que a est dans l'intervalle $[1/2 : 1[$; on a $a \simeq 0.675$. L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $[-4 : 7 - 2\sqrt{10}[$.

Le 25 novembre 2014.

EXALG492 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2014.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(1+z^2)^3 = (1-z^2)^3$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf

Solution. En observant qu'aucune solution ne peut vérifier $1 - z^2 = 0$, on récrit l'équation en

$$\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)^3 = 1\,.$$

Cela se récrit en

$$\frac{1+z^2}{1-z^2} = \lambda\,,$$

où λ est une des trois racines cubiques de l'unité. En choisissant $\lambda = 1$, on obtient la première solution $z = 0$; en choisissant $\lambda = \operatorname{cis}(\pm 2\pi/3) = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$, on obtient

$$z^2 = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = \pm i\sqrt{3}\,.$$

Ces deux valeurs pour z^2 donnent lieu à quatre valeurs pour z:

$$z = \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}(\pm 1 \pm i)}{2}\,;$$

l'équation proposée a donc cinq solutions.

Le 25 novembre 2014.

EXALG493 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2014.

Résoudre et discuter me système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf

Solution. Le déterminant du système vaut

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2 .$$

Pour $a = -2$, le système est impossible car la somme des trois équations donne

$$0x + 0y + 0z = 3 .$$

Pour $a = 1$, le système est doublement indéterminé; l'ensemble des triplets (x, y, z) solutions du système est:

$$\{(\lambda, \mu, 1 - \lambda - \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} .$$

Pour les autres valeurs de a, le système admet une solution unique:

$$x = y = z = \frac{1}{a+2} .$$

Le 25 novembre 2014.

EXALG494 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2014.

a) Soient r_1, r_2 les 2 racines complexes du polynôme $x^2 + bx + 3 \left(b \in \mathbb{R} \right)$.

Que vaut $r_1^2 + r_2^2$?

b) Déterminer $p, q \in \mathbb{R}$ pour que $x^3 + px + q$ soit divisible par $x^2 - 2x + 3$.

---

a) Si le trinôme admet deux racines complexes alors son discriminant est négatif :

$b^2 - 12 < 0 \Rightarrow -2\sqrt{3} < b < 2\sqrt{3} \qquad (1)$

D'autre part, on a $r_1 . r_2 = 3$ et $r_1 + r_2 = -b \Rightarrow r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 = b^2$ ou $r_1^2 + r_2^2 = b^2 - 6$.

Compte tenu de (1), on peut aussi écrire : $-6 < r_1^2 + r_2^2 = b^2 - 6 < 6$

b) <u>Méthode 1</u> Soit $P(x) = x^3 + px + q$ et $D(x) = x^2 - 2x + 3$.

On fait la division euclidienne.

$$
\begin{array}{cccc|c}
x^3 & & +px & +q & \underline{x^2 - 2x + 3} \\
\underline{x^3} & \underline{-2x^2} & \underline{\quad +3x} & & x + 2 \\
0 & +2x^2 & +(p-3)x & & \\
 & \underline{+2x^2} & \underline{\quad -4x} & \underline{+6} & \\
 & & (p+1)x & q - 6 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p + 1 = 0 \\ q - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -1 \\ q = 6 \end{cases} \Rightarrow P(x) = x^3 - x + 6$$

<u>Méthode 2</u> Les racines de $D(x)$ sont $1 \pm i\sqrt{2}$

Calculons $P\left(1 + i\sqrt{2}\right) = p + q - 5 - i\sqrt{2}\left(p + 1\right) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} p + q - 5 = 0 \\ p + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -1 \\ q = 6 \end{cases} \Rightarrow P(x) = x^3 - x + 6$$

Le 2 juin 2015.

EXALG495 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2014.

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\left(\ln(3x)\right)^3-4\left(\ln(3x)\right)^2-\ln(3x)+4<0$$

b) Si $|z|$ et $\tilde{z}$ désignent respectivement le module et le conjugué de $z\in\mathbb{C}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\sqrt{|4+3i|}\;x=\sqrt{3i+2-3i}$$

---

a) $I=\ln^3(3x)-4\ln^2(3x)-\ln(3x)+4<0$

CE: $x\in\mathbb{R}_0^+$

$\Rightarrow \ln(3x)\left(\ln^2(3x)-1\right)-4\left(\ln^2(3x)-1\right)<0$

$\Rightarrow \left(\ln^2(3x)-1\right)\left(\ln(3x)-4\right)<0$

$\Rightarrow \left(\ln(3x)-1\right)\left(\ln(3x)+1\right)\left(\ln(3x)-4\right)<0$

Ce qui nous donne les racines : $\begin{cases}\ln(3x)=4 \;\;\Rightarrow x=\dfrac{e^4}{3}\\ \ln(3x)=1 \;\;\Rightarrow x=\dfrac{e}{3}\\ \ln(3x)=-1\Rightarrow x=\dfrac{1}{3e}\end{cases}$

Tableau de signes

		$\frac{1}{3e}$		$\frac{e}{3}$		$\frac{e^4}{3}$	
I	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Conclusion : $\boxed{x\in\left]0,\frac{1}{3e}\right[\cup\left]\frac{e}{3},\frac{e^4}{3}\right[}$

b) $\sqrt{\left|\widetilde{4+3i}\right|}x=\sqrt{3i+\widetilde{2-3i}}\Rightarrow\sqrt{|4-3i|}x=\sqrt{6i+2}\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{6i+2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{5}\sqrt{6i+2}$

Le 2 juin 2015.

EXALG496 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2014.

Résoudre dan $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} 3x+y+2z=4 \\ mx+2y-z=5 \\ 3x+(m-5)y+7z=7 \end{cases} \qquad (m\in\mathbb{R})$$

Calculons les Δ

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ m & 2 & -1 \\ 3 & m-5 & 7 \end{vmatrix}=2(m-1)(m-6) \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 7 & m-5 & 7 \end{vmatrix}=14(m-6)$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ m & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix}=14(6-m) \qquad \Delta_z=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ m & 2 & 5 \\ 3 & m-5 & 7 \end{vmatrix}=2(m-6)(2m-9)$$

<u>1er cas : $m=1$</u> Le système devient :

$$\begin{cases} 3x+y+2z=4 \\ x+2y-z=5 \\ 3x-4y+7z=7 \end{cases} \xrightarrow[L_3=L_3-3L_2]{L_1=L_1-3L_2} \begin{cases} -5y+5z=-11 \\ -10y+10z=-8 \end{cases}$$

Sytème impossible.

<u>2ème cas : $m=6$</u> Le système devient :

$$\begin{cases} 3x+y+2z=4 \\ 6x+2y-z=5 \\ 3x+y+7z=7 \end{cases} \xrightarrow[L_2=L_2-2L_3]{L_1=L_1-L_3} \begin{cases} -5z=-3 \\ -15z=-8 \end{cases} 9$$

Sytème simplement indéterminé.

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{5\lambda-14}{15} \\ y=\lambda \\ z=\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

<u>Dans les autres cas</u>:

$$\begin{cases} x=\dfrac{7}{m-1} \\ y=-\dfrac{7}{m-1} \\ z=\dfrac{2m-9}{m-1} \end{cases}$$

Le 2 juin 2015.

EXALG497 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2014.

a) Déterminer $a,b\in\mathbb{R}$ pour que x^2-bx+1 divise x^4-x+a.

b) Soient α,β,γ les 3 racines complexes du polynôme $3x^3+5x^2+4$

Que vaut $\alpha+\beta+\gamma$?

---

a) Méthode 1

On doit avoir :

$$x^4-x+a=\left(x^2-bx+1\right)\left(x^2+cx+a\right)$$

On développe et par identification, on obtient :

$$x^4-x+a=x^4+\left(-b+c\right)x^3+\left(a-bc+1\right)x^2+\left(-ab+c\right)x+a$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-b+c=0\\ a-bc+1=0\\ -ab+c=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=c\\ a-b^2+1=0 & (1)\\ -ab+b=-1 & (2)\end{cases}$$

De (1), on tire une condition sur $a: b^2=a+1\Rightarrow a\geq -1$.

De (2), on tire : $a=\dfrac{b+1}{b}\geq -1\Rightarrow\dfrac{2b+1}{b}\geq 0\Rightarrow b\in\left]\leftarrow,\dfrac{1}{2}\right]\cup\left]0,\rightarrow\right[$

De (1) et (2), on tire : $-b^3+2b+1=0\Rightarrow(b+1)\left(b^2-b-1\right)=0$

$$\Rightarrow(b+1)\left(b-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(b-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=0$$

Les trois racines satisfont aux conditions et donc

$$\begin{cases}b=-1\Rightarrow a=0\\ b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow a=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ b=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

b) Méthode 2

On effectue la division euclidienne :

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & & -x & +a & \underline{x^2-bx+1} \\
\underline{+x^4} & \underline{-bx^3} & \underline{+x^2} & & & x^2 \\
0 & bx^3 & -x^2 & & & +bx \\
 & \underline{bx^3} & \underline{-b^2x^2} & \underline{+bx} & & +\left(b^2-1\right) \\
 & 0 & \left(b^2-1\right)x^2 & -\left(b+1\right)x & & \\
 & & \underline{\left(b^2-1\right)x^2} & \underline{-b\left(b^2-1\right)x} & \underline{+b^2-1} & \\
 & & 0 & -\left(b+1\right)+b\left(b^2-1\right)x & a-b^2-1 &
\end{array}
$$

On en déduit que :

$$
\begin{cases} -\left(b+1\right)+b\left(b^2-1\right)=0 \\ a-b^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(b+1\right)\left(b^2-b-1\right)=0 \\ a-b^2-1=0 \end{cases}
$$

On arrive aux mêmes équations que pour la méthode 1. Les conclusions sont identiques.

b) Le polynôme peut se mettre sous la forme : $3\left(x^3+\frac{5}{3}x^2+\frac{4}{3}\right)$

Le coefficient du x^2 est l'opposé de la somme des racines $\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=-\frac{5}{3}$

On peut aussi partir de $3x^3+5x^2+4=3\left(x-\alpha\right)\left(x-\beta\right)\left(x-\gamma\right)$

On développe et par identification on trouve le même résultat.

Le 22 juin 2014

EXALG498 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2014.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\left||x-2|-x\right| = 2x$

b) $e^{2x} + (1-e)e^x - e = 0$

---

a) $\left||x-2|-x\right| = 2x$

On a immédiatement comme condition que $x \in \mathbb{R}^+$

Si $0 \leq x < 2$, $|x-2| = -x+2$ et l'équation devient

$$\left|\underbrace{-x+2-x}_{=-2x+2>0}\right| = 2x \Rightarrow -2x+2 = 2x \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Si $x = 2 \Rightarrow$ Equation impossible.

Si $x > 2 \Rightarrow |x-2| = x-2$ et l'équation devient :

$$|x-2-x| = 2x \Rightarrow 2 = 2x \Rightarrow x = 1 \quad \text{à rejeter}$$

b) $e^{2x} + (1-e)e^x - e = 0$

C'est une équation du second degré en e^x

$$e^x = \frac{e-1 \pm \sqrt{(1-e)^2 + 4e}}{2} = \frac{e-1 \pm (1+e)}{2} = \begin{cases} e^x = e \Rightarrow x = 1 \\ e^x = -\dfrac{1}{2} \text{ impossible} \end{cases}$$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{x = 1}$

Le 22 juin 2015

EXALG499 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2014.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} x + 2y + mz = 3m \\ 2x + y - (2m+1)z = 4 \\ 4x + 5y - z = 3m-2 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x+2y+mz=3m \\ 2x+y-(2m+1)z=4 \\ 4x+5y-z=3m-2 \end{cases} \xrightarrow[L_3=L_3-4L_1]{L_2=L_2-2L_1} \begin{cases} x+2y+mz=3m \\ -3y-(4m+1)z=4-6m \\ -3y-(4m+1)z=-2-9m \end{cases}$$

Le système n'est possible que si : $4-6m=-2-9m \Rightarrow m=-2$

Dans ce cas, le système devient simplement indéterminé:

$$\begin{cases} x+2y-2z=-6 \\ 2x+y+3z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=-6+2\lambda \\ 2x+y=4-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{8\lambda-14}{3} \\ y=\dfrac{7\lambda-16}{3} \\ z=\lambda \end{cases}$$

Le 2 juin 2015.