

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Algèbre

**ALG 57**

**EXALG570 – EXALG579**

<http://matheux.ovh/Accueil.html>

Jacques Collot  
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans  
Fabienne Zoetard

Octobre 2017

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx :

Il s'agit d'une équation bicarrée. On y pose donc :

$$z^2 = t \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{t}$$

(1) Résolution de l'équation du second degré en  $t$  :

$$t^2 - (5 - 14i)t - (24 + 10i) = 0$$

Discriminant :

$$\Delta = (5 - 14i)^2 + 4(24 + 10i) = -75 - 100i$$

Racines carrées du discriminant :

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta} = x + iy &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -75 \\ 2xy = -100 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2)^2 = 5625 \\ 4x^2y^2 = 10000 \end{cases} \\ &\Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 15625 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 125 \\ x^2 - y^2 = -75 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 \\ y^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 5 \\ y = \pm 10 \end{cases} \text{ avec signes opposés} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\Delta} = \pm(5 - 10i)$$

Solutions de l'équation en  $t$  :

$$t_1 = \frac{1}{2}(5 - 14i + 5 - 10i) = 5 - 12i$$

$$t_2 = \frac{1}{2}(5 - 14i - 5 + 10i) = -2i$$

(2) Racines carrées de  $t_1$  :

$$\begin{aligned} \sqrt{t_1} = x + iy &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = -12 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2)^2 = 25 \\ 4x^2y^2 = 144 \end{cases} \\ &\Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 169 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 2 \end{cases} \text{ avec signes opposés} \end{aligned}$$

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{t_1} = \pm(3 - 2i)$$

(3) Racines carrées de  $t_2$  :  $z_{3,4} = \pm\sqrt{t_2} = \pm\sqrt{-2i} = \pm(1 - i)$

(4) L'ensemble des solutions de l'équation bicarrée en  $z$  est donc :

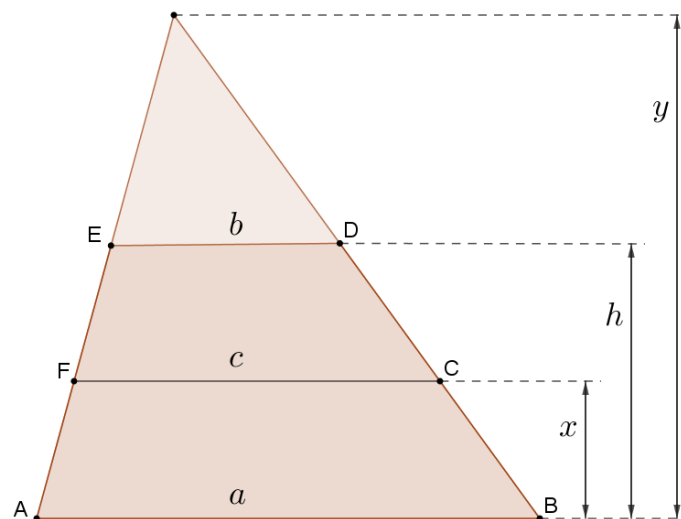
$$S = \{3 - 2i, 2i - 3, 1 - i, i - 1\}$$

## EXALG571 – POLYTECH, UMonS, Mons, juillet 2017.

Un trapèze convexe a pour bases  $a$  et  $b$  ( $a > b$ ) et pour hauteur  $h$ .

A quelle distance  $x$  de la base  $a$  faut-il mener une parallèle aux bases pour partager le trapèze en deux parties de même aire.

Solution proposée par Fabienne Zoetard :



Il faut déterminer  $x$  tel que l'aire de  $ABDE$  soit égale à deux fois l'aire de  $ABCF$ . Il faut donc exprimer  $c$  en fonction de  $x$ .

$$\text{On a : } \frac{a}{y} = \frac{c}{y-x} = \frac{b}{y-h} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{a(y-x)}{y} = a\left(1 - \frac{x}{y}\right) \\ a(y-h) = by \Rightarrow y = \frac{ah}{a-b} \end{cases} \Rightarrow c = a\left(1 - \frac{x(a-b)}{ah}\right)$$

$$\text{On doit avoir : } \mathcal{A}_{ABDE} = \mathcal{A}_{ABCF} \Rightarrow \frac{a+b}{2}h = 2 \frac{1}{2} \left( a + a - \frac{x(a-b)}{h} \right) x$$

$$\Rightarrow 2 \frac{a-b}{h} x^2 - 4ax + (a+b)h = 0 \quad (1)$$

$$\text{Equation du second degré dont : } \Delta = 16a^2 - 4 \times 2 \frac{a-b}{h} (a+b)h = \dots = 8(a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow x = \frac{4a \pm 2\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{4(a-b)} \cdot h.$$

Notons que  $a^2 + b^2 < 2a^2$  donc  $4a - 2\sqrt{2(a^2 + b^2)} > 4a - 2\sqrt{2 \times 2a^2} > 4a - 4a = 0$

Les deux solutions de l'équation (1) sont donc positives. Or il faut que  $0 < x < h$

$$\text{c'est-à-dire } 0 < \frac{2a + \sqrt{2(a^2 + b^2)}}{2(a-b)} < 1 \text{ ou } 0 < \frac{2a - \sqrt{2(a^2 + b^2)}}{2(a-b)} < 1$$

Pour choisir entre les deux solutions prenons un exemple :

$$a = 5; b = 3; h = 2$$

$$\bullet x = \frac{2a + \sqrt{2(a^2 + b^2)}}{2(a-b)} h = \frac{10 + \sqrt{68}}{2} > 2 \text{ à rejeter}$$

$$\bullet x = \frac{2a - \sqrt{2(a^2 + b^2)}}{2(a-b)} h = \frac{10 - \sqrt{68}}{2} \approx 0.877$$

$$\Rightarrow c = a \left( 1 - \frac{x(a-b)}{ah} \right) = 5 \left( 1 - \frac{0.877 \times 2}{10} \right) \approx 4.123$$

$$\text{On vérifie : } \mathcal{A}_{ABDE} = \frac{8}{2} \times 2 = 8 \text{ et } \mathcal{A}_{ABCF} = \frac{9.123}{2} \times 0.877 \approx 4$$

## EXALG572 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2017.

Résoudre l'inéquation suivante par  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{x^3 + 32x + 18}{x^2 + 4x + 3} \geq 6$$

---

Solution proposée par Fabienne Zoetard :

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 32x + 18}{x^2 + 4x + 3} \geq 6 \quad \text{CE: } (x+1)(x+3) \neq 0 &\Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -3 \end{cases} \\ \frac{x^3 + 32x + 18}{x^2 + 4x + 3} - 6 \geq 0 &\Rightarrow \frac{x^3 + 32x + 18 - 6(x^2 + 4x + 3)}{x^2 + 4x + 3} \geq 0 \\ \Rightarrow \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x^2 + 4x + 3} \geq 0 &\Rightarrow \frac{x(x^2 - 6x + 8)}{x^2 + 4x + 3} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Les zéros sont : } \begin{cases} \boxed{N} : x = 0, x = 2, x = 4 \\ \boxed{D} : x = -1, x = -3 \end{cases}$$

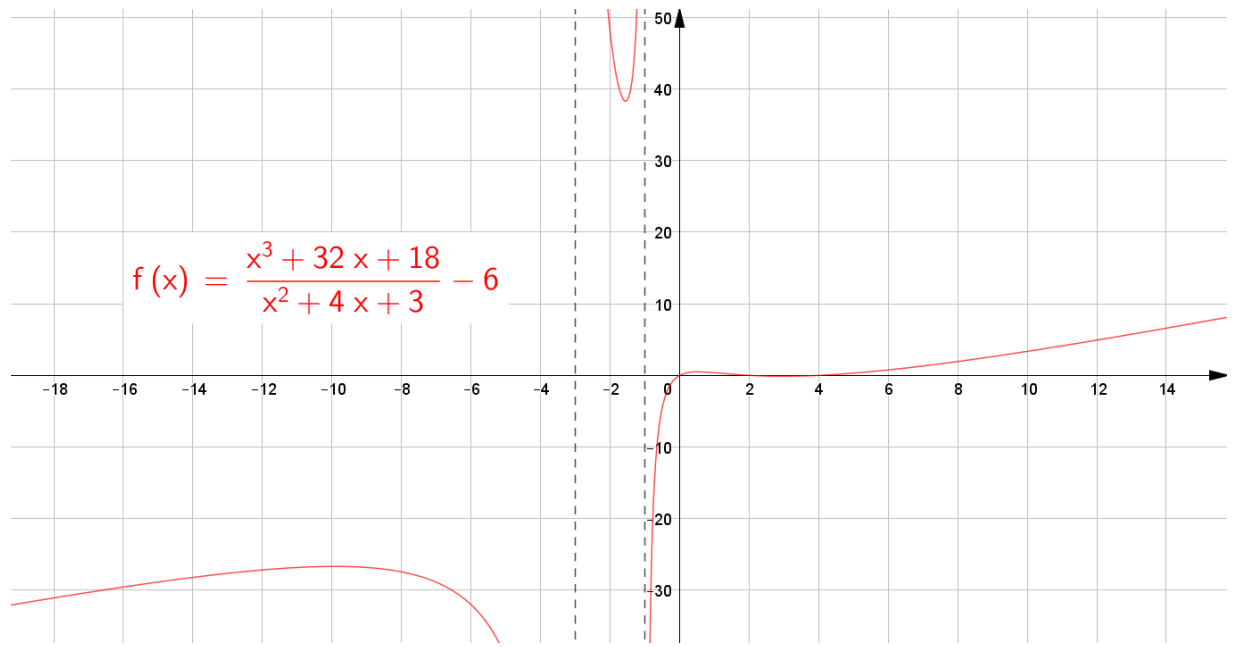
Ce qui donne le tableau de signe suivant :

$x$	-3	-1	0	2	4						
$x$	-	-	-	0	+	+	+	+	+		
$x^2 - 6x + 8$	+	+	+	+	+	+	0	-	0	+	
$x^2 + 4x + 3$	+	0	-	0	+	+	+	+	+	+	
$\frac{x(x^2 - 6x + 8)}{x^2 + 4x + 3}$	-	//	+	//	-	0	+	0	-	0	+

$$\Rightarrow \boxed{S : ]-3, -1[ \cup [0, 2] \cup [4, +\infty[}$$

Note : si on représente la fonction :  $f = \frac{x(x^2 - 6x + 8)}{x^2 + 4x + 3}$ , il faut choisir convenable

la fenêtre d'affichage pour voir le minimum positif dans l'intervalle  $[-3, -1]$



Le 20 octobre 2017

## EXALG573 – POLYTECH, UMon, Mons, juillet 2013.

Résoudre :

$$\sqrt{x^2 + 6x + 8} < \sqrt{x^2 + 6x + 11} - 1$$

---

CE : 1)  $x^2 + 6x + 8 \geq 0 \Rightarrow x \leq -4$  ou  $x \geq -2$

2)  $x^2 + 6x + 11 \geq 0$  Toujours vérifié

3)  $\sqrt{x^2 + 6x + 11} - 1 > 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 10 > 0$  Toujours vérifié

$$\Rightarrow x \in ]-\infty; -4] \cup [-2, \rightarrow[$$

On élève l'équation au carré, les membres de l'inéquation sont positifs:

$$x^2 + 6x + 8 < x^2 + 6x + 11 - 2\sqrt{x^2 + 6x + 11} + 1$$

$$\Rightarrow 2 > \sqrt{x^2 + 6x + 11}$$

Les 2 membres sont positifs ce qui n'engendre pas de conditions supplémentaires.

On élève l'équation au carré :

$$4 > x^2 + 6x + 11 \Rightarrow x^2 + 6x + 7 < 0 \Rightarrow x \in ]-3 - \sqrt{2}, -3 + \sqrt{2}[$$

Compte tenu des CE, on conclut

$$x \in ]-3 - \sqrt{2}; -4] \cup [-2, -3 + \sqrt{2}[$$

---

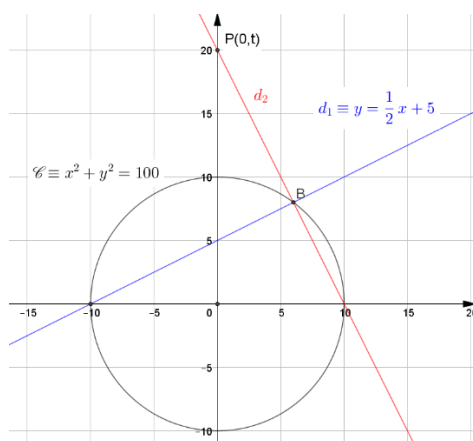
Le 7 novembre 2017

## EXALG574 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2013.

La droite  $d_1$  d'équation  $x - 2y + 10 = 0$  rencontre le cercle d'équation  $x^2 + y^2 = 100$  au point  $B$  dans le premier quadrant. Une droite passant par  $B$ , perpendiculaire à la droite  $d_1$  coupe l'axe des  $y$  au point  $P$  de coordonnées  $(0, t)$ . Déterminer la valeur de  $t$ .

---

**Solution proposée par Fabienne Zoetard.**



$$B = \mathcal{C} \cap d \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \frac{1}{2}x + 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 25 + 5x = 100 \Rightarrow x^2 + 4x - 60 = 0$$

Cette équation a pour solution  $x = 6$  et  $x = -10$ . On garde  $x = 6$ , car on est dans le premier quadrant. Il en résulte :  $B(6, 8)$

La droite  $d_2$  a pour pente  $-2$  et pour équation  $d_2 \equiv y - 8 = -2(x - 6) \Rightarrow y - 2x + 20$

L'ordonnée à l'origine de  $d_2$  est  $20 \Rightarrow P(0, 20)$  et donc  $t = 20$

---

Le 8 novembre 2017



## EXALG575 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2018.

Résoudre l'inéquation suivante dans  $\mathbb{R}$

$$|x+1|+|x-2|<3$$

---

On se débarrasse des valeurs absolues en considérant les cas suivants :

- 1)  $x < -1$ . L'équation devient :  $-x-4-x+2 < 3 \Rightarrow x > -1$  ce qui est incompatible avec la condition.
- 2)  $x = -1$ .  $\Rightarrow 3 < 3$  : impossible.
- 3)  $-1 < x < 2$ .  $\Rightarrow x+1-x+2 < 3 \Rightarrow 3 > 3$  : impossible.
- 4)  $x = 2$ .  $\Rightarrow 3 < 3$  : impossible.
- 5)  $x > 2$ .  $\Rightarrow x+1+x-2 < 3 \Rightarrow x < 2$  : ce qui est incompatible avec la condition.

Conclusion : l'inéquation n'a pas de solution.

---

Le 7 septembre 2018

## EXALG576 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2018.

- a) A quelles conditions sur les paramètres réels  $a, b$  et  $c$  le polynôme  $X^4 + aX^2 + bX + c$  est-il divisible par  $X^2 + X + 1$ ?
- b) A quelle condition sur les paramètres réels  $p$  et  $q$  le polynôme  $X^3 + pX + q$  admet-il une racine double? Cette racine est-elle toujours réelle?

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont :**

<http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf>

**Solution, partie a.** Si  $X^4 + aX^2 + bX + c = (X^2 + X + 1)Q(X)$ , le fait que les coefficients des termes de degrés respectifs 4, 3 et 0 soient 1, 0 et  $c$  impose que le polynôme du second degré  $Q(x)$  soit  $X^2 - X + c$ .

Le produit vaut alors  $X^4 + cX^2 + (c - 1)X + c$ , ce qui impose les conditions  $a = c$  et  $b = c - 1$ .

*Variante.* En divisant formellement  $X^4 + aX^2 + bX + c$  par  $X^2 + X + 1$ , on obtient le quotient  $X^2 - X + a$  et le reste  $(b + 1 - a)X + (c - a)$ . Le reste devant être nul, on a les conditions  $b + 1 = a$  et  $c = a$ , équivalentes aux précédentes.

**Solution, partie b.** L'absence de terme du second degré indique que la somme des trois racines du polynôme est nulle donc, si  $a$  est racine double, le polynôme admet aussi une racine simple qui doit être  $-2a$  et on a

$$X^3 + pX + q = (X - a)^2(X + 2a) = X^3 - 3a^2X + 2a^3,$$

d'où on tire  $p = -3a^2$  et  $q = 2a^3$ , ou encore  $p^3 = -27a^6$  et  $q^2 = 4a^6$ . La condition demandée est donc  $4p^3 + 27q^2 = 0$ . La racine simple  $-2a$  et la racine double  $a$  sont réelles: on a  $a = -3q/2p$ .

*Cas particulier.* Si  $p = 0$ , on a aussi  $q = 0$ ; le polynôme admet alors la racine triple nulle.

*Remarque.* Le développement ci-dessus a montré que l'égalité  $4p^3 + 27q^2 = 0$  était une condition *nécessaire* à l'existence d'une racine double (ou triple) pour le polynôme proposé mais cette condition est aussi *suffisante*. Le produit  $(X + 3q/2p)(X + 3q/2p)(X - 3q/p)$  est le polynôme  $X^3 - 27q^2X/4p^2 - 27q^3/4p^3$  qui, si l'on tient compte de l'égalité  $4p^3 = -27q^2$ , se réduit au polynôme proposé. On peut aussi, si  $x_1, x_2, x_3$  sont les racines du polynôme, se servir des égalités  $0 = x_1 + x_2 + x_3$ ,  $p = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$  et  $q = -x_1x_2x_3$  pour obtenir l'égalité  $4p^3 + 27q^2 = -(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2$ , qui rend évident le fait que la condition est nécessaire et suffisante.

---

Le 7 septembre 2018

## EXALG577 - FACSA, ULiège, Liège, septembre 2018.

Résoudre le système suivant, dans lequel  $a$  est un paramètre réel :

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 1 \\ x + ay + az = a \\ ax + a^2y + a^3z = a^3 \end{cases}$$

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont :**

<http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf>

**Solution.** La troisième équation se réduit à  $0 = 0$  si  $a = 0$  ce qui nous incite à traiter d'abord ce cas particulier, pour lequel les deux premières équations se réduisent à  $x = 1$  et  $x = 0$  respectivement. Le système est donc impossible dans ce cas.

Dans les autres cas ( $a \neq 0$ ), le système se réduit à

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 1, \\ x + ay + az = a, \\ x + ay + a^2z = a^2. \end{cases}$$

Le déterminant du système s'annule toujours puisque ses première et troisième lignes sont égales. On distingue trois cas.

*Premier cas.* Si  $a^2 \neq 1$ , les première et troisième équations sont incompatibles et le système n'admet pas de solution.

*Deuxième cas.* Si  $a = 1$ , le système se réduit à  $x + y + z = 1$  et est doublement indéterminé. Pour tous réels  $\lambda$  et  $\mu$ , le triplet  $(x, y, z) = (\lambda, \mu, 1 - \lambda - \mu)$  est solution.

*Troisième cas.* Si  $a = -1$ , le système se réduit à:

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ x - y - z = -1, \\ x - y + z = 1. \end{cases}$$

Il est alors simplement indéterminé; pour tout réel  $\lambda$ , le triplet  $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, 1)$  est solution.

---

Le 7 septembre 2018

## EXALG578 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2018.

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$z^3 + (\operatorname{cis} \theta)^2 |z| = 0,$$

dans laquelle  $\theta$  est un paramètre réel. Quel est l'ensemble des valeurs possibles de  $|z|$ ?

Donner la forme algébrique des solutions éventuelles dans le cas  $\theta = 0$ .

*Rappel.* L'expression  $\operatorname{cis} \theta$  est une abréviation de  $(\cos \theta + i \sin \theta)$ .

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont :**

<http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf>

**Solution.** On peut écrire  $z^3 = -(\operatorname{cis} \theta)^2 |z| = -(\operatorname{cis} 2\theta) |z| = (\operatorname{cis} (2\theta + \pi)) |z|$ .

En prenant le module des deux membres, on obtient  $|z^3| = |z|^3 = |z|$ , ce qui impose  $|z| \in \{0, 1\}$ . On observe immédiatement que 0 est solution de l'équation proposée et que toute autre solution éventuelle peut s'écrire  $z = \operatorname{cis} \alpha$ , où  $\alpha$  est solution de l'équation  $(\operatorname{cis} \alpha)^3 = -(\operatorname{cis} \theta)^2$ , qui peut se récrire  $\operatorname{cis} 3\alpha = \operatorname{cis} (2\theta + \pi)$ , et encore  $\alpha = [2\theta + (2k + 1)\pi]/3$ , où  $k$  est un entier quelconque.

Dans le cas général, l'ensemble des quatre solutions est

$$\left\{ 0, \operatorname{cis} \frac{2\theta - \pi}{3}, \operatorname{cis} \frac{2\theta + \pi}{3}, -\operatorname{cis} \frac{2\theta}{3} \right\}.$$

Dans le cas particulier  $\theta = 0$ , l'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ 0, \operatorname{cis} \frac{-\pi}{3}, \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}, -1 \right\}$$

ou encore

$$\left\{ 0, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, -1 \right\}.$$

---

Le 8 octobre 2017

## EXALG579 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2010.

Déterminez et représentez graphiquement l'ensemble des points  $(x, y)$  du plan, avec  $y < 0$ , qui satisfont l'inéquation :

$$\frac{x(y-1)}{y-2} > 1$$

-+

Observons que le dénominateur n'est jamais nul puisque  $y < 0$  et que  $0 < \frac{y-1}{y-2} < 1$  ce qui

implique que  $x > 1$

Puisque  $y < 0$ ,  $y - 2$  est aussi négatif, l'expression devient :

$$x(y-1) < y-2 \Rightarrow xy - x < y - 2 \Rightarrow y(x-1) < x-2$$

1) Si  $x \geq 2$ , l'expression sera toujours satisfaite et l'ensemble des points est situé en dessous de l'axe des  $y$ .

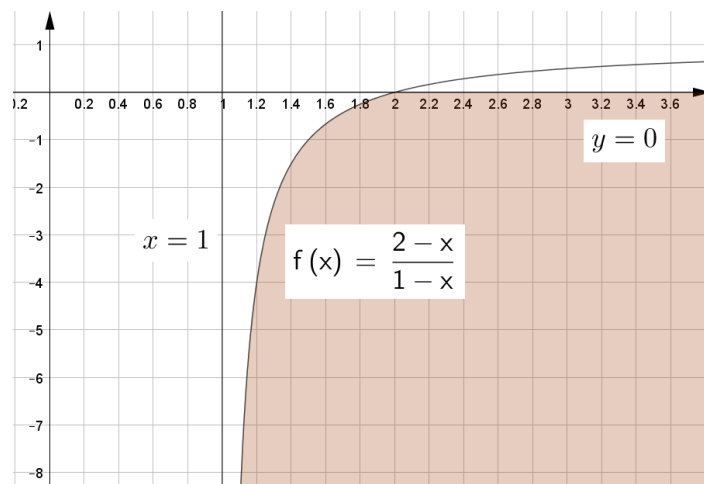
2) Si  $1 < x < 2$ , on peut écrire :  $y < \frac{x-2}{x-1}$ . L'ensemble des points est situé en dessous de la

courbe  $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$  qui est une branche d'hyperbole.

Conclusion :

L'ensemble des points du plan qui satisfait l'équation est donc situé en dessous de la

droite  $y = 0$ , et en dessous de la courbe  $f(x) = \frac{2-x}{1-x}$ .



Le 7 septembre 2018