

Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 7

EXALG070 – EXALG079

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Juillet 03

EXALG070 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998

Soit l'équation en la variable complexe z :

$$z^2 - (\alpha + 3i + 4)z + 2\alpha i - 1 = 0 \quad \text{avec } \alpha \text{ complexe.}$$

- Déterminer le paramètre α pour que l'équation admette deux racines complexes conjuguées et calculer ces racines.
- Dans un autre cas, si une des racines est i , calculer le paramètre α et l'autre racine.

Dans chacun des deux cas, représenter les racines dans le plan complexe.

a) Soient $x \pm iy$ les deux racines conjuguées. Leur somme ($= 2x$) et leur produit ($= x^2 + y^2$) sont des nombres réels. Par conséquent, $\alpha + 3i + 4$ et $2\alpha i - 1$ sont des nombres réels, c'est-à-dire que les parties imaginaires sont nulles.

$$\text{Notons } \alpha = a + ib \rightarrow \begin{cases} 0 = \text{Im}(\alpha + 3i + 4) = b + 3 \rightarrow b = -3 \\ 0 = \text{Im}(2\alpha i - 1) = 2a \rightarrow a = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow \alpha = -3i \rightarrow$ L'équation devient : $z^2 - 4z + 5 = 0$, dont les racines sont $2 \pm i$

b) Méthode 1

Si i est une racine et $z = x + iy$, l'autre, le trinôme s'écrit

$$P(z) = (z - i)(z - x - iy) = z^2 - (i + x + iy)z + ix - y = 0$$

En comparant avec le trinôme donné,
$$\begin{cases} x + iy + i = \alpha + 3i + 4 & (1) \\ ix - y = 2\alpha i - 1 & (2) \end{cases}$$

En multipliant (2) par i puis en ajoutant (1), on a

$$(1) + (2) \times i \quad : \quad 0 = -\alpha + i + 4 \rightarrow \alpha = 4 + i$$

$$(1) \text{ donne alors } : \quad x + iy = 8 + 3i$$

Les racines sont donc i et $8 + 3i$; $\alpha = 4 + i$

Méthode 2

Si i est une solution de l'équation, on a :

$$i^2 - (a + bi + 3i + 4).i + 2(a + bi).i - 1 = 0 \rightarrow 1 - ai + b + 3 + 3i - 4i + 2ai - 2b - 1 = 0$$

$$\rightarrow 1 - b + i(a - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 4 \end{cases} \rightarrow \alpha = 4 + i$$

Pour obtenir la seconde racine x_2 , on observe que le produit des racines du trinôme est :

$$x_1 x_2 = i x_2 = 2\alpha i - 1 = 2(4 + i) = -3 + 8i \rightarrow x_2 = \frac{-3 + 8i}{i} = \frac{(-i)(-3 + 8i)}{(-i).i} = 8 + 3i$$

Le lecteur représentera les solutions dans le plan complexe.

EXALG071 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998

Discuter selon les valeurs de m , le nombre de racines de l'équation

$$\sin^2 x + 4m \cos x - 2m - 3 = 0$$

L'équation peut s'écrire :

$$(1 - \cos^2 x) + 4m \cos x - 2m - 3 = 0$$

$$\text{Soit } y = \cos x \rightarrow y^2 - 4my + 2(m+1) = 0 \quad \text{avec } -1 \leq y \leq 1$$

$$\Delta = 16m^2 - 8m - 8 = 8(2m^2 - m - 1)$$

$$\rightarrow \Delta = 0 \quad \text{si } m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

\rightarrow Les racines du trinôme en y sont donc réelles ssi $m \geq 1$ ou $m \leq -\frac{1}{2}$

Positionnons -1 et 1 par rapport aux racines y_1 et y_2 .

Le graphe de $f(y) = y^2 - 4my + 2(m+1)$ est une parabole dont la concavité est vers le haut.

$$f(-1) = 3(2m+1) \geq 0 \quad \text{ssi } m \geq -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = -2m+3 \geq 0 \quad \text{ssi } m \leq \frac{3}{2}$$

$$a) \underline{m \leq -\frac{1}{2}} \quad f(-1) < 0 \text{ et } f(1) > 0 \rightarrow y_1 \leq -1 \leq y_2 \leq 1. \quad y_2 \text{ est acceptable.}$$

$$b) \underline{m = -\frac{1}{2}} \rightarrow y_1 = y_2 = -1$$

$$c) \underline{-\frac{1}{2} < m < 1} \quad \text{Pas de solution réelle.}$$

d) $\underline{1 \leq m \leq \frac{3}{2}}$ $f(-1)$ et $f(1) > 0$, donc -1 et 1 sont tous deux en dehors de

l'intervalle $[y_1, y_2]$. Or la somme des racines vaut $4m$ (≥ 4), donc il est impossible que $-1 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1$. On a en fait $-1 < 1 \leq y_1 \leq y_2$ et aucune solution n'est acceptable.

e) $\underline{m = \frac{3}{2}}$ $f(-1) > 0$ et $f(1) = 0 \rightarrow y_1 = 1 < y_2$

f) $\underline{m > \frac{3}{2}}$ $f(-1) > 0$, $f(1) < 0 \rightarrow -1 < y_1 \leq 1 < y_2$ y_1 est acceptable.

Conclusion : Note $x = \arccos y$ prend ses valeurs dans $[0, \pi]$

$$m < -\frac{1}{2} \quad x = \arccos y_2$$

$$m = -\frac{1}{2} \quad x = \arccos(-1) = \pi$$

$$-\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2} \quad \text{Pas de solutions réelles}$$

$$m = \frac{3}{2} \quad x = \arccos 1 = 0$$

$$m > \frac{3}{2} \quad x = \arccos y_1$$

EXALG072 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998

Discuter en fonction du paramètre m , le nombre de racines admissibles de l'équation

$$\cos^2 x - \cos x - m = 0$$

Soit $y = \cos x \rightarrow y^2 - y - m = 0$ avec $-1 \leq y \leq 1$

$$\Delta = 1 + 4m \rightarrow \text{Racines réelles si } m \geq -\frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2} \\ y_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4m}}{2} \end{cases}$$

Racine y_1 $-1 \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2} \leq 1 \rightarrow -2 \leq 1 + \sqrt{1 + 4m} \leq 2$

$$\rightarrow \begin{cases} -2 \leq 1 + \sqrt{1 + 4m} \\ 1 + \sqrt{1 + 4m} \leq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3 \leq \sqrt{1 + 4m} & \text{toujours vérifiée} \\ \sqrt{1 + 4m} \leq 1 \rightarrow 1 + 4m \leq 1 \rightarrow m \leq 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow y_1 \text{ est solution si } m \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right]$$

Racine y_2 $-1 \leq \frac{1 - \sqrt{1 + 4m}}{2} \leq 1 \rightarrow -2 \leq 1 - \sqrt{1 + 4m} \leq 2$

$$\rightarrow \begin{cases} -2 \leq 1 - \sqrt{1 + 4m} \\ 1 - \sqrt{1 + 4m} \leq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 \geq \sqrt{1 + 4m} \rightarrow 9 \geq 1 + 4m \rightarrow m \leq 2 \\ -1 \leq \sqrt{1 + 4m} & \text{toujours vérifiée} \end{cases}$$

$$\rightarrow y_2 \text{ est solution si } m \in \left[-\frac{1}{4}, 2\right]$$

Résumé

$$m < -\frac{1}{4} \quad \text{Pas de solution}$$

$$m = -\frac{1}{4} \quad 1 \text{ solution car } y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$$

$$m \in \left]-\frac{1}{4}, 0\right] \quad 2 \text{ solutions}$$

$$m \in]0, 2] \quad 1 \text{ solution}$$

$$m > 2 \quad \text{Pas de solution}$$

Modifié le 31 aout 2016 (Jean Perbal)

EXALG073 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998

Montrer que le polynôme suivant est divisible par $(x-1)^2$ et trouver le quotient.

$$P(x) = x^{n+1} - (n+1)x + n \quad n \in \mathbb{N}$$

$$P(1) = 1^{n+1} - (n+1) \cdot 1 + n = 0 \rightarrow P(x) \text{ est divisible par } (x-1)$$

Horner :

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n-1 & n \\ 1 & & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & n \\ \hline & 1 & 1 & 1 & & 1 & -n & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow P(x) = (x-1)(x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x - n) = (x-1)Q(x)$$

$$Q(1) = 0 \rightarrow Q(x) \text{ est divisible par } (x-1)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & x^n & x^{n-1} & x^{n-2} & x^{n-3} & & x^1 & x^0 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ \hline 1 & & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow Q(x) = (x-1)(x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3x^{n-3} + \dots + (n-1)x + n)$$

Modifié le 14 janvier 06 (Sabine Bouzette)

EXALG074 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998

La somme des 3 chiffres d'un nombre est 17.

La différence entre ce nombre et celui qu'on obtient en le lisant de droite à gauche est 495.

En ajoutant le chiffre des dizaines au double du chiffre des centaines, on trouve 22.

Quel est ce nombre (ou ces nombres) ?

Soit le nombre représenté sous la forme : $x+10y+100z$

1) La somme des 3 chiffres est 17 $\rightarrow x+y+z=17$

2) La différence entre ce nombre et celui qu'on obtient en le lisant de droite à gauche est 495

$$(x+10y+100z)-(z+10y+100z)=495 \rightarrow z-x=5$$

3) En ajoutant le chiffre des dizaines au double du chiffre des centaines, on trouve 22

$$y+2z=22$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y + z = 17 & (1) \\ -x \quad \quad + z = 5 & (2) \\ \quad \quad y + 2z = 22 & (3) \end{cases}$$

Comme $(1)+(2)=(3)$, le système est redondant

$$\rightarrow \begin{cases} y = 22-2z \\ x = 17-z-22+2z = z-5 \end{cases}$$

Cependant, x , y et z ne peuvent prendre que des valeurs entières comprises entre 0 et 9.

$$x = z-5 \rightarrow 0 \leq z-5 \leq 9 \rightarrow z \geq 5 \quad z \leq 14$$

$$y = 22-2z \rightarrow 0 \leq 22-2z \leq 9 \rightarrow z \leq 11 \quad z \leq 7$$

$$z \rightarrow 0 \leq z \leq 9 \rightarrow z \geq 0 \quad z \leq 9$$

Les valeurs possibles pour z sont donc 7, 8 et 9 \rightarrow

$$z=7 \rightarrow y=22-14=8 \quad x=7-5=2 \rightarrow \text{nombre : } 782$$

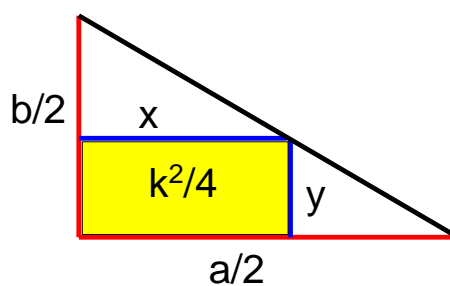
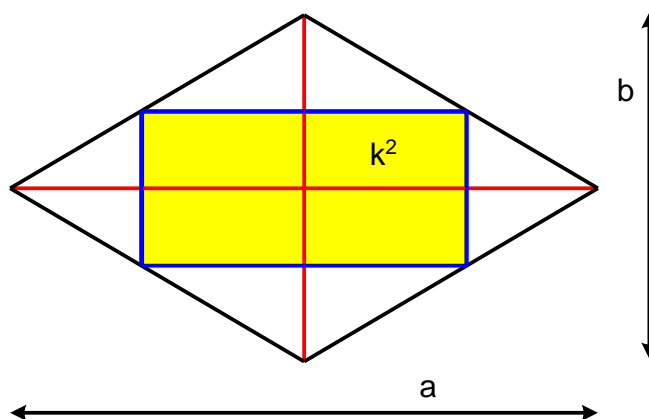
$$z=8 \rightarrow y=22-16=6 \quad x=8-5=3 \rightarrow \text{nombre : } 863$$

$$z=9 \rightarrow y=22-18=4 \quad x=9-5=4 \rightarrow \text{nombre : } 944$$

EXALG075 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998

Les diagonales d'un losange sont de longueur a et b .
On inscrit un rectangle d'aire k^2 dans le losange, comme indiqué dans la figure ci-dessous.

Déterminer les côtés du rectangle et discuter.



Compte tenu de la symétrie, on peut raisonner sur un un seul triangle.

$$\text{On a : } S = x.y = \frac{k^2}{4} \quad (1)$$

Le couple (x, y) appartient à la droite passant par les points $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ et $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$

$$\text{d'équation : } y = \frac{b}{2} - \frac{b}{a}x$$

$$\rightarrow (1) \text{ devient : } S = x.y = x\left(\frac{b}{2} - \frac{b}{a}x\right) = \frac{k^2}{4} \rightarrow \frac{b}{a}x^2 - \frac{b}{2}x + \frac{k^2}{4} = 0$$

$$\text{Racines réelles si : } \Delta = \frac{b^2}{4} - k^2 \frac{b}{a} = \frac{b^2}{4} \left[1 - \frac{4k^2}{ab}\right] \geq 0 \rightarrow k^2 \leq \frac{ab}{4}$$

Autrement dit l'équation n'admet des racines réelles que si l'aire du rectangle est inférieure ou égale à la moitié de l'aire du losange.

$$\text{Si } \Delta \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\frac{b}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4k^2}{ab}}\right)}{\frac{2b}{a}} = \frac{a \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4k^2}{ab}}\right)}{4} \\ x_1 = \frac{\frac{b}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4k^2}{ab}}\right)}{\frac{2b}{a}} = \frac{a \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4k^2}{ab}}\right)}{4} \end{cases}$$

$$\text{Etant donné que : } 0 \leq \sqrt{1 - \frac{4k^2}{ab}} < 1 \text{ car } k^2 \leq \frac{ab}{4}$$

Nous obtenons les conditions suivantes sur x_1 et x_2

$$\frac{a}{4} \leq x_1 < \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad 0 < x_2 \leq \frac{a}{4}$$

Les solutions x_1 et x_2 sont donc deux solutions acceptables pour x .

Les valeurs correspondantes de y sont :

$$y_1 = \frac{b \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4k^2}{ab}}\right)}{4} \quad y_2 = \frac{b \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4k^2}{ab}}\right)}{4}$$

EXALG076 – Bruxelles, juillet 2001.

A) Combien de solutions réelles l'équation suivante admet-elle ?

$$\log_{10} \sqrt{7x+5} + \log_{10} \sqrt{2x+3} = 1 + \log_{10} 0.1$$

B) Utilisant les propriétés des déterminants, calculer :

$$\begin{vmatrix} a+d & a & 2 \\ b+2d & b & 4 \\ c+3d & c & 6 \end{vmatrix}$$

$$\text{A) CE : } \begin{cases} 7x+5 > 0 \\ 2x+3 > 0 \end{cases} \rightarrow x > -\frac{5}{7}$$

$$\log_{10} \sqrt{7x+5} + \log_{10} \sqrt{2x+3} = 1 + \log_{10} 0.1 = 0$$

$$\sqrt{7x+5} \cdot \sqrt{2x+3} = 1$$

$$(7x+5)(2x+3) = 1$$

$$14x + 31x + 14 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -0.6320 \\ x = -1.5828 \end{cases} \quad \text{A rejeter}$$

$$\text{B) } \begin{vmatrix} a+d & a & 2 \\ b+2d & b & 4 \\ c+3d & c & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & a & 2 \\ 2d & b & 4 \\ 3d & c & 6 \end{vmatrix} = 2d \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & b & 2 \\ 3 & c & 3 \end{vmatrix} = 0$$

EXALG077 – Bruxelles, juillet 2001.

Factoriser :

$$f(x) = 3x^4 - 11x^3 + 9x^2 + 4x - 4$$

sachant que l'équation $f(x)=0$ admet deux racines dont le produit vaut -1

$f(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(3x^2 + ax + b)$$

sachant que $x_1x_2 = -1$, on obtient après développement :

$$f(x) = 3x^4 + (a - 3x_1 - 3x_2)x^3 + (b - ax_1 - ax_2 - 3)x^2 + (-bx_1 - bx_2 - a)x - b$$

On en déduit le système:

$$\begin{cases} a - 3x_1 - 3x_2 = -11 \\ b - ax_1 - ax_2 - 3 = 9 \\ -bx_1 - bx_2 - a = 4 \\ -b = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - 3x_1 - 3x_2 = -11 & (1) \\ -ax_1 - ax_2 = 8 \\ -4x_1 - 4x_2 - a = 4 & (2) \end{cases}$$

On additionne (1) et (2) et on réarrange

$$\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 = 7 \\ a(x_1 + x_2) = -8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ a = -8 \end{cases}$$

On connaît donc le produit et la somme de x_1 et x_2 qui sont donc solutions

$$\text{de l'équation : } z^2 - z - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Il nous reste à factoriser : $3x^2 - 8x + 4 = (x - 2)(3x - 2)$

Finalement :

$$f(x) = \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) (x - 2)(3x - 2)$$

EXALG078 – Bruxelles, juillet 2001.

Déterminer, en fonction du paramètre réel a , le nombre de racines réelles qu'admet l'équation :

$$\sqrt{x-a} - \sqrt{x-4} = \sqrt{2x-5}$$

$$\sqrt{x-a} - \sqrt{x-4} = \sqrt{2x-5}$$

$$\text{CE : } \begin{cases} x \geq a \\ x \geq 4 \\ x-a \geq x-4 \quad \text{car le premier membre doit être positif} \rightarrow a \leq 4 \end{cases}$$

$\rightarrow a \leq 4 \leq x$

$$x-a - 2\sqrt{(x-a)(x-4)} + x-4 = 2x-5$$

$$(x-a)(x-4) = \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$$

$$x^2 - (a+4)x + \frac{16a - a^2 + 2a - 1}{4} = 0$$

$$4x^2 - 4(a+4)x - (a^2 - 18a + 1) = 0$$

$$\Delta' = 4(a+4)^2 + 4(a^2 - 18a + 1) = 4(2a^2 - 10a + 17) \quad \text{toujours} > 0$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{2} \left[(4+a) \pm \sqrt{2a^2 - 10a + 17} \right]$$

Nous devons avoir $x \geq 4$

$$\text{Première racine : } \frac{1}{2} \left[(4+a) + \sqrt{2a^2 - 10a + 17} \right] \geq 4$$

$$2a^2 - 10a + 17 \geq 4 - 2a + \frac{a^2}{4}$$

$$7a^2 - 32a + 52 \geq 0 \quad \text{toujours} > 0.$$

$$\text{Deuxième racine : } \frac{1}{2} \left[(4+a) - \sqrt{2a^2 - 10a + 17} \right] \geq 4$$

$$7a^2 - 32a + 52 \leq 0 \quad \text{impossible}$$

Conclusions :

$$a \leq 4 \quad \text{Une seule racine : } x = \frac{1}{2} \left[(4+a) + \sqrt{2a^2 - 10a + 17} \right]$$

$a > 4$ Pas de racine

EXALG079 – Bruxelles, juillet 2001.

Résoudre dans \mathbb{R}^3 , en discutant par rapport au paramètre réel a , le système :

$$\begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ 2ax + ay + 2z = 2a^2 \\ ax + y + az = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2a & a & 2 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = a(a-1)(a-2) \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 1 \\ 2a^2 & a & 2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a-2)(a^2+a+1)$$
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ 2a & 2a^2 & 2 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ 2a & a & 2a^2 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a(a-2)(a+1)(1-a)$$

Discussion

1) $a = 0 \rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ Système impossible

2) $a = 1 \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 0 \end{cases}$ Système simplement indéterminé.

3) $a = 2 \rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 4x + 2y + 2z = 8 \\ 2x + y + 2z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 - z \\ 2x + y = 1 - 2z \end{cases} \rightarrow 4 - z = 1 - 2z \rightarrow z = -3$
 $\rightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x \\ z = -3 \end{cases}$ Système simplement indéterminé

Dans les autres cas :

$$\begin{cases} x = \frac{a^2 + a + 1}{a} \\ y = 0 \\ z = -a - 1 \end{cases}$$

Corrigé le 2 avril 2006 (Sabine Bouzette)