Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 24

EXALG240 – EXALG249

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG240 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2006.

Déterminer l'ensemble S de tous les nombres complexes $x+i\,y$ ($x,\ y\in\mathbb{R}$) tels que $\left(x+i\,y\right)^3$ est un réel strictement supérieur à 8.
Représenter dans le plan de Gauss l'ensemble S

Soit donc $\left(x+iy\right)$ le nombre cherché tel que $\left(x+iy\right)^3 = X > 8$
où X désigne un nombre réel.
On a : $\left(x+iy\right)^3 = x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3 = \left(x^3-3xy^2\right)+\left(3x^2y-y^3\right)i$

Il faut donc : $\begin{cases} x^3-3xy^2>8 \\ 3x^2y-y^3=0 \end{cases}$

On factorise la deuxième équation : $3x^2y-y^3 = y\left(\sqrt{3}x-y\right)\left(\sqrt{3}x-y\right)$

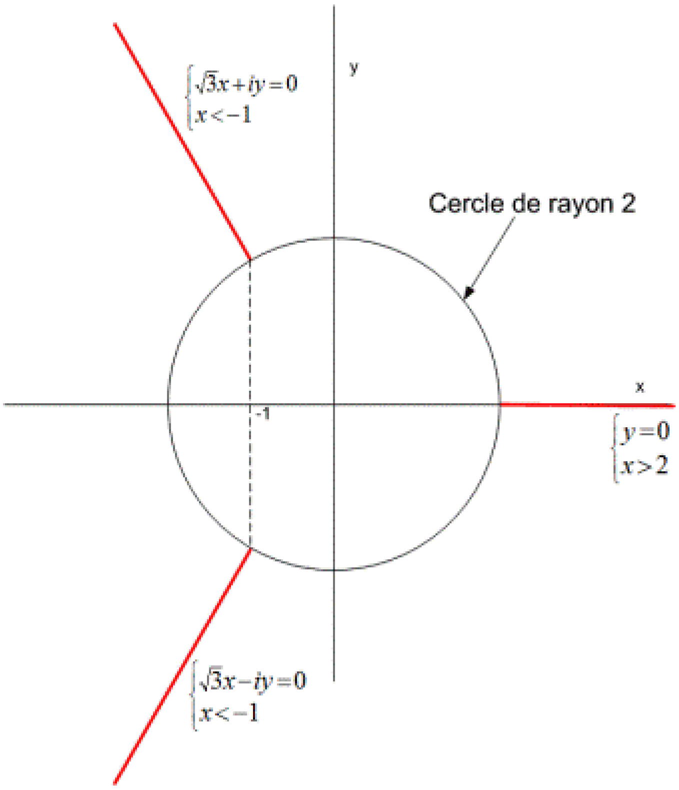
Cas 1 : $y=0 \rightarrow x>2$

Cas 2 : $y=+\sqrt{3} \rightarrow x^3-9x^3>8 \rightarrow -8x^3>8 \rightarrow x<-1$

Cas 3 : $y=-\sqrt{3} \rightarrow x^3-9x^3>8 \rightarrow -8x^3>8 \rightarrow x<-1$

L'ensemble S se représente dans le plan de Gauss par trois demi-droites

$$\begin{cases} y=0 \text{ avec } x>2 \\ y=\sqrt{3}x \text{ avec } \ x<-1 \\ y=-\sqrt{3}x \text{ avec } x<-1 \end{cases}$$



Le 18 juillet 2006.

EXALG241 – Bruxelles, septembre 2006.

Résoudre dans $\mathfrak{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x - y = mz \\ x + y = 2mz - 1 \end{cases}$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

Soit donc le système : $\begin{cases} mx & + & y & & & = & 1 \\ x & - & y & - & mz & = & 0 \\ x & + & y & - & 2mz & = & -1 \end{cases}$

Calculons les Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -m \\ 1 & 1 & -2m \end{vmatrix} = -m(3m+1) \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -m \\ -1 & 1 & -2m \end{vmatrix} = 4m$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -m \\ 1 & -1 & -2m \end{vmatrix} = m(1-m) \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1+m$$

<u>Cas 1 : $m = 0$</u>

Le système devient : $\begin{cases} y = 1 \\ x - y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$ Système impossible

<u>Cas 2 : $m = \frac{-1}{3}$</u>

Le système devient : $\begin{cases} -\frac{x}{3} + y = 1 \\ x - y + \frac{z}{3} = 0 \\ x + y + \frac{2z}{3} = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 3y = 3 \\ 3x - 3y + z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = -3 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} 2x + z = 3 \\ 6x + 3z = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + z = 3 \\ 2x + z = -1 \end{cases}$ Système impossible.

<u>Dans les autres cas : $m \neq 0$; $m \neq -\frac{1}{3}$</u>

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{3m+1} \\ y = \dfrac{1-m}{3m+1} \\ z = \dfrac{1+m}{m(3m+1)} \end{cases}$$

Le 25 janvier 2007.

EXALG242 – Bruxelles, septembre 2006.

Simplifier au maximum l'expression réelle

$$\frac{\left(\dfrac{4a^5b^2-9b^4a^3}{4a^4b^3+12a^3b^4+9b^5a^2}\right)}{\left(\dfrac{8a^5b-27a^2b^4}{2a^4b^2-2a^2b^4+3a^3b^3-3ab^5}\right)}$$

La réponse finale doit être factorisée au maximum

$$E=\frac{\left(\dfrac{4a^5b^2-9b^4a^3}{4a^4b^3+12a^3b^4+9b^5a^2}\right)}{\left(\dfrac{8a^5b-27a^2b^4}{2a^4b^2-2a^2b^4+3a^3b^3-3ab^5}\right)}=\frac{a^3b^2\left(4a^2-9b^2\right)}{a^2b^3\left(4a^2+12ab+9b^2\right)}\cdot\frac{ab^2\left(2a^3-2ab^2+3a^2b-3b^3\right)}{a^2b\left(8a^3-27b^3\right)}$$

$$=\frac{\cancel{a^4b^4}\,\cancel{(2a+3b)}\,\cancel{(2a-3b)}\left[2a\left(a^2-b^2\right)+3b\left(a^2-b^2\right)\right]}{\cancel{a^4b^4}\,(2a+3b)^{\cancel{2}}\,\cancel{(2a-3b)}\left(4a^2+6ab+9b^2\right)}$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)\,\cancel{(2a+3b)}}{\cancel{(2a+3b)}\left(4a^2+6ab+9b^2\right)}=\frac{(a+b)(a-b)}{4a^2+6ab+9b^2}$$

Si on travaille dans le corps des réels, on s'arrête ici.

Si on travaille dans le corps des complexes, on peut continuer.
Factorisons le dénominateur :

$$4a^2+6ab+9b^2=0\to a=\frac{-3b\pm3\sqrt{3}ib}{4}\to4a^2+6ab+9b^2=4\left(a+\frac{3b+3\sqrt{3}ib}{4}\right)\left(a+\frac{3b-3\sqrt{3}ib}{4}\right)$$

Et finalement : $\boxed{E=\dfrac{4(a+b)(a-b)}{\left(4a+3b+3\sqrt{3}ib\right)\left(4a+3b-3\sqrt{3}ib\right)}}$

Le 25 janvier 2007.

EXALG243 – Bruxelles, septembre 2006.

Résoudre dans $\mathfrak{R}$ l'équation

$$\sqrt{4x+8}-\sqrt{1-x}=\sqrt{5+x}$$

CE

1) $x \geq -2$

2) $x \leq 1$

3) Comme le membre de gauche doit être positif ou nul, on a aussi

$4x+8 \geq 1-x \rightarrow x \geq -\frac{7}{5}$

Conclusion : $-\frac{7}{5} \leq x \leq 1$

Résolvons maintenant l'équation par des carrés successifs.

$4x+8-2\sqrt{(4x+8)(1-x)}+1-x=5+x$

$\rightarrow 2x+4=2\sqrt{-4x^2-4x+8} \rightarrow x^2+4x+4=-4x^2-4x+8$

$\rightarrow 5x^2+8x-4=0 \rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16+4\times 5}}{5}=\frac{-4\pm 6}{5} \rightarrow \begin{cases} x_1=-2 & \text{A rejeter} \\ x_2=\frac{2}{5} \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{x=\frac{2}{5}}$

Le 25 janvier 2007.

EXALG244 – EPL, UCL, LLN, juillet, série 1- 2006.

Soit l'équation en x où m est un paramètre réel

$$x^4 - mx^2 + m$$

Déterminer le nombre de racines réelles distinctes selon les valeurs de m.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Transformation de l'équation

L'équation (1) est une équation ***bicarrée***. Posons :

$$x^2 = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{y} \qquad \text{avec comme condition : } \; y \geq 0$$

L'équation en y est alors :

$$y^2 - my + m = 0 \tag{2}$$

Discussion

Le discriminant de (2) est :

$$\Delta = m^2 - 4m = m(m-4) \tag{3}$$

(1) $\quad \mathbf{0} < m < 4$

$\Delta < 0 \quad \Rightarrow$ l'équation (2) en y n'a pas de racines réelles

$\Rightarrow$ l'équation (1) en x n'a aucune racine réelle

(2) $\quad \boldsymbol{m = 0}$

$\Delta = 0$ et l'équation (2) devient $y^2 = 0$ avec comme solution unique $y = 0$

$\Rightarrow$ l'équation (1) a une seule solution réelle $x = 0$

(3) $\quad \boldsymbol{m = 4}$

$\Delta = 0$ et l'équation (2) devient $(y-2)^2 = 0$ avec comme solution unique $y = +2$

$\Rightarrow$ l'équation (1) a deux solutions réelles $x = \pm\sqrt{2}$

(4) $\quad \boldsymbol{m} < 0$

$\Delta > 0 \quad \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}\left(m + \sqrt{m(m-4)}\right)$ et $y_2 = \frac{1}{2}\left(m - \sqrt{m(m-4)}\right)$

Puisque m est négatif, la racine y_2 est négative ; elle ne contribue donc pas aux racines réelles de l'équation (1).

La racine y_1 sera positive à condition que :

$$\sqrt{m(m-4)} > |m| \quad \Leftrightarrow \quad m(m-4) > m^2 \quad \Leftrightarrow \quad -4m > 0$$

Cette condition est vérifiée puisque m est négatif.

$\Rightarrow$ l'équation (1) a deux solutions réelles $x = \pm\sqrt{y_1}$

(5) $\quad \boldsymbol{m} > 4$

$\Delta > 0 \quad \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}\left(m + \sqrt{m(m-4)}\right)$ et $y_2 = \frac{1}{2}\left(m - \sqrt{m(m-4)}\right)$

Puisque m est positif, la racine y_1 est positive ; elle contribue donc deux racines réelles $x = \pm\sqrt{y_1}$ à l'équation (1).

La racine y_2 sera positive à condition que :

$$\sqrt{m(m-4)} < m \quad \Leftrightarrow \quad m(m-4) < m^2 \quad \Leftrightarrow +4m > 0$$

Cette condition est vérifiée puisque m est positif.

$\Rightarrow$ **l'équation (1) a quatre solutions réelles** $x = \pm\sqrt{y_1}$ **et** $x = \pm\sqrt{y_2}$

Résumé final

Soit N le nombre de racines réelles **distinctes** de l'équation (1) ; alors :

si $m < 0$, **alors** $N = 2$;

si $m = 0$, **alors** $N = 1$;

si $0 < m < 4$, **alors** $N = 0$;

si $m = 4$, **alors** $N = 2$;

si $m > 4$, **alors** $N = 4$.

Solution proposée par Nicole BERCKMANS

Pour $y = x^2$, on a $y^2 - my + m = 0$ dont le réalisant $\Delta = m(m-4)$,

produit $P = m$, somme $S = m$ et $y_i = \dfrac{m \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

$m < 0$	$\Delta > 0, P = S = m, y_1 < 0 < y_2$	2 racines
	$x_1 = \sqrt{y_2}, x_2 = -\sqrt{y_2}$	
$m = 0$	$D = P = S = 0, x^4 = 0, x = 0$	1 racine
$0 < m < 4$	$\Delta < 0,$	Pas de racine
$m = 4$	$\Delta = 0, P = S = 4, y_1 = y_2 = 2$	2 racines
	$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$	
$4 < m$	$\Delta > 0, P = S > 0$	4 racines
	y_1 et $y_2 > 0$	
	$x_1 = \sqrt{y_1}, x_2 = -\sqrt{y_1}, x_3 = \sqrt{y_2}, x_4 = -\sqrt{y_2}$	

Le 4 mars 2007. Modifié le 27 janvier 2012 (Jan Frans Broeckx). Modifié le 5 septembre 2014 (Nicole Berckmans)

EXALG245 – Louvain, juillet, série 1- 2006.

Résoudre dans les complexes, l'équation suivante

$$z^4 - 2z^3 + 14z^2 - 18z + 45 = 0$$

sachant que (1+2i) est une racine

Si $1+2i$ est une racine alors $1-2i$ est également une racine.
Le polynôme $P(x)$ est donc divisible par $(x-1+2i)(x-1-2i) = x^2-2x+5$
Effectuons la division

$$\begin{array}{ccccc|l}
4 & 3 & 2 & 1 & 0 & \\
\hline
1 & -2 & 14 & -18 & 45 & \underline{x^2-2x+5} \\
\underline{1} & \underline{-2} & \underline{5} & & & x^2+9 \\
0 & 0 & 9 & & & \\
 & & \underline{9} & \underline{-18} & \underline{45} & \\
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

On a donc
$P(x) = (x-1+2i)(x-1-2i)(x-3i)(x+3i)$
Les solutions sont alors : $\boxed{S = \{1+2i; 1-2i; -3i; 3i\}}$

Le 4 mars 2007.

EXALG246 – Louvain, juillet, série 1- 2006.

Sous quelle condition sur les paramètres réels *m* et *n*, le système suivant en *x* et *y* réels admet-il une solution ?

$$\begin{cases} mx+3y+2=0 \\ x-3y=2 \\ 2mx-ny+2=0 \\ 2x-3y+10=0 \end{cases}$$

<u>Méthode 1</u>

C'est un système linéaire de 4 équations à 2 inconnues

Pour que le système admette 1 solution il faut que deux équations soient la combinaison linéaire des deux autres.

$$\begin{cases} mx+3y+2=0 & (1) \\ x-3y=2 & (2) \\ 2mx-ny+2=0 & (3) \\ 2x-3y+10=0 & (4) \end{cases}$$

Exprimons que l'équation (1) est combinaison linéaire de (2) et (4)

$mx+3y+2=kx-3ky-2k+2hx-3hy+10h=(k+2h)x+(-3k-3h)y+(-2k+10h)$

$$\rightarrow \begin{cases} k+2h=m & (5) \\ -3k-3h=3 & (6) \\ -2k+10h=2 & (7) \end{cases} \rightarrow \text{ avec } (6) \text{ et } (7) \rightarrow \begin{cases} k=-1 \\ h=0 \end{cases}$$

On remplace dans $(5) \rightarrow \boxed{m=-1}$

Exprimon que l'équation (3) est combinaison linéaire de (2) et (4)

$2mx-ny+2=(k+2h)x+(-3k-3h)y+(-2k+10h)$

$$\rightarrow \begin{cases} k+2h=2m=-2 & (8) \\ -3k-3h=-n & (9) \\ -2k+10h=2 & (10) \end{cases} \rightarrow \text{ avec } (8) \text{ et } (10) \rightarrow \begin{cases} k=-\dfrac{12}{7} \\ h=-\dfrac{1}{7} \end{cases}$$

On remplace dans $(9) \rightarrow \boxed{n=-\dfrac{39}{7}}$

Méthode 2

$$\begin{cases} mx+3y+2=0 & (1) \\ x-3y=2 & (2) \\ 2mx-ny+2=0 & (3) \\ 2x-3y+10=0 & (4) \end{cases}$$

Exprimons que la solution de (2) et (4) est aussi solution de (1) et (3)

$$\rightarrow \begin{cases} x-3y=2 \\ 2x-3y+10=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-12 \\ y=-\dfrac{14}{3} \end{cases}$$

On remplace dans (1) et (3)

$$\rightarrow \begin{cases} m(-12)+3\left(\dfrac{-14}{3}\right)+2=0 \\ 2m(-12)-n\left(-\dfrac{14}{3}\right)+2=0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} m=-1 \\ n=-\dfrac{39}{7} \end{cases}}$$

Le 4 mars 2007.

EXALG247 – EPL, UCL, LLN, juillet, série 1- 2006.

On considère un cylindre de longueur L et de diamètre Φ.
Déterminer les valeurs de x dont il faut à la fois diminuer la longueur et augmenter le diamètre pour obtenir d'autres cylindres dont le volume serait identique à celui d'origine. Discuter les solutions en fonction du diamètre et de la longueur.

Soit x la valeur, avec $x > 0.\ (1)$
Soit $L' = L - x$ la nouvelle longueur et $\Phi' = \Phi + x$ le nouveau diamètre
Ce qui impose une deuxème condition : $L' > 0 \to x < L \quad (2)$

Nous devons avoir : $V = \dfrac{\pi L\Phi^2}{4} = \dfrac{\pi L'\Phi'^2}{4} = \dfrac{\pi(L-x)^2(\Phi+x)^2}{4}$

$\to L\Phi^2 = (L-x)^2(\Phi+x)^2 \to x^2 + (2\Phi - L)x - 2L\Phi + \Phi^2 = 0$

Calculons le Δ de cette équation du second degré :

$\Delta = (2\Phi - L)^2 + 8L\Phi - 4\Phi^2 = L(L+4\Phi)$ qui est toujours positif

Il y a donc en principe deux solutions : $x = \dfrac{-(2\Phi - L) \pm \sqrt{L(L+4\Phi)}}{2}$

Mais nous devons vérifier que les conditions (1) et (2) sont remplies

1)Etude de $x = \dfrac{1}{2}\left(-(2\Phi - L) - \sqrt{L(L+4\Phi)}\right)$

1.1 $x > 0$

$\dfrac{1}{2}\left(-(2\Phi - L) - \sqrt{L(L+4\Phi)}\right) > 0 \to -(2\Phi - L) > \sqrt{L(L+4\Phi)}$

Comme second membre est positif, cela implique que $L > 2\Phi$

Elevons l'equation au carré. Il vient : $4\Phi^2 - 4\Phi L + L^2 > L^2 + 4L\Phi$

$\to 4\Phi(\Phi - 2L) > 0 \to$ Ce qui est impossible puisque $\begin{cases} \Phi > 0 \\ L > 2\Phi \end{cases}$

2. Etude de $x = \frac{1}{2}\left(-\left(2\Phi - L\right) + \sqrt{L\left(L+4\Phi\right)}\right)$

2.1 $x > 0$

$\frac{1}{2}\left(-\left(2\Phi - L\right) + \sqrt{L\left(L+4\Phi\right)}\right) > 0 \rightarrow \sqrt{L\left(L+4\Phi\right)} > 2\Phi - L$

Elevons l'equation au carré. Il vient :$L^2 + 4L\Phi > 4\Phi^2 - 4\Phi L + L^2$

$\rightarrow 8\Phi L - 4\Phi^2 > 0 \rightarrow 4\Phi\left(2L - \Phi\right) > 0$ et comme $\Phi > 0$, on obtient

la condition $: \Phi < 2L$

2.2 $x < L$

$\frac{1}{2}\left(-\left(2\Phi - L\right) + \sqrt{L\left(L+4\Phi\right)}\right) < L \rightarrow \sqrt{L\left(L+4\Phi\right)} < L + 2\Phi$

$\rightarrow L^2 + 4L\Phi < L^2 + 4L\Phi + 4\Phi^2 \rightarrow 0 < 4\Phi^2$ Ce qui est toujours vérifié.

Conclusion

Pour $\Phi < 2L$, une solution donnée par $x = \frac{1}{2}\left(-2\Phi + L + \sqrt{L\left(L+4\Phi\right)}\right)$

Exemple

$\begin{cases} L = 4 \\ \Phi = 3 \end{cases} \rightarrow x = 3 \rightarrow \begin{cases} L' = 1 \\ \Phi' = 6 \end{cases}$ et on vérifie $V = \frac{\pi \times 4 \times 3^2}{4} = \frac{\pi \times 1 \times 6^2}{4} = 9\pi$

Le 4 mars 2007.

EXALG248 – Louvain, juillet, série 2- 2006.

Soit *m* un paramètre réel. Résoudre et discuter l'équation suivante (dans les réels)

$$\sin^2 x + 4m\cos x - 2m - 3 = 0$$

$\sin^2 x + 4m\cos x - 2m - 3 = 0 \rightarrow 1 - \cos^2 x + 4m\cos x - 2m - 3 = 0$

$\rightarrow \cos^2 x - 4m\cos x + 2(m+1) = 0$

Calculons le Δ' puisque le coefficient du $\cos x$ est pair :

$\Delta' = 4m^2 - 2m - 2$

Ce réalisant doit être positif :

$m = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \quad m \in \leftarrow; -\dfrac{1}{2}\Big] \cup [1; \rightarrow \qquad (C1)$

Et donc : $\cos x = 2m \pm \sqrt{4m^2 - 2m - 2}$

Cependant, il faut : $-1 \leq \cos x \leq 1$

1) Etude de $-1 \leq 2m + \sqrt{4m^2 - 2m - 2} \leq 1$

1.1 $-1 \leq 2m + \sqrt{4m^2 - 2m - 2} \rightarrow -1 - 2m \leq \sqrt{4m^2 - 2m - 2}$

$\rightarrow 1 + 4m + 4m^2 \leq 4m^2 - 2m - 2 \rightarrow m \leq -\dfrac{1}{2} \qquad (C2)$

1.2 $2m + \sqrt{4m^2 - 2m - 2} \leq 1 \rightarrow \sqrt{4m^2 - 2m - 2} \leq 1 - 2m \qquad (1)$

Comme la racine est positive, on a donne comme condition

$1 - 2m \geq 0 \rightarrow m \leq -\dfrac{1}{2}$ On retrouve la condition $(C2)$

Elevons maintenant (1) au carré $\rightarrow 4m^2 - 2m - 2 \leq 1 - 4m + 4m^2$

$\rightarrow 2m \leq 3 \rightarrow m \leq \dfrac{3}{2} \qquad (C3)$

En résumé, Les conditions $(C1),(C2)$ et $(C3)$ doivent être vérifiées simultanément

$\rightarrow \boxed{m \leq -\dfrac{1}{2}}$

2) Etude de $-1 \leq 2m - \sqrt{4m^2 - 2m - 2} \leq 1$

2.1 $-1 \leq 2m - \sqrt{4m^2 - 2m - 2} \rightarrow \sqrt{4m^2 - 2m - 2} \leq 2m + 1$

$\rightarrow 4m^2 - 2m - 2 \leq 4m^2 + 4m + 1 \rightarrow 6m \geq -3 \rightarrow m \geq -\dfrac{1}{2} \qquad (C4)$

2.2 $2m - \sqrt{4m^2 - 2m - 2} \leq 1 \rightarrow 2m - 1 \leq \sqrt{4m^2 - 2m - 2}$

$\rightarrow 4m^2 - 4m + 1 \leq 4m^2 - 2m - 2 \rightarrow 2m \geq 3 \rightarrow m \geq \dfrac{3}{2} \qquad (C5)$

En résumé, Les conditions $(C1),(C4)$ et $(C5)$ doivent être vérifiées simultanément

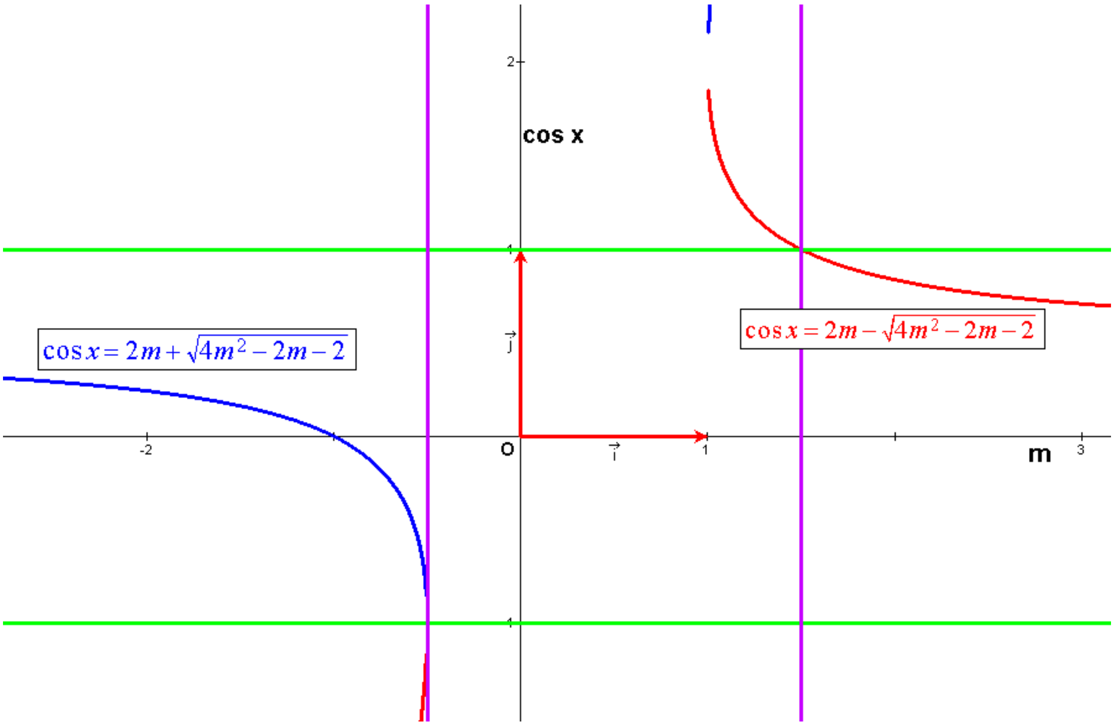
$\rightarrow \boxed{m \leq \dfrac{3}{2}}$

Récapitulatif

$m \leq -\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $x = \pm \arccos\left(2m + \sqrt{4m^2 - 2m - 2} + 2k\pi\right)$

$m \geq \dfrac{3}{2}$ $\qquad$ $x = \pm \arccos\left(2m + \sqrt{4m^2 - 2m - 2} + 2k\pi\right)$

Le graphique suivant résume la situation



Le 24 mars 2007.

EXALG249 – Louvain, juillet, série 2- 2006.

Déterminez *a*, *b* *c* pour que le polynôme :

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + 1$$

soit divisible par ($x - 1$) ^{3}

Soit $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + 1$

On doit avoir :

$$P(x) = (x-1)^3 (mx^2 + nx + p) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(mx^2 + nx + p)$$
$$= mx^5 + (-3m + n)x^4 + (3m - 3n + p)x^3 + (-3 + 3n - 3p)x^2 + (-n + 3p)x - p$$

Ce qui par identification donne :

$$\begin{cases} m = a \\ -3m + n = b \\ 3m + 3n - 3p = c \\ -m + 3n - 3p = 0 \\ -n + 3p = 0 \\ -p = 1 \end{cases} \text{ Ce qui se résoud facilement pour donner } \begin{cases} a = -6 \\ b = 15 \\ c = -10 \\ m = -6 \\ n = -3 \\ p = -1 \end{cases}$$

$\rightarrow \boxed{P(x) = -6x^5 + 15x^4 - 10x^3 + 1}$

Effectuons la division

5	4	3	2	1	0	
-6	15	-10	0	0	1	$\underline{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$
$\underline{-6}$	$\underline{18}$	$\underline{-18}$	$\underline{6}$			$-6x^2 - 3x - 1$
0	-3	8	-6			
	$\underline{-3}$	$\underline{9}$	$\underline{-9}$	$\underline{3}$		
	0	-1	3	-3		
		$\underline{-1}$	$\underline{3}$	$\underline{-3}$	$\underline{1}$	
		0	0	0	0	

$\rightarrow P(x) = -(x-1)^3 (6x^2 + 3x + 1)$

Le 4 mars 2007.