

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Algèbre

## ALG 12

**EXALG120 – EXALG129**

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Juillet 08

## EXALG120 – Liège , septembre 2002.

Résoudre l'inéquation

$$\frac{3}{x-1} \leq \sqrt{x+3} \quad (x \in \mathbb{R})$$

CE :  $x \neq 1$  et  $x^3 - 3$

1)  $x < 1$  Toujours vérifié  $\rightarrow -3 \leq x < 1$

2)  $x > 1$  L'équation devient :

$$\left(\frac{3}{x-1}\right)^2 \leq x+3 \rightarrow x^3 + x^2 - 5x - 6 \geq 0$$

Ce trinôme est divisible par  $x+2$  ( $-2$  est un diviseur de  $-6$ )

Appliquons Horner :

	3	2	1	0
	1	1	-5	-6
-2		-2	2	6
	1	-1	-3	0

$$\rightarrow (x+2)(x^2 - x - 3) \geq 0 \rightarrow (x+2)\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \geq 0$$

Étudions le tableau de signes

	-2	-1.302	1	2.303
$x+2$	-	0	+	+
$x^2 - x - 3$	+	+	0	-
	-	0	+	+

On ne s'intéresse qu'aux valeurs supérieures à 1.

On en déduit :  $x \geq 2.303$

Conclusion :  $\boxed{-3 \leq x < 1 ; x \geq \frac{1+\sqrt{13}}{2}}$

## EXALG121 – Liège , juillet 2003.

Résoudre l'équation (en nombres complexes)

$$(2z^2 - 1)^3 = (z^2 + 1)^3$$

On voit immédiatement que l'équation suivante admet des solutions communes à l'équation proposée :  $2z^2 - 1 = z^2 + 1 \rightarrow z = \pm\sqrt{2}$  (1)

Développons l'équation proposée et posons :  $z^2 = t$ . On obtient :

$$7t^3 - 15t^2 + 3t - 2 = 0$$

Vu (1), on sait que cette équation est divisible par  $x - 2$

$$\rightarrow 2 \begin{array}{c|cccc} & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline & 7 & -15 & 3 & -2 \\ & & 14 & -2 & 2 \\ \hline & 7 & -1 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow (t-2)(7t^2 - t + 1) = 0$$

$$\rightarrow (t-2) \left( t - \frac{1+3\sqrt{3}i}{14} \right) \left( t - \frac{1-3\sqrt{3}i}{14} \right) = 0$$

Il reste à calculer

$$1) z^2 = \frac{1+3\sqrt{3}i}{14} = \frac{1}{14} + \frac{3\sqrt{3}i}{14}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{1}{14} \\ 2ab = \frac{3\sqrt{3}}{14} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{\sqrt{7}}{7} \\ a^2 b^2 = \frac{3^3}{2^4 7^2} \end{cases} \rightarrow X^2 - \frac{\sqrt{7}}{7} X + \frac{3^3}{2^4 7^2} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{2\sqrt{7}+1}{28} \\ b^2 = \frac{2\sqrt{7}-1}{28} \end{cases}$$

Compte tenu que les racines doivent avoir même signe :

$$\rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{7}+1}{7}} \\ b = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{7}-1}{7}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{7}+1}{7}} \\ b = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{7}-1}{7}} \end{cases}$$

$$2) z^2 = \frac{1-3\sqrt{3}i}{14} = \frac{1}{14} - \frac{3\sqrt{3}i}{14}$$

$$\text{On trouvera : } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{7}+1}{7}} \\ b = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{7}-1}{7}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{7}+1}{7}} \\ b = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{7}-1}{7}} \end{cases}$$

Conclusion :

$$z_1 = \sqrt{2}$$

$$z_2 = -\sqrt{2}$$

$$z_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{7}+1}{7}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{7}-1}{7}} i = 0.4740 + 0.3914i$$

$$z_4 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{7}+1}{7}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{7}-1}{7}} i = -0.4740 - 0.3914i$$

$$z_5 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{7}+1}{7}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{7}-1}{7}} i = -0.4740 + 0.3914i$$

$$z_6 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{7}+1}{7}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{7}-1}{7}} i = 0.4740 - 0.3914i$$

## EXALG122 – Liège , juillet 2003.

Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel  $a$  est un paramètre réel :

$$\begin{cases} ax + (a+1)y + (a-1)z = 2a+3 \\ x + (1+a)y + (1-a)z = 4a+1 \\ (a+1)x + 2(a+1)y + \phantom{(1-a)z} = 6a+4 \end{cases}$$

Une des équations est combinaison linéaire des deux autres.

On vérifie que la première plus la deuxième est égale à la troisième.

Le système peut donc se ramener à

$$\begin{cases} ax + (a+1)y + (a-1)z = 2a+3 \\ (a+1)x + 2(a+1)y = 6a+4 \end{cases}$$
$$\rightarrow \begin{cases} ax + (a+1)y = 2a+3 - (a-1)z \\ (a+1)x + 2(a+1)y = 6a+4 \end{cases}$$

Le  $\Delta$  de ce système vaut :  $(a+1)(a-1)$

1)  $a = 1$  Le système devient :  $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ z \text{ indéterminé} \end{cases}$

2)  $a = -1$  Le système devient :  $\begin{cases} -x = 1 + 2z \\ 0 = -2 \end{cases}$  impossible

3) Autres cas

La résolution donne :  $\begin{cases} x = -2(1+z) \\ y = \frac{3a+2}{a+1} + 1 + z \end{cases}$

## EXALG123 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2003.

Résoudre l'inéquation suivante dans  $\mathbb{R}$

$$\frac{x-2}{x+2} \geq -2 + \sqrt{-x}$$

CE :  $x \leq 0$  et  $x \neq -2$

$$\frac{x-2}{x+2} \geq -2 + \sqrt{-x} \rightarrow \frac{x-2}{x+2} + 2 \geq \sqrt{-x} \rightarrow \frac{3x+2}{x+2} \geq \sqrt{-x} \quad (1)$$

Cette dernière relation, nous permet de déterminer des conditions supplémentaires sur  $x$ . En effet, l'élévation au carré qui va suivre va introduire des solutions parasites.

$$\text{Comme } \sqrt{-x} \geq 0 \rightarrow \frac{3x+2}{x+2} \geq 0 \rightarrow x \in ]-\infty, -2[ \cup \left[-\frac{2}{3}, +\infty[ \quad (2)$$

$$\text{Elevons (1) au carré} \rightarrow (3x+2)^2 \geq -x(x+2)^2 \rightarrow x^3 + 13x^2 + 16x + 4 \geq 0$$

Ce polynôme est divisible par  $x+1$

	3	2	1	0	$\rightarrow (x+1)(x^2 + 12x + 4) \geq 0$
	1	13	16	4	
-1		-1	-12	-4	
	1	12	4	0	

$$\rightarrow (x+1)(x+6+4\sqrt{2})(x+6-4\sqrt{2}) \geq 0$$

Tableau de signes

		-11.65	-2	-1	-0.343	0
$x+1$	-	-	-	-	0	+
$x^2 + 12x + 4$	+	0	-	-	-	0
	-	0	+	∴	+	0

Conclusion : En tenant compte de (2)

$$x \in \left\{ [-6-4\sqrt{2}, -2[ \cup [-6+4\sqrt{2}, 0] \right\}$$

## EXALG124 – Liège , septembre 2003.

Résoudre l'équation (en nombres complexes)

$$z^8 + 4z^6 - 10z^4 + 4z^2 + 1 = 0$$

*Suggestion* : développer  $(z^2 + 1)^4$

---

On observe que :  $(z^2 + 1)^4 = z^8 + 4z^6 + 6z^4 + 4z^2 + 1$

Donc l'équation proposée peut s'écrire :  $(z^2 + 1)^4 = 16z^4$

→ l'équation suivante admet une solution commune avec l'équation proposée :

$$z^2 + 1 = 2z \rightarrow (z-1)^2 = 0 \rightarrow z = 1 \text{ (2 fois)}$$

Appliquons deux fois de suite Horner :

	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	1		4		-10		4		1
1		1	1	5	5	-5	-5	-1	-1
	1	1	5	5	-5	-5	-1	-1	0
-1		-1	0	-5	0	5	0	1	
	1	0	5	0	-5	0	-1	0	

$$\rightarrow (z-1)(z+1)(z^6 + 5z^4 - 5z^2 - 1) = 0 \rightarrow (z-1)(z+1)[(z^6 - 1) + 5z^2(z^2 - 1)] = 0$$

$$\rightarrow (z-1)(z+1)(z^2 - 1)(z^4 + z^2 + 1 + 5z^2) = 0 \rightarrow (z-1)^2 (z+1)^2 (z^4 + 6z^2 + 1) = 0$$

Résolvons le dernier facteur :

$$z^4 + 6z^2 + 1 = 0 \rightarrow (z^2 + 1)^2 = -4z^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} z^2 + 1 = 2iz \rightarrow z^2 - 2iz + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} z = (1 + \sqrt{2})i \\ z = (1 - \sqrt{2})i \end{cases} \\ z^2 + 1 = -2iz \rightarrow z^2 + 2iz + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} z = -(1 + \sqrt{2})i \\ z = -(1 - \sqrt{2})i \end{cases} \end{cases}$$

### Conclusion

$$z_1 = 1 \quad z_5 = (1 + \sqrt{2})i$$

$$z_2 = 1 \quad z_6 = (1 - \sqrt{2})i$$

$$z_3 = -1 \quad z_7 = -(1 + \sqrt{2})i$$

$$z_4 = -1 \quad z_8 = -(1 - \sqrt{2})i$$

Résolu le 1 mars 2004. Modifié le 16 août 04



## EXALG125 – Liège , septembre 2003.

Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel  $a$  est un paramètre réel :

$$\begin{cases} ax + a^2y + a^3z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ a^3x + a^2y + az = 0 \end{cases}$$

C'est un système homogène qui admet comme solution  $x = y = z = 0$

Etudions les autres possibilités.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^3 & a^2 & a \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 - 1 & 0 & 1 - a^2 \end{vmatrix} \\ &= a^2 (a^2 - 1) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = a^2 (a^2 - 1) \begin{vmatrix} 0 & a & a^2 + 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 (a+1)(a-1)^3 \end{aligned}$$

$a = 0$

Le système devient :  $x = -y - z$  Double indétermination

$a = 1$

Le système se ramène à :  $x = -y - z$  Double indétermination

$a = -1$

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases} \quad \text{Simple indétermination}$$

Autres cas :  $x = y = z = 0$

## EXALG126 – Liège , septembre 2003.

Déterminer l'ensemble des valeurs (réelles) de  $a$  pour lesquelles l'énoncé :

*" Pour tout réel  $x$  tel que  $|x| < \frac{1}{2}$ , on a  $ax^2 + (a+1)x + 1 \geq 0$ "*

est vrai.

---

Calculons les racines du trinôme :

$$ax^2 + (a+1)x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{a} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$a > 0$

Pour que la proposition soit vraie, il faut que l'intervalle  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  soit à l'extérieur des racines

Si  $0 < a < 1 \rightarrow -\frac{1}{a} \leq -1 < -\frac{1}{2}$  la proposition est toujours vraie (Voir figure 1)

Si  $1 < a \rightarrow -1 < -\frac{1}{a}$ . Il faut donc  $:-\frac{1}{a} \leq -\frac{1}{2} \rightarrow 0 < a \leq 2$  (Voir figure 2)

Autrement dit : si  $a > 0$ , il faut  $0 < a \leq 2$

$a < 0$

Pour que la proposition soit vraie, il faut que l'intervalle  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  soit à l'intérieur des racines

Si  $-1 < a < 0 \rightarrow \frac{1}{2} < 1 < -\frac{1}{a}$  la proposition est toujours vraie (Voir figure 3)

Si  $a < -1$ , il faut que  $\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{a} \rightarrow a \geq -2$  (Changement du sens de l'inégalité car  $a < 0$ )

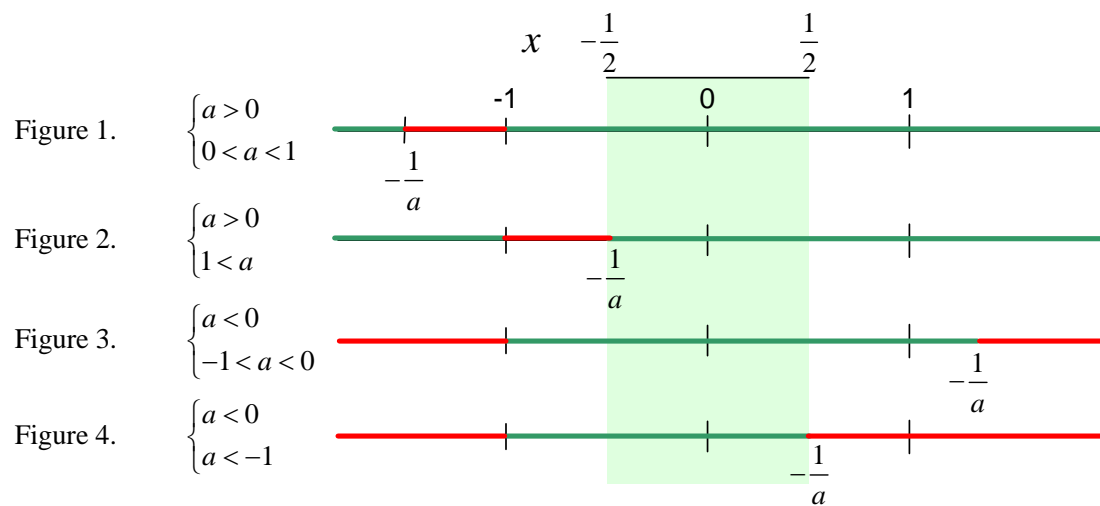
(Voir figure 4)

Autrement dit : si  $a < 0$ , il faut  $-2 \leq a < 0$

$a = 0$

Le trinôme devient :  $x + 1 \geq 0$  Pour tout  $|x| < \frac{1}{2}$  cette équation est vérifiée.

Conclusion :  $a \in \{[-2; 2]\}$  ou encore  $-2 \leq a \leq 2$




---

Modifié le 10 août 08

## EXALG127– EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2003.

Déterminer  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que

$$P(x) = 2x^4 + x^3 + ax^3 + bx + c$$

soit divisible par

$$(x-1)^2(x+1)$$

Factoriser le polynôme  $P(x)$ .

---

Si  $P(x)$  est divisible par  $(x-1)^2$ , alors  $P(1) = 0$  et  $P'(1) = 0$  – voir EXALG008

$$P(1) = 0 \rightarrow 2 + 1 + a + b + c = 0 \rightarrow a + b + c = -3$$

$$P'(1) = 0 \rightarrow 8 + 3 + 2a + b = 0 \rightarrow 2a + b = -11$$

Si  $P(x)$  est divisible par  $x+1$ , alors  $P(-1) = 0$

$$P(-1) = 0 \rightarrow 2 - 1 + a - b + c = 0 \rightarrow a - b + c = -1$$

$$\text{On en déduit : } \begin{cases} a = -5 \\ b = -1 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow P(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 3 = (x-1)^2(x+1)(2x+3)$$

## EXALG128– EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2003.

Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

$$x^n - x^{n-2} - 2x + 2$$

est divisible par

$$(x-1)^2$$

Déterminer le quotient.

---

$$P(x) = x^n - x^{n-2} - 2x + 2 = x^{n-2}(x^2 - 1) - 2(x-1) = (x-1)[x^{n-2}(x+1) - 2]$$

Soit  $Q(x)$ , le deuxième facteur. Il est divisible par  $(x-1)$  car  $Q(1) = 0$

Par Horner, on obtient facilement :

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-1)(x^{n-2} + 2x^{n-3} + 2x^{n-4} + \dots + 2) \\ &= (x-1)\left(x^{n-2} + 2\sum_{i=0}^{n-3} x^i\right) = (x-1)\left(x^{n-2} + 2\frac{x^{n-2}-1}{x-1}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Finalement : } P(x) = (x-1)^2 R(x)$$

$$\text{avec : } R(x) = x^{n-2} + 2\sum_{i=0}^{n-3} x^i = x^{n-2} + 2\frac{x^{n-2}-1}{x-1}$$

---

## EXALG129– Bruxelles, juillet 2003.

a) Simplifier au maximum l'expression suivante :

$$\frac{1}{(a+b)^2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{2}{(a+b)^3} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

b) En utilisant le binôme de Newton, montrer que

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i = 0$$

$$\begin{aligned} a) & \frac{1}{(a+b)^2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{2}{(a+b)^3} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \\ &= \frac{1}{(a+b)^2} \left[ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{(a+b)} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] \\ &= \frac{1}{(a+b)^2} \left[ \frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2} + \frac{2}{(a+b)} \left( \frac{b+a}{ab} \right) \right] \\ &= \frac{1}{(a+b)^2} \frac{b^2 + a^2 + 2ab}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2 b^2} \end{aligned}$$

$$b) \text{ On a } (1-x)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i x^i$$

$$\text{Si on fait } x=1 \rightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i = 0$$