Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 8

EXALG080 – EXALG089

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG080 – Bruxelles, septembre 2001.

Résoudre dans C, l'équation :

$$|z|^2 - 2z + 6i - 15 = 0 \qquad \text{avec} \quad |z| = \text{ module de } z$$

Soit $z = a + bi \quad \rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2$

L'équation devient :

$$a^2 + b^2 - 2a - 2bi + 6i - 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2a - 15 = 0 \\ -2b + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow b = 3 \rightarrow a^2 - 2a - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 3.6458 \\ a_2 = -1.645 \end{cases}$$

Solutions

$$\begin{cases} z_1 = 3.6548 + 3i \\ z_2 = -1.645 + 3i \end{cases}$$

EXALG081 – Bruxelles, septembre 2001.

Résoudre dans R, l'inéquation :

$$1+\ln\left(x+3\right)>\ln\left(x^2+2x-3\right)$$

CE : $\begin{cases} x>-3 \\ x^2+2x-3=\left(x-1\right)\left(x+3\right)>0 \;\rightarrow\; x<-3;\, x>1 \end{cases} \rightarrow\; x>1$

L'équation devient :

$\ln e.\left(x+3\right)>\ln\left(x^2+2x-3\right)$

$e.\left(x+3\right)>x^2+2x-3=\left(x-1\right)\left(x+3\right)$

On peut simplifier par $x+3$ puisque $x>1$

$e>x-1 \;\rightarrow x<e+1$

Conclusion : $\boxed{1<x<e+1}$

EXALG082 – Bruxelles, septembre 2001.

Trouver un réel m tel que les 4 racines de l'équation :

$$x^4-(3m+1)x^2+m^2=0$$

soient quatre réels distincts en progression arithmétique.
Quelles sont alors ces quatre racines ?

Soient les quatres racines : $a;\ a+r;\ a+2r;\ a+3r$

L'équation peut s'écrire : $(x-a)(x-(a+r))(x-(a+2r))(x-(a+3r))=0$

Le coefficient du terme en x^3 est la somme des racines: $\rightarrow 4a+6r=0 \ \rightarrow\ r=-\frac{2}{3}a \quad (1)$

Le coefficient du terme en x^2 est égale à $-(3m+1) \ \rightarrow\ 6a^2+18ra+11r^2=-(3m+1)$

Compte tenu de $(1) \ \rightarrow\ a^2=\frac{9}{10}(3m+1) \quad (2)$

Le terme indépendant est le produit des racines et égal à m^2

$a(a+r)(a+2r)(a+3r)=m^2$

Compte tenu de $(1) \ \rightarrow\ a^2=\pm 3m \quad (3)$

De (2) et (3) $\rightarrow$

$A)$ $3m=\frac{9}{10}(3m+1) \ \rightarrow\ m=3$

L'équation devient : $x^4-10x+9=(x^2-1)(x^2-9)=0$

Ce qui donne les racines : $-3,\ -1,\ 1,\ 3$ qui sont bien en progression arithmétique

B) $-3m=\frac{9}{10}(3m+1) \ \rightarrow\ m=-\frac{3}{19}$

L'équation devient : $x^4-0.5263x+0.0249=0$

Ce qui donne les racines : $-0.688247,\ -0.229417,\ 0.229417,\ 0.688247$
qui sont bien en progression arithmétique

Note : On peut faire aussi l'exercice en considérant que les racines sont en progression géométrique.

On trouve : $m=-\frac{1}{5}$ Les racines sont : $\pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ $(2\times)$ La raison : $r=-1$

EXALG083 – Bruxelles, septembre 2001.

Résoudre dans R³ et discuter en fonction du paramètre réel a le système :

$$\begin{cases} (3-a)x + y - z = 0 \\ 2x + (2-a)y - 2z = 0 \\ x - y + (1-a)z = 0 \end{cases}$$

C'est un système homogène.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3-a & 1 & -1 \\ 2 & 2-a & -2 \\ 1 & -1 & 1-a \end{vmatrix} = -a(a-4)(a-2)$$

$A)$ $\underline{a=0}$

Le système devient: $\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ 2x+2y-2z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}$ Système simplement indéterminé.

$B)$ $\underline{a=2}$

Le système devient: $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-2z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$ Systéme simplement indéterminé

$C)$ $\underline{a=4}$

Le système devient: $\begin{cases} -x+y-z=0 \\ 2x-2y-2z=0 \\ x-y-3z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$ Systéme simplement indéterminé

$E)$ Dans les autres cas : $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

Corrigé le 2 avril 2006 (Sabine Bouzette)

EXALG084 – Bruxelles, juillet 2002.

Trouver un polynôme du 4ème degré P(x) sachant qu'il est divisible par x et x^2+5, que le reste de sa division par x-1 vaut –30 et que le reste de sa division par x-2 vaut –54.

Le polynôme peut se mettre sous la forme :

$P(x)=x(x^2+5)(ax+b)$

On a :

$P(1)=1.(1+5)(a+b)=-30 \quad \rightarrow \quad a+b=-6$

$P(2)=2.(2+5)(2a+b)=-54 \rightarrow 2a+b=-3$

On déduit : $a=2 \quad b=-7$

$\rightarrow \quad \boxed{P(x)=2x^4-7x^3+10x^2-35x}$

EXALG085 – Bruxelles, juillet 2002.

Déterminer toutes les valeurs réelles de *a* pour lesquelles :

$$ax^2 - x + a \geq 0 \quad , \quad \forall x > 0$$

Pour que $P(x)$ soit toujours ≥ 0, pour tout *x*, il faut que la concavité de la fonction $P(x)$ soit $> 0 \quad \rightarrow \quad a > o$

De plus, il faut que le Δ soit < 0.

$\rightarrow \quad \Delta = 1 - 4a^2 = (1-2a)(1+2a) < 0$

$\rightarrow \quad a < -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < a$

Si $a = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad P(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-1)^2$ qui est toujours ≥ 0

Conclusion : $\boxed{a \geq \frac{1}{2}}$

EXALG086 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2002.

Si a et b sont deux nombres réels, quelle condition doivent-ils vérifier pour que l'équation :

$$az^2 + bz + a = 0$$

admette deux solutions complexes conjuguées ?

Dans ce cas, calculer le module de ces solutions ?

$az^2 + bz + a = 0$ Avec $a \neq 0,$ sinon $z = 0$

$\rightarrow \quad z^2 + \dfrac{b}{a} z + 1 = 0$

Cette équation admettera deux racines complexes conjuguées si :

$\Delta = b^2 - 4a^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad (b-2a)(b+2a) < 0 \quad$ ou $\quad \boxed{-2|a| < b < 2|a|}$

Soient $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$, on a : $(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2 = |z_1|^2 = |z_2|^2$

Or le produit des racines est aussi égal au terme indépendant de l'équation

$\rightarrow \boxed{|z_1| = |z_2| = 1}$

Modifié le 30 septembre 2012 (Bruno Dethier)

EXALG087 – Bruxelles, juillet 2002.

Résoudre dans **R³**, en discutant par rapport au paramètre réel *a*, le système

$$\begin{cases} ax + 3y + 3z = a \\ x + az = a \\ 2x + ay = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 3 & 3 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix} = -a(a+3)(a-3) \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} a & 3 & 3 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = -a^2(a-3)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & a & 3 \\ 1 & a & a \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2a(a-3) \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a & 3 & a \\ 1 & 0 & a \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix} = -a(a+2)(a-3)$$

<u>Discussion</u>

1) $a = 0 \rightarrow \begin{cases} 3y + 3z = 0 \\ x = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$

2) $a = 3 \rightarrow \begin{cases} 3x + 3y + 3z = 3 \\ x + 3z = 3 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{3-x}{3} \\ y = -\dfrac{2x}{3} \end{cases}$

3) $a = 3 \rightarrow \begin{cases} -3x + 3y + 3z = 3 \\ x - 3z = 3 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \rightarrow$ Système impossible

4) Dans les autres cas : $\begin{cases} x = \dfrac{a}{a+3} \\ y = -\dfrac{2}{a+3} \\ z = \dfrac{a+2}{a+3} \end{cases}$

EXALG088 – Bruxelles, septembre 2002.

Résoudre dans **C** et discuter en fonction des paramètres réels a et b

$$a^2z^2+(iz+b)^2=0$$

$$a^2z^2+(iz+b)^2=0 \rightarrow \quad a^2z^2-z^2+2ibz+b^2=0$$
$$(a^2-1)z^2+2ibz+b^2=0$$
$$\Delta'=-b^2-(a^2-1)b^2=-a^2b^2$$
$$z=\frac{-ib\pm abi}{(a+1)(a-1)}=\frac{-ib(1\pm a)}{(a+1)(a-1)}$$

1) $a=1$

L'équation devient : $z^2+(iz+b)^2=0 \rightarrow 2bi\ z=-b^2$

Si $b=0$ indéterminé

Si $b\neq 0$ 1 seule racine. $z=\frac{bi}{2}$

2) $a=-1$

L'équation devient : $z^2+(iz+b)^2=0 \rightarrow 2bi\ z=-b^2$

Si $b=0$ indéterminé

Si $b\neq 0$ 1 seule racine. $z=\frac{bi}{2}$

3) $b=0 \quad a\neq\pm 1$

L'équation devient : $a^2z^2-z^2=0 \rightarrow z_1=z_2=0$

4) Dans les autres cas :

$$z_1=\frac{bi}{1-a} \qquad z_2=\frac{bi}{1+a}$$

EXALG089 – Bruxelles, juillet 2002.

Décomposer

$$2a^3 + b^3 - 3ab$$

en facteurs polynomiaux du premier degré.

Le polynôme peut se mettre sous la forme :

$$(\alpha_1 a + \beta_1 b)(\alpha_2 a + \beta_2 b)(\alpha_3 a + \beta_3 b)$$

Ce qui donne le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 2 \\ \alpha_1\alpha_3\beta_2 + \alpha_2\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\alpha_2\beta_3 = -3 \\ \alpha_3\beta_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2\beta_3 + \alpha_2\beta_1\beta_3 = 0 \\ \beta_1\beta_2\beta_3 = 1 \end{cases}$$

Système de quatre équations à 6 inconnues.

Posons $\beta_1 = \beta_2 = 1 \ \rightarrow \ \beta_3 = 1$. Le système devient :

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 2 \\ \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 = -3 \\ \alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_2\alpha_3 = \dfrac{2}{\alpha_1} \\ \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_1\alpha_2 = -3 \\ \alpha_3 + \alpha_2 = -\alpha_1 \end{cases}$$

$$\rightarrow -\alpha_1^2 + \frac{2}{\alpha_1} = -3 \ \rightarrow \ \alpha_1^3 - 3\alpha_1 - 2 = 0$$

Ce polynôme est divisible par $\alpha_1 - 2$ $\left(\text{car } P(2) = 0\right)$

Horner : $\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & & -3 & -2 \\ \hline 2 & & 2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \ \rightarrow \ (\alpha_1 - 2)(\alpha_1 + 1)^2$

1) $\alpha_1 = 2$

$\begin{cases} \alpha_2\alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_2 = -3 \\ \alpha_3 + \alpha_2 = -2 \end{cases}$ Système simplement indéterminé dont une

solution est $\alpha_1 = 2; \ \ \alpha_2 = \alpha_3 = -1$

Le polynôme s'écrit donc : $\boxed{(2a+b)(a-b)^2}$

2) $\alpha_1 = -1$

$\begin{cases} \alpha_2\alpha_3 = -2 \\ -\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 - \alpha_2 = -3 \\ \alpha_3 + \alpha_2 = 1 \end{cases}$ Système simplement indéterminé dont une

solution est $\alpha_1 = \alpha_2 = -1; \ \ \alpha_3 = 2$

Le polynôme s'écrit donc : $\boxed{(2a+b)(a-b)^2}$ Solution identique.