

Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 0

EXALG001 – EXALG009

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG001 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1996.

Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{\sqrt{x^3(x-1)}}{x} \leq \frac{3}{8}$$

CE :

1) $x^3(x-1) \geq 0$

		0	1			
Tableau des signes :	x^3	-	0	+	+	+
	$x-1$	-	-	-	0	+
		+	0	-	0	+

2) $x > 0$

Conclusion : $x < 0$ et $x \geq 1$

Soit $x > 0 \rightarrow \frac{x^3(x-1)}{x^2} \leq \frac{9}{64} \rightarrow x^2 - x - \frac{9}{64} \leq 0$

dont les racines sont : $x = -\frac{1}{8}$ et $x = \frac{9}{8} \rightarrow 1 \leq x \leq \frac{9}{8}$

Soit $x < 0 \rightarrow$ L'inéquation est toujours vérifiée.

Solutions :

$$x < 0 \quad 1 \leq x \leq \frac{9}{8}$$

Résolu le 9 décembre 2004

EXALG002 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1996.

Discuter et résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 2a + 1 \\ ax - ay - 2z = 0 \\ ax + 2ay + a^2z = 4a^2 - 1 \end{cases}$$

où a est un paramètre réel.

Méthode du Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -a & -2 \\ a & 2a & a^2 \end{vmatrix} = -a(2a+1)(a-2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2a+1 & 1 & 1 \\ 0 & -a & -2 \\ (2a+1)(2a-1) & 2a & a^2 \end{vmatrix} = -(2a+1)(a-2)(a^2+1)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2a+1 & 1 \\ a & 0 & -2 \\ a & (2a+1)(2a-1) & a^2 \end{vmatrix} = -(2a+1)(a-2)(a-1)(a+1)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2a+1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2a & (2a+1)(2a-1) \end{vmatrix} = a(2a+1)(2-a)$$

Discussion

$$1) a = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 2z = 0 \\ -\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{4}z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2}z \\ y = \frac{3}{2}z \end{cases} \quad \text{Simple indétermination}$$

$$2) a = 0 \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2z = 0 \\ 0 = 1 \end{cases} \rightarrow \text{Système impossible}$$

$$3) a = 2 \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + 4y + 4z = 15 \end{cases} \rightarrow \text{Système impossible}$$

$$4) a \neq -\frac{1}{2}, 0, 2 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2 + 1}{a} \\ y = \frac{(a-1)(a+1)}{a} \\ z = 1 \end{cases}$$

Résolu le 9 décembre 2004. Modifié le 11 février 2005

EXALG003 – Polytech, Umons, Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre l'équation

$$x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0$$

sachant qu'elle admet i comme racine double

Soit $P(x)$ l'équation. Si i est racine double, $P(x)$ est divisible par $x^2 + 1$:

Effectuons la division on obtient :

$$P(x) = (x^2 + 1)(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2)$$

Soit $Q(x)$ le deuxième facteur. $Q(1) = 0$, donc $Q(x)$ est divisible par $x - 1$.

$$\begin{array}{r} 1 \quad -3 \quad 3 \quad -3 \quad 2 \\ \text{Horner : } 1 \quad \quad 1 \quad -2 \quad 1 \quad 2 \rightarrow Q(x) = (x-1)(x^3 - 2x^2 + x - 2) \\ \quad \quad 1 \quad -2 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \end{array}$$

Soit $T(x)$ le deuxième facteur de $Q(x)$. On a

$$T(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(x - 2) + (x - 2) = (x - 2)(x^2 + 1)$$

$$\rightarrow P(x) = (x^2 + 1)^2(x - 2)(x - 1)$$

Solutions : i et $-i$ racines doubles, 2 et 1 racines simples.

EXALG004 – Polytech, Umons, Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre

$$4x^3 - 24x^2 + 23x + 18,$$

sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

Soient a , $a+r$ et $a+2r$ les racines.

$$P(x) = (x-a)(x-a-r)(x-a-2r) = x^3 - 3(a+r)x^2 + (2a+r)(a+2r)x - a(a+r)(a+2r)$$

$$\begin{cases} -3(a+r) = -\frac{24}{4} \\ (2a+r)(a+2r) = \frac{23}{4} \rightarrow [2(2-r)+r](2-r+2r) = \frac{23}{4} \rightarrow 4r^2 + 8r - 5 = 0 \\ -a(a+r)(a+2r) = \frac{18}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow r_1 = -\frac{1}{2} < 0 \text{ à rejeter et } r_2 = 2.5 \rightarrow a = -0.5, a+r = 2, a+2r = 4.5$$

$$\text{Conclusion : } P(x) = 4(x+0.5)(x-2)(x-4.5)$$

Résolu le 9 décembre 2004

EXALG005 – Polytech, Umons, Mons, questions-types 2000-2001.

Si x_1, x_2 et x_3 sont les racines de l'équation

$$P(x) = x^3 - 5x + 1 = 0,$$

calculer

$$S(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0 \\ \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -5 \\ x_1x_2x_3 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Or } (x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$\rightarrow 0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 10 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 10}$$

Résolu le 9 décembre 2001. Corrigé le 11 octobre 2004.

EXALG006 – Polytech, Umons, Mons, questions-types 2000-2001.

Décomposer $x^5 - 1 = 0$ en un produit de 3 facteurs réels.

$P(x)$ est divisible par $x - 1$

$$\begin{array}{cccccc} & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ & & 1 & & & & -1 \\ \text{Horner :} & 1 & & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow P(x) = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

Soit $Q(x)$ le deuxième facteur:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2) \\ &= x^4 + (a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2 + a_1a_2)x^2 + (a_2b_1 + a_1b_2)x + b_1b_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ b_1 + b_2 + a_1a_2 = 1 \\ a_2b_1 + a_1b_2 = 1 \\ b_1b_2 = 1 \end{cases} \quad \text{Supposons } b_1 = 1 \rightarrow b_2 = 1 \rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_1a_2 = -1 \end{cases}$$

a_1 et a_2 sont solutions de l'équation : $y^2 - y - 1 = 0$

$$\rightarrow y_1 = a_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad y_2 = a_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow P(x) = (x-1) \left(x^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1 \right) \left(x^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x + 1 \right)$$

Résolu le 9 décembre 2004

**EXALG007 – Polytech, Umons, Mons, questions-types 2000-2001.
EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2009.
EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2018.**

Énoncé de Polytech

$Q_1(x)$ et c sont respectivement le quotient et le reste de la division du polynôme $P(x)$ par $x - a$.

$Q_2(x)$ et d sont respectivement le quotient et le reste de la division du polynôme $P(x)$ par $x - b$.

On demande :

Quel est le reste R de la division de $P(x)$ par $(x - a)(x - b)$.

Si $Q_3(x)$ est le quotient de cette division, déterminer $Q_1(x)$ en fonction de $Q_3(x)$.

Énoncé de EPB (2009)

Soit P un polynôme en la variable réelle x , à coefficients réels. Si a et b sont deux réels distincts, déterminer le reste de la division de P par $(x - a)(x - b)$, sachant que le reste de la division de P par $x - a$ vaut 1 et que le reste de la division de ce même polynôme P par $x - b$ vaut -1 .

Énoncé de EPB (2018)

On considère un polynôme $P(x)$ tel que sa division par $(x - 1)$ donne pour reste -30 et que sa division par $(x - 2)$ donne pour reste -54 .

a) Déterminez le reste de sa division par $x^2 - 3x + 2$.

b) Déterminez le polynôme $P(x)$ sachant qu'il est du quatrième degré et qu'il est divisible par $x(x^2 + 5)$

Enoncé de Polytech

On a donc : $P(x) = (x-a)Q_1(x) + c$ et $P(x) = (x-b)Q_2(x) + d$

et également : $P(x) = (x-a)(x-b)Q_3(x) + R(x)$ avec $R(x) = R_1x + R_0$

$$\text{On en tire } \begin{cases} P(a) = R(a) = c = R_1a + R_0 \\ P(b) = R(b) = d = R_1b + R_0 \end{cases} \Rightarrow c - d = (a-b)R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{c-d}{a-b}$$

$$\Rightarrow c = \frac{c-d}{a-b}a + R_0 \Rightarrow R_0 = \frac{c(a-b) - (c-d)a}{a-b} = \frac{ad-bc}{a-b}$$

$$\Rightarrow \boxed{R(x) = \frac{c-d}{a-b}x + \frac{ad-bc}{a-b}}$$

$$P(x) = (x-a)Q_1(x) + c$$

$$P(x) = (x-a)(x-b)Q_3(x) + \frac{c-d}{a-b}x + \frac{ad-bc}{a-b}$$

$$\Rightarrow (x-a)Q_1(x) + c = (x-a)(x-b)Q_3(x) + \frac{c-d}{a-b}x + \frac{ad-bc}{a-b}$$

$$\Rightarrow Q_1(x) = (x-b)Q_3(x) + \frac{1}{x-a} \left(\frac{c-d}{a-b}x + \frac{ad-bc}{a-b} - c \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_1(x) = (x-b)Q_3(x) + \frac{c-d}{a-b}}$$

Enoncé de EPB (2009)

Il suffit de remplacer : $c = 1$ et $d = -1$. Ce qui donne :

$$\boxed{R(x) = \frac{2}{a-b}x - \frac{a+b}{a-b}}$$

Enoncé de EPB (2018)

a) On remplace $a = 1, b = 2, c = -30, d = -54$. Ce qui donne $\boxed{R(x) = -24x - 6}$.

b) Soit $T(x)$ le polynôme cherché. On a

$$T(x) = x(x^2 + 5)(ax + b) \Rightarrow \begin{cases} T(1) = 6(a+b) = -30 \\ T(2) = 18(2a+b) = -54 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = -5 \\ 2a+b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(x) = x(x^2 + 5)(2x - 7) = 2x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 35x}$$

Résolu le 9 décembre 2004. Modifié le 22 juin 2010. Modifié le 21 septembre 2018.

EXALG008 – Polytech, Umons, Mons, questions-types 2000-2001.

Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme $P(x)$ soit divisible par $(x-a)^2$ est que $P(a) = P'(a) = 0$ où $P'(x)$ désigne la dérivée de $P(x)$.

La condition est nécessaire puisque si $P(x)$ est divisible par $(x-a)^2$:

$$P(x) = (x-a)^2 R(x) \rightarrow P'(x) = 2(x-a)R(x) + (x-a)^2 R'(x)$$

On vérifie immédiatement que $P(a) = P'(a) = 0$

La condition est suffisante puisque si $P(a) = P'(a) = 0$, alors :

$$P(x) = (x-a)Q(x) \text{ car } P(a) = 0$$

$$P'(x) = Q(x) + (x-a)Q'(x) \rightarrow P'(a) = Q(a) = 0 \rightarrow Q(a) = 0$$

Donc $Q(x)$ est divisible par $(x-a)$. Dès lors : $Q(x) = (x-a)R(x)$

et $P(x) = (x-a)^2 R(x)$ c'est-à-dire que $P(x)$ est divisible par $(x-a)^2$

Résolu le 9 décembre 2001. Corrigé le 11 octobre 2004

EXALG009 – Polytech, Umons, Mons, questions-types 2000-2001.

a) Déterminer les paramètres a et b du polynôme suivant :

$$P(x) = x^3 + (a+b+2)x^2 + (ab+2a+2b)x + 2ab$$

de telle façon que le reste de la division par $(x-2)$ soit égal à 5, et que le reste de la division par $(x+1)$ soit égal à $5/4$

b) En exploitant ces seules données (sans effectuer la division), déterminer quel sera le reste de la division de $P(x)$ par $(x-2)(x+1)$

$$a) \quad P(x) = x^3 + (a+b+2)x^2 + (ab+2a+2b)x + 2ab$$

$$P(2) = 8 + 4(a+b+2) + 2(ab+2a+2b) + 2ab = 5 \quad \rightarrow \quad 4ab + 8a + 8b = -11$$

$$P(-1) = -1 + a + b + 2 - ab - 2a - 2b + 2ab = \frac{5}{4} \quad \rightarrow \quad ab - a - b = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} 4ab + 8a + 8b = -11 \\ ab - a - b = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} ab + 2a + 2b = -\frac{11}{4} \\ ab - a - b = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \rightarrow \quad -3a - 3b = -3$$

$$\rightarrow \quad b = -(a+1)$$

Remplaçons dans une des équations :

$$-a(a+1) - a + a + 1 = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad a^2 + a - \frac{3}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = -\frac{3}{2} \rightarrow b_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = \frac{1}{2} \rightarrow b_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$P(x)$ étant symétrique en a et b , il n'y a qu'une seule solution.

$$B) \quad R(x) = R_1x + R_0 \quad R(2) = R_1 \cdot 2 + R_0 = 5 \quad R(-1) = -R_1 + R_0 = \frac{5}{4}$$

$$\rightarrow \quad R_1 = \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad R_0 = \frac{5}{2}$$

$$\rightarrow \quad R(x) = \frac{5}{4}x + \frac{5}{2}$$
