

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Algèbre

## **ALG 14**

**EXALG140 – EXALG149**

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot

Juillet 08

## EXALG140– EPL, UCL, LLN, juillet 2002, série 1

Un bateau se déplace le long d'une rivière dont le courant a une vitesse de 3 km/h. Il va tantôt dans un sens tantôt dans l'autre. Il revient ainsi à son point de départ 6 heures après être parti, en ayant effectué un périple de 36 km.

Déterminer La vitesse du bateau, sachant que celui-ci ne perd pas de temps en changeant de sens.

---

Soit  $v$  la vitesse du bateau.

Quand le bateau est dans le sens du courant sa vitesse est  $v + 3$  km/h et soit  $t_1$  le temps qu'il est dans le sens du courant.

Quand le bateau est dans le sens contraire du courant sa vitesse est  $v - 3$  km/h et soit  $t_2$  le temps qu'il est dans le sens contraire du courant.

On a :

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 6 & (1) \\ (v + 3)t_1 - (v - 3)t_2 = 0 & (2) \\ (v + 3)t_1 + (v - 3)t_2 = 36 & (3) \end{cases}$$

$$\text{De (2) et (3)} \rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{18}{v + 3} \\ t_2 = \frac{18}{v - 3} \end{cases}$$

$$\text{On remplace dans (1)} \rightarrow \frac{3}{v + 3} + \frac{3}{v - 3} = 1$$

$$\rightarrow v^2 - 6v - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} v = +3 + 3\sqrt{2} \\ v = +3 - 3\sqrt{2} \text{ A rejeter car } < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow t_1 = \frac{6}{2 + \sqrt{2}} = 1.7574 \text{ h} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{6}{\sqrt{2}} = 4.2426 \text{ h}$$

Conclusion :  $v = +3 + 3\sqrt{2} \text{ km/h}$

---

Résolu le 24 juin 2004

## EXALG141– EPL, UCL, LLN, juillet 2002, série 2

Soit  $m$  un paramètre réel. Résoudre et discuter l'équation suivante (dans les réels).

$$\sin^2 x + \cos x = 1 - m$$

---

**Solution proposée par Jan Frans Broeckx**

### Transformation de l'équation

Dans le but de n'avoir qu'une seule fonction trigonométrique dans l'équation, on remplace  $\sin^2 x$  par  $1 - \cos^2 x$  :

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x + \cos x = 1 - m \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x - \cos x - m = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Posons :  $y = \cos x \Leftrightarrow x = \text{Arccos } y + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$

avec CE :  $-1 \leq y \leq +1$

$$(2) \quad \Leftrightarrow y^2 - y - m = 0 \tag{3}$$

### Résolution et discussion :

$$\Delta = 1 + 4m$$

(1)  $m < -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \Delta < 0$  Pas de solutions réelles :  $S = \emptyset$

(2)  $m = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

(3)  $m > -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \Delta = \sqrt{1 + 4m}$  et  $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4m}) \\ y_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4m}) \end{cases}$

Discussion de ce 3<sup>e</sup> cas :

(a)  $y_1 \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 4m} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 0$

(b)  $y_2 \geq -1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 4m} \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 2$

**Résumé final :**

①  $m < -\frac{1}{4}$  :  $S = \emptyset$

②  $m = -\frac{1}{4}$  :  $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$

③  $-\frac{1}{4} < m \leq 0$  :

$$S = \left\{ +\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4m})\right) + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ -\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4m})\right) + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \\ \cup \left\{ +\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4m})\right) + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ +\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4m})\right) + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$$

④  $0 < m \leq 2$  :

$$S = \left\{ +\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4m})\right) + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ -\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4m})\right) + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$$

⑤  $m > 2$  :  $S = \emptyset$

---

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 26 décembre 2011.

## EXALG142– EPL, UCL, LLN, juillet série 2

Résoudre, dans les nombres réels, l'équation que voici :

$$2 + \log_2(2^x - \sqrt{6}) = 2x - \log_4\left((2^x + \sqrt{6})^2\right)$$

---

$$2 + \log_2(2^x - \sqrt{6}) = 2x - \log_4\left((2^x + \sqrt{6})^2\right)$$

$$2 + \log_2(2^x - \sqrt{6}) = 2x - \log_2(2^x + \sqrt{6})$$

$$\log_2(2^x - \sqrt{6})(2^x + \sqrt{6}) = 2x - 2$$

$$\log_2(2^{2x} - 6) = \log_2 2^{2x-2}$$

$$2^{2x} - 6 = 2^{2x-2}$$

$$2^2 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^2 = 2^{2x}$$

$$3 \cdot 2^{2x} = 24$$

$$2^{2x} = 2^3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

---

Résolu le 24 juin 2004

## EXALG143 EPL, UCL, LLN, juillet 2002, série 2

On s'intéresse à l'équation suivante :

$$z^4 + (3a^2 - 2i)z^2 - 6ai = 0$$

Dans laquelle  $a$  est un paramètre réel et  $i$  représente l'unité imaginaire.

1. Déterminer les valeurs de  $a$  pour lesquelles cette équation possède *au moins* une racine complexe dont *la partie réelle est nulle*.
  2. Pour chacune des valeurs de  $a$  en question, donner toutes les racines complexes de l'équation correspondante.
- 

1) Soit donc  $ib$ , avec  $b \in \mathbb{R}_0$ , une racine de l'équation dont la partie réelle est nulle.

Elle vérifie l'équation  $\rightarrow (ib)^4 + (3a^2 - 2i)(ib)^2 - 6ai = 0$

$$\rightarrow b^4 - 3a^2b^2 + 2ib^2 - 6ai = 0 \rightarrow \begin{cases} b^4 - 3a^2b^2 = 0 \\ 2b^2 - 6a = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^2(b^2 - 3a^2) = 0 \\ b^2 = 3a \end{cases} \rightarrow 3a(a - a^2) = 0$$

$$\rightarrow a^2(1 - a) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

La solution  $a = 0$  ne convient pas car alors  $b = 0$  ce qui a été exclu.

2) L'équation devient donc pour  $a = 1$

$$z^4 + (3 - 2i)z^2 - 6i = 0$$

$$\Delta = (3 - 2i)^2 + 24i = 5 + 12i$$

$$\begin{aligned} \text{Calculons : } \sqrt{\Delta} &\rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & (|x| > |y|) \\ 2x \cdot y = 12 & (x \text{ et } y \text{ de même signe}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \\ &\rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow \sqrt{\Delta} = 3 + 2i \end{aligned}$$

Calculons les racines de l'équation:

$$z^2 = \frac{-(3 - 2i) \pm (3 + 2i)}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1^2 = -3 \rightarrow \begin{cases} z_{11} = i\sqrt{3} \\ z_{12} = -i\sqrt{3} \end{cases} \\ z_2^2 = 2i \end{cases}$$

Calculons  $\sqrt{2i}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \sqrt{2i} = \pm(1 + i)$$

Finalement les racines sont :  $(-i\sqrt{3}, i\sqrt{3}, 1 + i, -1 - i)$

Note : Les solutions  $\pm i\sqrt{3}$  étaient prévisibles sur base des résultats du point 1

## EXALG144– EPL, UCL, LLN, juillet 2002, série 2

Des enfants se partagent un sac de billes, *de manière égale*. Le premier enfant prend 1 bille et le dixième des billes qui restent, puis le deuxième prend 2 billes et le dixième de celles qui restent, et ainsi de suite jusqu'au dernier enfant qui prend toutes les billes restantes. Combien y avait-il d'enfants et combien chacun a-t-il pris de billes ? Mettre le problème en équations, puis le résoudre. Une réponse numérique ne suffit pas.

---

Soit  $x$  le nombre de billes

Le premier enfant prend :  $1 + \frac{x-1}{10}$ .

Il reste :  $x - 1 - \frac{x-1}{10} = \frac{9}{10}(x-1)$

Le deuxième enfant prend :  $2 + \frac{\frac{9(x-1)}{10} - 2}{10}$

Comme le partage est de manière égale :

$$\rightarrow 1 + \frac{x-1}{10} = 2 + \frac{\frac{9(x-1)}{10} - 2}{10} \rightarrow 81$$

On a donc le tableau suivant :

|   | Prise       | Reste |
|---|-------------|-------|
| 1 | $1 + 8 = 9$ | 72    |
| 2 | $2 + 7 = 9$ | 63    |
| 3 | $3 + 6 = 9$ | 54    |
| 4 | $4 + 5 = 9$ | 45    |
| 5 | $5 + 4 = 9$ | 36    |
| 6 | $6 + 4 = 9$ | 27    |
| 7 | $7 + 4 = 9$ | 18    |
| 8 | $8 + 4 = 9$ | 9     |
| 9 | 9           | 0     |

---

Résolu le 24 juin 2004



## EXALG145 - FACSA, ULiège, Liège, septembre 2019.

Soit  $(F_n)_{n \geq 0}$  la suite de Fibonacci, définie par:

$$F_0 = 0 ; F_1 = 1 \text{ et } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ pour } n \geq 2 :$$

Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a:

$$\sum_{i=0}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont :**

<http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf>

*Solution.* On procède par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$ , la somme du membre de gauche comporte le seul terme  $F_0^2 = 0$ , tandis que le membre de droite vaut  $F_0 F_1 = 0$ .

Si on suppose l'égalité vraie pour une certaine valeur de  $n$  (hypothèse de récurrence), on a le développement suivant:

$$\sum_{i=0}^{n+1} F_i^2 = \left( \sum_{i=0}^n F_i^2 \right) + F_{n+1}^2 = F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1} F_{n+2},$$

qui établit l'égalité pour la valeur suivante  $n + 1$ .

## EXALG146– EPL, UCL, LLN, septembre 2002

Résoudre, dans les nombres réels, l'équation que voici :

$$\frac{\log_2 \left( \sqrt{(x-1)(x+3)} \right)}{\log_8 3 + \log_8 (x+1)} = \log_9 27$$

---

$$\frac{\log_2 \left( \sqrt{(x-1)(x+3)} \right)}{\log_8 3 + \log_8 (x+1)} = \log_9 27$$

$$\text{CE : } x > -1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x < -3 \\ x > 1 \end{cases} \rightarrow x > 1$$

$$\frac{\log_2 \left( \sqrt{(x-1)(x+3)} \right)}{\frac{\log_2 3}{\log_2 8} + \frac{\log_2 (x+1)}{\log_2 8}} = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 9} \rightarrow \frac{\log_2 \left( \sqrt{(x-1)(x+3)} \right)}{\frac{3}{3} + \frac{\log_2 (x+1)}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} \log_2 (x-1)(x+3) = \frac{1}{2} \log_2 3(x+1) \rightarrow (x-1)(x+3) = 3(x+1)$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow (x+2)(x-3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases} \quad \text{A rejeter vu les CE}$$

Conclusion :  $x = 3$

---

Résolu le 24 juin 2004

## EXALG147– EPL, UCL, LLN, septembre 2002

Déterminer le(s) polynôme(s)  $P(x)$  de degré cinq satisfaisant aux conditions suivantes :

1. le coefficient de  $x^5$  dans  $P(x)$  est égal à 1
2.  $P(x)$  est égal (identiquement) à  $x^5 P(1/x)$
3. La somme des cinq racines (réelles ou complexes) de  $P(x)$  est égale à 2
4.  $P(x)$  est divisible  $x^2 + x + 1$

Ensuite, calculer toutes les racines réelles de  $P(x)$ .

---

### Solution proposée par Jan Frans Broeckx

En tenant compte des conditions (1), (2) et (3), le polynôme peut s'écrire comme suit :

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + ax^3 + ax^2 - 2x + 1$$

Pour exprimer la condition (4), effectuons la division euclidienne de  $P(x)$  par  $x^2 + x + 1$  et exprimons la condition que le reste doit être égal à zéro :

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 - 2x^4 + ax^3 + ax^2 - 2x + 1 & x^2 + x + 1 \\
 -x^5 - x^4 - x^3 & \hline
 -3x^4 + (a-1)x^3 + ax^2 - 2x + 1 & x^3 - 3x^2 + (a+2)x + 1 = Q(x) \\
 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 & \hline
 (a+2)x^3 + (a+3)x^2 - 2x + 1 & \\
 -(a+2)x^3 - (a+2)x^2 - (a+2)x & \hline
 x^2 - (a+4)x + 1 & \\
 -x^2 - x - 1 & \hline
 R(x) = -(a+5)x & 
 \end{array}$$

La condition est donc que  $a + 5 = 0$  ou bien que  $a = -5$ . Il y a donc un seul polynôme satisfaisant aux quatre conditions :

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 2x + 1 \quad (1)$$

Ce polynôme est factorisé comme suit :

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - 3x^2 - 3x + 1)$$

Le premier facteur est un trinôme du second degré qui n'as pas de racines réelles ( $\Delta = -3$ ). Les racines réelles doivent donc provenir du second facteur, dont on voit qu'il est divisible par  $(x + 1)$ . Après division par la règle de Horner :

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x + 1)(x^2 - 4x + 1)$$

Une première racine réelle du polynôme (1) est donc  $x_1 = -1$ . Les deux autres sont les racines du trinôme  $x^2 - 4x + 1$  :

$$\Delta = 16 - 4 = 12 \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3} \quad x_{2,3} = \frac{1}{2}(4 \pm 2\sqrt{3}) = 2 \pm \sqrt{3}$$

Les racines réelles du polynôme (1) sont donc :

$$S = \{-1, 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\}$$

**Remarque :**

Les racines (complexes) de  $x^2 + x + 1$  sont  $x_{4,5} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$ . La somme des cinq racines est donc bien :  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -1 + (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2$ .

---

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 26 décembre 2011.

## EXALG148– EPL, UCL, LLN, septembre 2002

Une pierre est lâchée du haut d'un immeuble. La distance  $h$  parcourue par celle-ci en chute libre en  $t$  secondes depuis l'instant où elle est lâchée vaut  $h = g t^2 / 2$ , où  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  est l'accélération due à la pesanteur. Du haut de l'immeuble, on entend le bruit de la pierre frapper le sol 6.5 s plus tard. Sachant que la vitesse du son est de  $340 \text{ m/s}$ , calculer la hauteur de l'immeuble.

---

Soit  $t_1$  le temps de chute de la pierre, et  $t_2$  le temps mis par le son pour remonter.

$$\begin{cases} h = \frac{gt_1^2}{2} \\ h = 340 t_2 \\ t_1 + t_2 = 6.5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{9.81 t_1^2}{2} = 340 t_2 \\ t_2 = 6.5 - t_1 \end{cases} \rightarrow 9.81 t_1^2 + 2 \times 340 \times t_1 - 2 \times 6.5 \times 340 = 0$$

$$\rightarrow t_1 = \frac{-340 \pm \sqrt{340^2 + 2 \times 6.5 \times 340 \times 9.81}}{9.81} = \begin{cases} 5.983 \\ -75.3 \text{ A rejeter} \end{cases}$$

$$\rightarrow t_1 = 5.983 \text{ s} \rightarrow t_2 = 0.5165 \text{ s} \rightarrow \boxed{h = 175.61 \text{ m}}$$

---

Résolu le 24 juin 2004

**EXALG149– EPL, UCL, LLN, juillet 2003, série 1.**

Résoudre, dans les réels, l'équation suivante :

$$(\sqrt{2} + 1)^x - 2(\sqrt{2} - 1)^x = 1$$

---

Remarquons que :  $1 = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} + 1)^x (\sqrt{2} - 1)^x$

→ multiplions les deux membres de l'équation par  $(\sqrt{2} + 1)^x$

$$\rightarrow (\sqrt{2} + 1)^{2x} - 2(\sqrt{2} - 1)^x (\sqrt{2} + 1)^x = (\sqrt{2} + 1)^x$$

$$\rightarrow (\sqrt{2} + 1)^{2x} - (\sqrt{2} + 1)^x - 2 = 0$$

$$\text{Soit } t = (\sqrt{2} + 1) \rightarrow t^2 - t - 2 = (t + 1)(t - 2) = 0$$

$t = -1$  est à rejeter car  $t > 0$

$$\rightarrow (\sqrt{2} + 1)^x = 2 \rightarrow x \ln(\sqrt{2} + 1) = \ln 2$$

$$\rightarrow \boxed{x = \frac{\ln 2}{\ln(\sqrt{2} + 1)}}$$

---

Résolu le 24 juin 2004