

Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 1

EXALG010 – EXALG019

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

1 avril 03

EXALG010W

Soit un rectangle isocèle ABC, dont l'hypoténuse BC vaut 2a.
Déterminer un point M sur cette hypoténuse tel que :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = k(\overline{MA}^2 + \overline{MC}^2)$$

Discuter, k étant positif.

$$ABC \triangle \text{ isocèle rectangle} \rightarrow \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \quad 2\overline{AB}^2 = 4a^2 \quad \overline{AB} = \overline{AC} = a\sqrt{2}$$

M peut varier de B en C. Point remarquable de BC = O milieu de BC

$$1) M \text{ en } B \quad \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = k(\overline{MA}^2 + \overline{MC}^2) \rightarrow 2a^2 = k(2a^2 + 4a^2) \rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$2) M \text{ en } O \quad \overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = a \rightarrow a^2 + a^2 = k(a^2 + a^2) \rightarrow k = 1$$

$$3) M \text{ en } C \quad 2a^2 + 4a^2 = 2ka^2 \rightarrow k = 3$$

Solutions

$$M \text{ en } B \quad k = 1/3$$

$$M \text{ entre } B \text{ et } O \quad 1/3 < k < 1$$

$$M \text{ en } O \quad k = 1$$

$$M \text{ entre } O \text{ et } C \quad 1 < k < 3$$

$$M \text{ en } C \quad k = 3$$

EXALG011 - Complément.

Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x - 3y + 2z - t + u = -13 \\ -2x + y + 3z - u = -1 \\ y - 2z + t = 0 \\ x - 2t + 3u = -13 \\ 3x - 2y + z - t + 4u = -14 \end{cases}$$

Nous allons utiliser la méthode de Gauss (élimination des variables par combinaisons successives). Nous allons utiliser un tableau ce qui plus est simple que d'écrire des matrices.

- La première colonne indique l'opération faite sur les lignes.
- La deuxième colonne est le numéro de la ligne.
- Les 5 colonnes suivantes représentent les coefficients des inconnues
- La huitième colonne reprend le terme indépendant.
- La dernière colonne donne la somme des colonnes 3 à 7. C'est une valeur de contrôle qui se révèle très efficace et même indispensable lorsque les systèmes deviennent importants (plus de 3 inconnues). On effectue sur la colonne de contrôle les mêmes opérations que sur les lignes. La dernière colonne doit toujours rester égale à la somme des colonnes de 3 à 7. Il est curieux de constater que cette astuce n'est pratiquement jamais enseignée, et se trouve rarement mentionnée dans les livres.

Opération	N	x	y	z	t	u		Σ
	1	1	-3	2	-1	1	-13	-13
	2	-2	1	3	0	-1	-1	0
	3	0	1	-2	1	0	8	8
	4	1	0	0	-2	3	-13	11
	5	3	-2	1	-1	4	-14	-9
(1)	6	1	-3	2	-1	1	-13	-13
(2)+2(1)	7	0	-5	7	-2	1	-27	-26
(3)	8	0	1	-2	1	0	8	8
(4)-(1)	9	0	3	-2	-1	2	0	2
(5)-3(1)	10	0	7	-5	2	1	25	30
(6)+3(8)	11	1	0	-4	2	1	11	11
(8)	12	0	1	-2	1	0	8	8
(7)+5(8)	13	0	0	-3	3	1	13	14
(9)-3(8)	14	0	0	4	-4	2	-24	-22
(10)-7(8)	15	0	0	9	-5	1	-31	-26
(11)+4(18)	16	1	0	0	-2	3	-13	-11
(12)+2(18)	17	0	1	0	-1	1	-4	3
(18)/4	18	0	0	1	-1	1/2	-6	-11/2
(13)+3(18)	19	0	0	0	0	5/2	-5	-5/2
(15)-9(18)	20	0	0	0	4	-7/2	23	47/2
(16)+2(24)	21	1	0	0	0	5/4	-3/2	3/4
(17)+(24)	22	0	1	0	0	1/8	7/4	23/8
(18)+(24)	23	0	0	1	0	-3/8	-1/4	3/8
(20)/4	24	0	0	0	1	-7/8	23/4	47/8
5/2.(19)	25	0	0	0	0	1	-2	-1
(21)-5/4.(25)	26	1	0	0	0	0	1	2
(22)-1/8.(25)	27	0	1	0	0	0	2	3
(23)+3/8.(25)	28	0	0	1	0	0	-1	0
(24)+7/8.(25)	29	0	0	0	1	0	4	5
(25)	30	0	0	0	0	1	-2	-1

$$\Rightarrow S = \{(1, 2, -1, 4, -2)\}$$

EXALG012 – Liège, juillet 1999.

Discuter et résoudre le système :

$$\begin{cases} ax + a^2 y + a^3 z = 2 \\ ax - y + 4az = a \\ x + ay + 2az = 1 \end{cases}$$

a étant un paramètre réel.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ a & -1 & 4a \\ 1 & a & 2a \end{vmatrix} = a^2(a-2)(a^2+1)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & a^2 & a^3 \\ a & -1 & 4a \\ 1 & a & 2a \end{vmatrix} = a(a^3+5a+2)(a-2)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 2 & a^3 \\ a & a & 4a \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix} = 2a(a-2)^2$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & a^2 & 2 \\ a & -1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -(a-2)(a^2+1)$$

si $a = 2$, le système devient

$$\begin{cases} 2x + 4y + 8z = 2 \\ 2x - y + 8z = 2 \\ x + 2y + 4z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 4z \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{simple indétermination}$$

si $a = 0$, le système devient

$$\begin{cases} 0 = 2 \\ -y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{système impossible}$$

Dans les autres cas :

$$\begin{cases} x = \frac{a^3 + 5a + 2}{a(a^2 + 1)} \\ y = \frac{2(a - 2)}{a(a^2 + 1)} \\ z = -\frac{1}{a^2} \end{cases}$$

EXALG013 – Liège, juillet 1996.

Discuter et résoudre le système :

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ a^3x + a^2y + az = 1 \\ x + 2ay + 3a^2z = 4a^3 \end{cases}$$

a étant un paramètre réel.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^3 & a^2 & a \\ 1 & 2a & 3a^2 \end{vmatrix} = -a^2(a+1)^2(a-1)^2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 4a^3 & 2a & 3a^2 \end{vmatrix} = -a^3(a-1)^2(a+1)^2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ a^3 & 1 & a \\ 1 & 4a^3 & 3a^2 \end{vmatrix} = a^2(a-1)^2(a+1)^2(a^2+2)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ a^3 & a^2 & 1 \\ 1 & 2a & 4a^3 \end{vmatrix} = -a(a-1)^2(a+1)^2(2a^2+1)$$

$$\text{Si } a = 0, \text{ le système devient : } \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \text{système impossible}$$

$$\text{Si } a = 1, \text{ le système devient : } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = z - 2 \\ y = -2z + 3 \end{cases} \text{ simple indétermination}$$

$$\text{si } a = -1, \rightarrow \begin{cases} x - y + z = -1 \\ -x + y - z = 1 \\ x - 2y + 3z = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + z \\ y = 3 + 2z \end{cases} \text{ simple indétermination}$$

$$\text{Dans les autres cas : } \begin{cases} x = a \\ y = -(a^2 + 2) \\ z = \frac{2a^2 + 1}{a} \end{cases}$$

EXALG014 – Liège, juillet 1997.

Discuter et résoudre le système :

$$\begin{cases} x + by + bz = a^2 \\ ax + cy + dz = ab \\ x + y + z = b \end{cases}$$

a, b, c et d étant des paramètres réels.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & b \\ a & c & d \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(d-c)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a^2 & b & b \\ ab & c & d \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(d-c)(a-b)(a+b)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & a^2 & b \\ a & ab & d \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = a(b-a)(a-d)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & a^2 \\ a & c & ab \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = a(b-a)(c-a)$$

Si $b = a$, $d \neq c$:

$$\begin{cases} ax + ay + az = a^2 \\ ax + cy + dz = a^2 \\ x + y + z = a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{d-a}{d-c}(a-x) \\ z = \frac{a-c}{d-c}(a-x) \end{cases} \quad \text{simple indétermination}$$

Si $b = a$, et $d = c$:

$$\begin{cases} ax + ay + az = a^2 \\ ax + cy + cz = a^2 \\ x + y + z = a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} cy + cz = a(a-x) \\ y + z = a-x \end{cases}$$

uniquement possible si $a = b = c = d$, sinon impossible

$$\rightarrow \begin{cases} ax + ay + az = a^2 \\ ax + ay + az = a^2 \\ x + y + z = a \end{cases} \rightarrow \text{double indétermination}$$

Si $d = c$, $a \neq b$

$$\begin{cases} ax + by + bz = a^2 \\ ax + cy + cz = ab \\ x + y + z = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b(y+z) = a(a-x) \\ c(y+z) = a(b-x) \\ y+z = b-x \end{cases} \quad \begin{cases} b(b-x) = a(a-x) \\ c(b-x) = a(b-x) \end{cases}$$

uniquement possible si $a = c = d$. Dans ce cas :

$$\begin{cases} b(b-x) = a(a-x) \\ a(b-x) = a(b-x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = a+b \\ y = -a-z \end{cases} \quad \text{simple indétermination.}$$

Dans les autres cas :

$$\begin{cases} x = a+b \\ y = a(a-d) \\ z = \frac{a(c-a)}{d-c} \end{cases}$$

EXALG015 – Liège, septembre 1999.

Discuter et résoudre le système :

$$\begin{cases} ax + ay + z = 6 \\ x - y + az = 2a \\ (a+1)x + 2ay + (a+1)z = 12 \end{cases}$$

a étant un paramètre réel.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & -1 & a \\ a+1 & 2a & a+1 \end{vmatrix} = -(a-1)(a+1)^2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & a & 1 \\ 2a & -1 & a \\ 12 & 2a & a+1 \end{vmatrix} = -2(a-1)(3+a^2)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 6 & 1 \\ 1 & 2a & a \\ a+1 & 12 & a+1 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a+1)(a-3)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & a & 6 \\ 1 & -1 & 2a \\ a+1 & 2a & 12 \end{vmatrix} = -2(a-1)(a^2+3)$$

Si $a = 1$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + 2y + 2z = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 4 - x \end{cases} \text{ Simple indétermination}$$

Si $a = -1$

$$\begin{cases} -x - y + z = 6 \\ x + y - z = -2 \\ -2y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = -6 \end{cases} \text{ Impossible}$$

Dans les autres cas :

$$\begin{cases} x = \frac{2(a^2 + 3)}{(a + 1)^2} \\ y = -\frac{2(a - 3)}{a + 1} \\ z = \frac{2(a^2 + 3)}{(a + 1)^2} \end{cases}$$

EXALG016 – Liège, septembre 1998.

Discuter et résoudre le système :

$$\begin{cases} 2ax + (2a+1)y + (2a^2+a)z = -3a^2 \\ x + (1-a)y + (2-2a)z = 0 \\ x + ay + 2az = 1 \end{cases}$$

a étant un paramètre réel.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a & 2a+1 & 2a^2+a \\ 1 & 1-a & 2-2a \\ 1 & a & 2a \end{vmatrix} = (a-2)(2a+1)(2a-1)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3a^2 & 2a+1 & 2a^2+a \\ 0 & 1-a & 2-2a \\ 1 & a & 2a \end{vmatrix} = (a-1)(a-2)(2a+1)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2a & -3a^2 & 2a^2+a \\ 1 & 0 & 2-2a \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix} = 3a(2a-1)(2+1)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2a & 2a+1 & -3a^2 \\ 1 & 1-a & 0 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -(2a+1)(3a^2-2a+1)$$

$$\text{Si } a = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} -x = -\frac{3}{4} \\ x + \frac{3}{2}y + 3z = 0 \\ x - \frac{1}{2}y - z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{1}{2} - 2z \end{cases} \quad \text{Simple indétermination}$$

$$\text{Si } a = 2$$

$$\begin{cases} 4x + 5y + 10z = -12 \\ x - y - 2z = 0 \\ x + 2y + 4z = 1 \end{cases} \quad \text{or } \Delta_y \neq 0 \quad \text{Impossible}$$

$$\text{Si } a = \frac{1}{2} \rightarrow \Delta_x \neq 0 \rightarrow \text{Impossible}$$

$$\text{Dans les autres cas : } \begin{cases} x = \frac{a-1}{2a-1} \\ y = -\frac{3a}{a-2} \\ z = -\frac{3a^2-2a+1}{(a-2)(2a-1)} \end{cases}$$

EXALG017 – Liège, septembre 2000.

Discuter et résoudre le système :

$$\begin{cases} ax + a^2y = a^3 \\ b^3x + b^2y = b \\ x + y = a \end{cases}$$

a et b étant des paramètres réels.

$$\begin{cases} ax + a^2y + a^3 \\ b^3x + b^2y = b \\ x + y = a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax + a^2(a-x) = a^3 \\ b^3 + b^2(a-x) = b \\ y = a-x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(1-a)x = 0 \\ b^2(b-1)x = b(1-ab) \\ y = a-x \end{cases}$$

1) $a = 0$

Le système devient : $\begin{cases} b^3x + b^2y = b \\ y = -x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^2(b-1)x = b \\ y = -x \end{cases}$

* Si $b = 0 \rightarrow y = -x$ Simple indétermination

* Si $b = 1 \rightarrow \begin{cases} 0x = 1 \\ y = -x \end{cases}$ Système impossible

* Si $b \neq 0$ et $b \neq 1 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{b(b-1)} \\ y = -\frac{1}{b(b-1)} \end{cases}$

2) $a = 1$

Le système devient : $\begin{cases} b^2(b-1)x = b(1-b) \\ y = 1-x \end{cases}$

* Si $b = 0 \rightarrow \begin{cases} 0x = 0 \\ y = 1-x \end{cases} \rightarrow y = 1-x$ Simple indétermination

* Si $b = 1 \rightarrow \begin{cases} 0x = 0 \\ y = 1-x \end{cases} \rightarrow y = 1-x$ Simple indétermination

* Si $b \neq 0$ et $b \neq 1 \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{b} \\ y = 1 + \frac{1}{b} \end{cases}$

3) $a \neq 0$ et $a \neq 1$

Le système devient :
$$\begin{cases} x = 0 \\ b^2(b-1)x = b(1-ab) \\ y = a \end{cases}$$

* Si $b = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = a \end{cases}$

* Si $b = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ y = a \end{cases} \rightarrow \text{Système impossible}$

* Si $b \neq 0$ et $b \neq 1 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1-ab}{b(b-1)} \\ y = a \end{cases}$

- Ce système n'est possible que si $1-ab = 0$, soit $ab = 1$

Modifié le 13 août 2016

EXALG018 – Liège, juillet 1996.

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 - 2y = 0 \\ x^3 + 2y^2 = 0 \end{cases}$$

Additionnons les deux équations : $x^2 + x^3 - 2y = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}x^2(x+1)$

Remplaçons dans la première équation :

$$x^2 - \frac{1}{2}x^2(x+1)^2 - x^2(x+1) = x^2 \left(1 - \frac{1}{2}x^2(x+1)^2 - x - 1 \right) = -x^3 \left(\frac{1}{2}x(x+1)^2 + 1 \right) = 0$$

1) $x = 0 \rightarrow y = 0$

2) $\frac{1}{2}x(x+1)^2 + 1 = 0 \rightarrow x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$

Horner
$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 2 & 1 & 2 & \\ -2 & & -2 & 0 & -2 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array} \rightarrow (x+2)(x^2+1) = 0$$

$\rightarrow x = -2 \rightarrow y = -2$

Résolu le 19 mars 2003

EXALG019 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre, discuter et interpréter graphiquement en fonction de la valeur des paramètres a et b .

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = b(a-1)^2(a+2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = b(a-1)(a-b)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(ab+b-2)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = b(a-1)(a-b)$$

$$\text{Si } a = 1 \rightarrow \begin{cases} x + by + z = 1 \\ x + by + z = b \\ x + by + z = 1 \end{cases}$$

si $b \neq 1$ impossible

si $b = 1$ Double indétermination (les trois plans sont confondus).

$$\text{Si } a = -2 \rightarrow \begin{cases} -2x + by + z = 1 \\ x - 2by + z = b \\ x + by - 2z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 3by = b - 1 \\ 3x - 3by = -3 \end{cases}$$

si $b \neq -2$ impossible

$$\text{si } b = -2 \rightarrow \begin{cases} -2x - 2y + z = 1 \\ x + 4y + z = -2 \\ x - 2y - 2z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}(x+1) \\ z = x \end{cases}$$

Simple indétermination. C'est une droite.

$$\text{Si } b = 0 \rightarrow \begin{cases} ax + z = 1 \\ x + z = 0 \text{ donc } z = -x \\ x + az = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax - x = 1 \\ x - ax = 1 \end{cases} \rightarrow 0 = 2 \text{ Impossible.}$$

$$\text{Dans les autres cas : } \begin{cases} x = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)} \\ y = \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)} \\ z = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)} \end{cases} \text{ C'est un point.}$$

Résolu le 19 mars 2003. Modifié le 21 novembre 07 (Benoit Baudelet)