Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 27

EXALG270 – EXALG279

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG270 – ERM, juillet 2003.

Simplifier l'expression

$$\sqrt[n]{\left(\frac{x^{2n^2}}{x^{4n}}\right)^{\frac{1}{n-2}}}.$$

Solution proposée par Benoit Baudelet

On a successivement

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{\left(\frac{x^{2n^2}}{x^{4n}}\right)^{\frac{1}{n-2}}} &= \sqrt[n]{\left(x^{2n^2-4n}\right)^{\frac{1}{n-2}}} \\
&= \sqrt[n]{x^{\frac{2n(n-2)}{n-2}}} \\
&= \sqrt[n]{x^{2n}} \\
&= x^2
\end{aligned}$$

16 juillet 07. Relu par Steve Tumson

EXALG270 – ERM, juillet 2003.

La somme des aires de deux carrés vaut 325, le produit de la diagonale de l'un par la diagonale de l'autre vaut 300. Déterminer le côté de chacun de ces carrés

---

Solution proposée par Benoit Baudelet

Soient x et y les côtés des deux carrés.

Leurs diagonales mesurent donc respectivement $x\sqrt{2}$ et $y\sqrt{2}$.

On est donc amené à résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 325 \\ x\sqrt{2}.y\sqrt{2} = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 325 \\ x.y = 150 \end{cases}$$

dont les solutions sont $x = 10$ et $y = 15$, ou $x = 15$ et $y = 10$.

---

16 juillet 07. Relu par Steve Tumson

EXALG272 – ERM, juillet 2003.

Factoriser l'expression suivante :

$$a^2c+ac^2+a^2b-ab^2-b^2c-bc^2.$$

Solution proposée par Benoit Baudelet

Considérons l'expression $a^2c+ac^2+a^2b-ab^2-b^2c-bc^2$ comme un polynôme en la variable a. On a donc

$$\mathcal{P}(a)=a^2c+ac^2+a^2b-ab^2-b^2c-bc^2=a^2(c+b)+a(c^2-b^2)-bc(b+c)$$

et on observe que le facteur $(b+c)$ peut être mis en évidence pour obtenir

$$\mathcal{P}(a)=(c+b)\left[a^2+a(c-b)-bc\right]$$

Puisque $\mathcal{P}(b)=0$ et $\mathcal{P}(-c)=0$, le polynôme $\mathcal{P}(a)$ est également divisible par $a-b$ et par $a+c$. On a donc finalement

$$\boxed{\mathcal{P}(a)=(c+b)(a-b)(a+c)}$$

16 juillet 07. Relu par Steve Tumson

EXALG273 – FSA – UCL – Louvain, Juillet 2007, série 2.

Résoudre dans les réels, le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 54 \\ xy + 4y^2 = 115 \end{cases}$$

Solution proposée par Steve Tumson

L'addition de ces deux équations donne :

$$x^2 + 4y^2 + 4xy = 169$$

Ou encore :

$$(x+2y)^2 = 169 \Leftrightarrow x + 2y = \pm 13$$

- Pour $x + 2y = 13$

  On injecte $x = 13 - 2y$ dans la deuxième équation du système :

  $$(13 - 2y)\,y + 4y^2 = 115 \Leftrightarrow 2y^2 + 13y - 115 = 0$$

  Les solutions de cette équation sont : $y = 5$ et $y = -\dfrac{23}{2}$

  On en déduit que les solutions sont : (3.5) et $\left(36,\text{-}\dfrac{23}{2}\right)$

- Pour $x + 2y = -13$

  On injecte $x = -13 - 2y$ dans la deuxième équation du système :

  $$(-13 - 2y)\,y + 4y^2 = 115 \Leftrightarrow 2y^2 - 13y - 115 = 0$$

  Les solutions de cette équation sont : $y = -5$ et $y = \dfrac{23}{2}$

  On en déduit que les solutions sont : $(-3,-5)$ et $\left(-36,\dfrac{23}{2}\right)$

Finalement les solutions du système sont :

$$\boxed{S = \left\{(3,5),\left(36,-\frac{23}{2}\right),(-3,-5),\left(-36,\frac{23}{2}\right)\right\}}$$

---

20 juillet 07.

EXALG274 – FSA – UCL – Louvain, Juillet 2007, série 2.

Soit m un paramètre réel, résoudre et discuter dans les réels, l'inéquation suivante :

$$\frac{2}{-4}+\frac{\frac{x}{2}+(m+4)\frac{x^2}{2}-8x^4}{mx^2+x+1}<0$$

Solution proposée par Steve Tumson

Remettons l'inéquation sous forme plus agréable. Quand tout est ramené au même dénominateur, on a :

$$\frac{-16x^4+4x^2-1}{mx^2+x+1}<0$$

Le numérateur est une bicarrée. Si on pose $X=x^2$ il s'écrit :

$$-16X^2+4X-1$$

Le discriminant étant négatif, ce polynôme n'a aucune racine réelle et est toujours négatif.

Il reste à discuter le dénominateur : quand il est strictement positif, l'inéquation est vérifiée.

$$mx^2+x+1 \quad \Rightarrow \quad \rho=1-4m$$

- Si $m>\frac{1}{4}$

  Le dénominateur n'aura aucune racine réelle et sera toujours positif.

  L'inéquation sera donc toujours vérifiée $\forall x>\mathbb{R}$

- Si $m=\frac{1}{4}$

  Le dénominateur admet une racine double $x=\frac{-1}{2m}=-2$ et partout ailleurs le dénominateur est toujours positif.

  L'inéquation est donc vérifiée $\forall x>\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

- Si $m < \frac{1}{4}$

  Le dénominateur admet deux racines réelles distinctes $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4m}}{2m}$

  Il faut ici distinguer trois cas :

  - Si $0 < m < \frac{1}{4}$

    L'inéquation est vérifiée $\forall x \in \left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{1-4m}}{2m}\right[\cup \left]\frac{-1+\sqrt{1-4m}}{2m}, +\infty\right[$

  - Si $m = 0$

    L'inéquation est vérifiée $\forall x > -1$

  - Si $m < 0$

    L'inéquation est vérifiée $\forall x \in \left]\frac{-1-\sqrt{1-4m}}{2m}, \frac{-1+\sqrt{1-4m}}{2m}\right[$

---

20 juillet 07.

EXALG275 – FSA – UCL – Louvain, Juillet 2007, série 2.

Les équipes de Julien et de Stivy s'affrontent à un jeu de hasard. Elles jouent avec des jetons et des dollars et nous voulons trouver le nombre de personnes dans l'équipe de Julien, le nombre de personnes dans l'équipe de Stivy ainsi que la valeur d'un jeton en dollars. Les données du problème sont les suivantes :

A chaque partie du jeu, les sommes misées sont placées dans un pot. Le pot est vide au début de chaque partie et toute somme gagnée est prise dans le même pot.

Partie 1. Chaque membre de l'équipe de Stivy mise 4 jetons, soit un de plus que chaque membre de l'équipe de Julien. C'est Julien qui remporte avec chance la première partie et chaque membre de son équipe gagne 2 dollars. Il reste dans le pot 184 dollars, que récupère le croupier.

Partie 2. Les mises recommencent et chaque membre de l'équipe de Stivy mise 6 jetons alors que chaque membre de l'équipe de Julien n'en mise que 5. L'équipe de Stivy gagne et chaque membre récupère 10 jetons. Le croupier veut alors consoler l'équipe de Julien en donnant à chaque membre 3 dollars. Il ne reste plus alors que 96 dollars dans le pot qui sont récupérés par le croupier.

Partie 3. Chaque membre de l'équipe de Julien mise 6 jetons alors que chaque membre de l'équipe de Stivy n'en mise que 2. A nouveau, l'équipe de Stivy gagne avec talent et chaque membre de l'équipe reçoit le double de sa mise. Le croupier essaie alors en vain de retenir l'équipe de Julien en donnant 4 dollars à chaque membre. Le jeu se termine donc et le croupier vide le pot qui contient 168 dollars.

Solution proposée par Steve Tumson

Soient :

- x la valeur en dollars d'un jeton
- S le nombre de joueurs dans l'équipe de Stivy
- J le nombre de joueurs dans l'équipe de Julien

Le système s'écrit : $\begin{cases} 4xS+3xJ-2J=184 \\ 6xS+5xJ-10xS-3J=96 \\ 2xS+6xJ-4xS-4J=168 \end{cases}$

Ou encore : $\begin{cases} 4xS+(3x-2)J=184 \\ -4xS+(5x-3)J=96 \\ -2xS+(6x-4)J=168 \end{cases}$

L'addition de la 1ère et 2ème ligne donne :

$$(8x-5)J=280 \Leftrightarrow J=\frac{280}{8x-5}$$

L'addition de la 1ère et du double de la 3ème ligne donne :

$$(15x-10)J=520 \Leftrightarrow J=\frac{520}{15x-10}$$

On écrit donc : $\frac{280}{8x-5}=\frac{520}{15x-10}$

On trouve donc la valeur de x et il en découle les deux autres valeurs :

$$\boxed{\begin{array}{l} x=5 \\ J=8 \\ S=4 \end{array}}$$

20 juillet 07.

EXALG276 – FPMS – Mons, Juillet 2005 (ALG05.02).

Déterminez les nombres réels *a* et *b* pour que $z : 1 + i$ soit racine de

$$z^5 + az^3 + b = 0$$

Solution proposée par Steve Tumson

Exercice 1 (ALG05.02) Déterminer les nombres réels a et b pour que $z = 1+i$ soit racine de $z^5 + az^3 + b = 0$.

Solution Puisque $z = 1 + i$ est racine du polynôme, on a $P(z) = 0$. Et donc,

$$(1+i)^5 + a(1+i)^3 + b = 0.$$

Or, $(1+i)^2 = 2i$, $(1+i)^3 = (2i-2)$, $(1+i)^4 = -4$ et $(1+i)^5 = -4-4i$. Ainsi, on peut écrire que

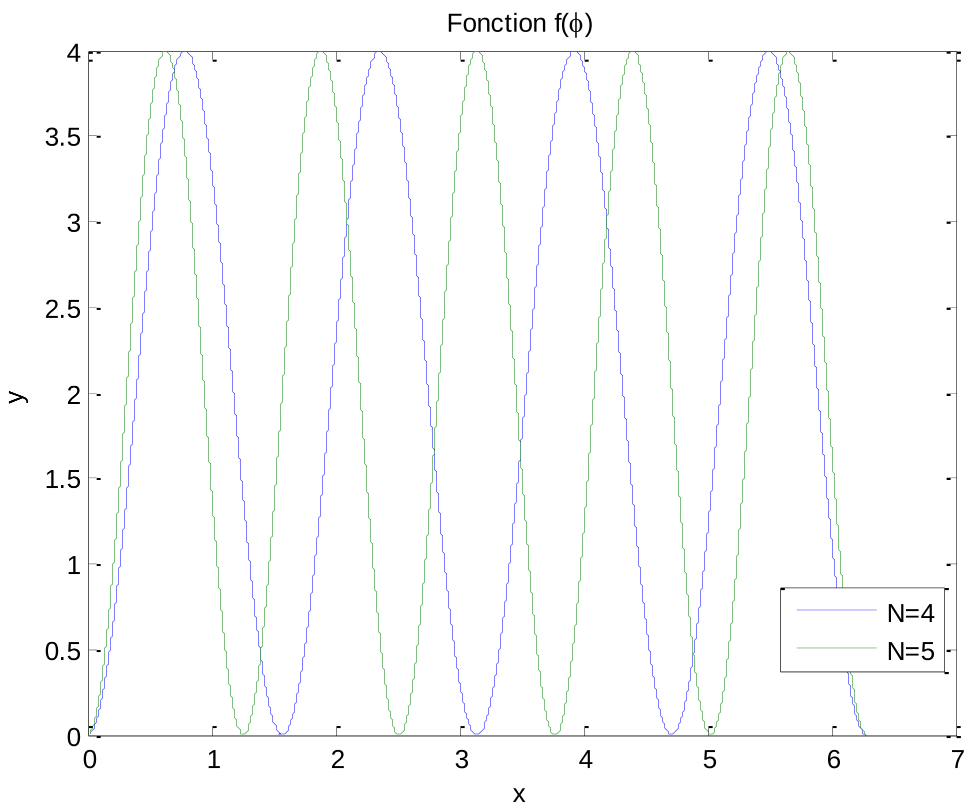
$$\begin{aligned} (-4-4i) + a(2i-2) + b &= 0 \\ (-4-2a+b) + i(-4+2a) &= 0 \end{aligned}$$

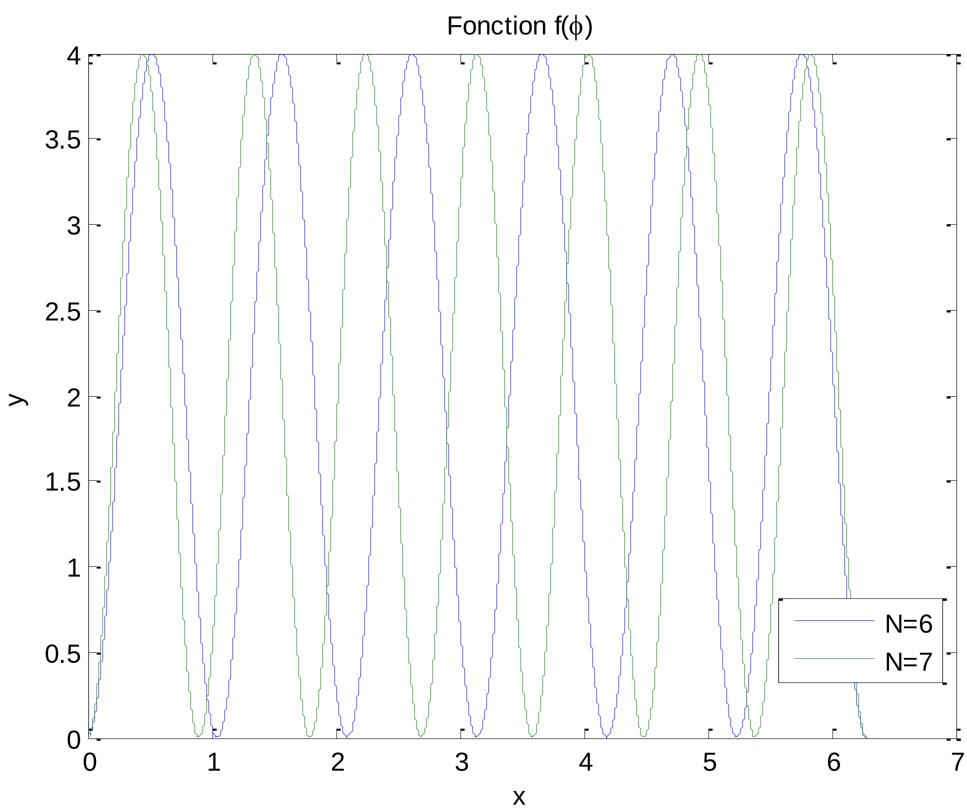
Un nombre complexe étant nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles, on tire de la dernière équation:

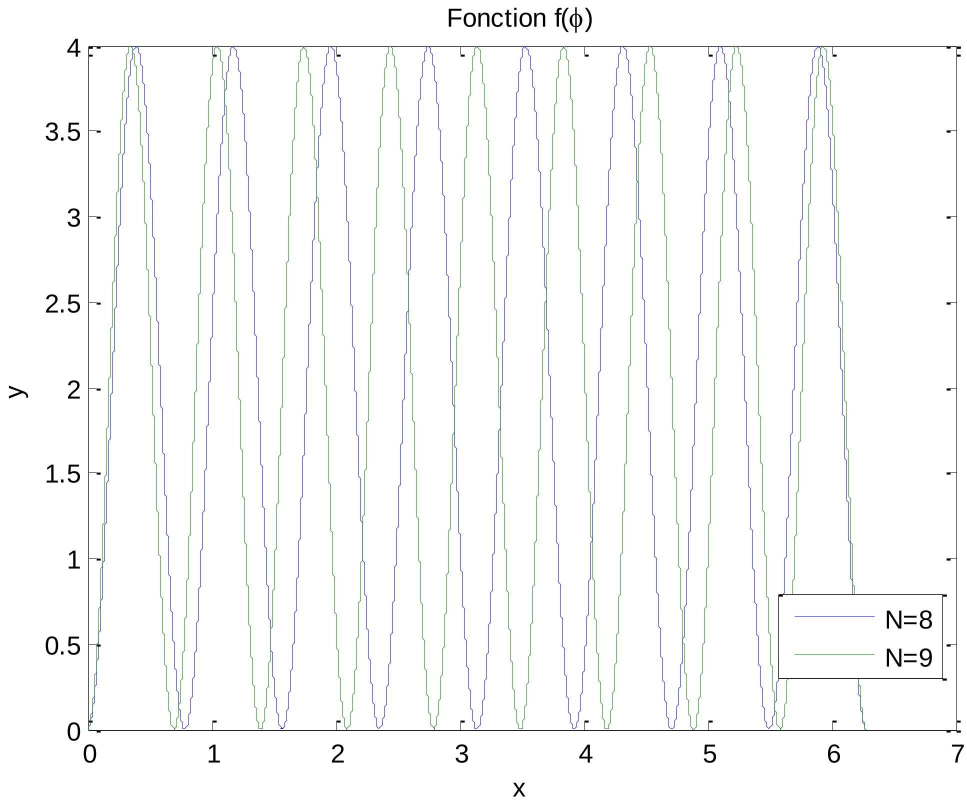
$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} -4 & +2a & & = & 0 \\ -4 & -2a & +b & = & 0 \end{array} \right.$$

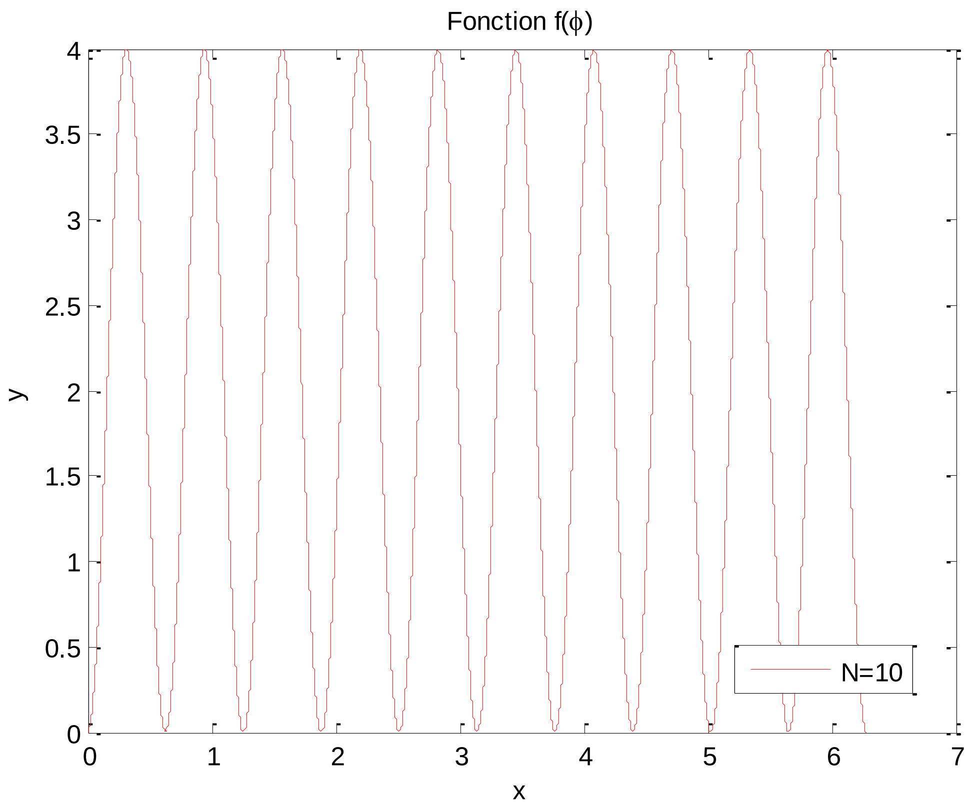
et donc:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b & = & 8 \end{array} \right.$$


Fonction f(ϕ)
y
x
N=4
N=5


Fonction f(ϕ)
y
x
N=6
N=7





20 juillet 07.

EXALG277 – FPMS – Mons, Juillet 2004.

Résoudre, en fonction du paramètre $m \geq 0$, le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} 2x - my = 1 \\ \sqrt{\dfrac{y}{x}} < 3 \end{cases}$$

x et y sont des variables réelles.

Solution proposée par Steve Tumson

D'abord les conditions d'existence : la racine carrée nous suggère que y et x doivent être de même signe et x doit être différent de zéro.
Deux cas sont donc à discuter : x et y positifs et négatifs.

- Pour x et y positifs

$$\begin{cases} 2x - my = 1 \\ \dfrac{y}{x} < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-1}{m} = y \\ \dfrac{y}{x} < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{mx} < 9 \Leftrightarrow (2-9m)x - 1 < 0$$

La question est donc : quand la droite de coefficient $(2-9m)$ est elle strictement négative ?

Cette droite s'annule en $x = \dfrac{1}{2-9m}$

Si la droite est croissante, donc $0 \leq m < \dfrac{2}{9}$, la solution est $0 < x < \dfrac{1}{2-9m}$ et $0 < y < \dfrac{9}{2-9m}$

Si la droite est décroissante, donc $m > \dfrac{2}{9}$, la solution est $x > \dfrac{1}{2-9m}$ et $y > \dfrac{9}{2-9m}$

Pour $m = \dfrac{2}{9}$, l'inéquation est vérifiée $\forall x, y \in \mathbb{R}_0^+$

- Pour x et y négatifs

$$\begin{cases} 2x - my = 1 \\ \dfrac{y}{x} < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-1}{m} = y \\ \dfrac{y}{x} < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{mx} < 9 \Leftrightarrow (2-9m)x - 1 > 0$$

La question est donc : quand la droite de coefficient $(2-9m)$ est elle strictement positive ?

Cette droite s'annule en $x = \dfrac{1}{2-9m}$

Si la droite est croissante, donc $0 \leq m < \dfrac{2}{9}$, la solution est $\dfrac{1}{2-9m} < x < 0$ et $\dfrac{9}{2-9m} < y < 0$

Si la droite est décroissante, donc $m > \dfrac{2}{9}$, la solution est $x < \dfrac{1}{2-9m}$ et $y < \dfrac{9}{2-9m}$

Pour $m = \dfrac{2}{9}$, l'inéquation n'est jamais vérifiée

---

20 juillet 07.

EXALG278 – FPMS – Mons, Juillet 2005 (ALG05.17)

Déterminez *m* tel que l'inégalité suivante soit vérifiée quelle que soit la valeur de $x \in \mathbb{R}$

$$(m+1)x^2 < (m-1)(2x-3)$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

Solution

$$\begin{array}{rcl} (m+1)x^2 - (m-1)(2x-3) & < & 0 \\ (m+1)x^2 + (1-m)2x + 3(m-1) & < & 0 \end{array}$$

Conditions pour qu'un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ soit inférieur à zéro pour tout x:

- $a < 0$
- pas de racine : $b^2 - 4ac < 0$

Appliquons:

- $a < 0$: $m + 1 < 0$ donc $m < -1$
- $b^2 - 4ac < 0$: $4(1-m)^2 - 4(m+1)(m-1)3 < 0$ donc $m^2 + m - 2 > 0$ c'est-à-dire: $(m-1)(m+2) > 0$ et il faut $m < -2$ ou $m > 1$.

L'ensemble des conditions conduit à la condition finale sur m:

$$m < -2.$$

---

28 juillet 07.

EXALG279 – FPMS – Mons, Juillet 2005 (ALG05.04).

Soient les fonctions :

$$f(x) = |x| + |x-1|$$

$$g(x) = |x+1|$$

Définies pour tout $x \in \mathbb{R}$

Résolvez l'équation $f(x) = g(x)$ de deux façons : graphique et algébrique.

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

Solution

- **Graphiquement** Voir figure 1. On vérifie que:
  - pour $x = 0$, $f(x) = g(x) = 1$;
  - pour $x = 2$, $f(x) = g(x) = 3$.

- **Algébriquement**

  $f(x) = |x| + |x-1|$

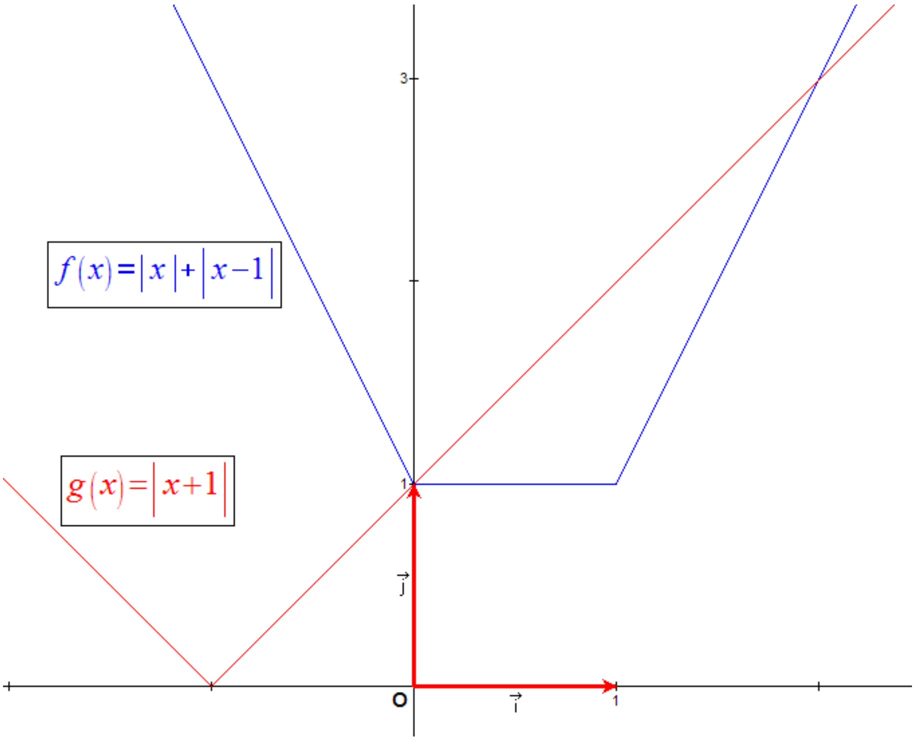
  $$\begin{array}{lll} \text{si} & x \leq 0: & f(x) = -x-(x-1) = 1-2x \\ \text{si} & 0 < x < 1: & f(x) = x-(x-1) = 1 \\ \text{si} & x \geq 1: & f(x) = x+x-1 = 2x-1. \end{array}$$

  $g(x) = |x+1|$

  $$\begin{array}{lll} \text{si} & x \leq -1: & g(x) = -x-1 \\ \text{si} & x > -1: & g(x) = x+1. \end{array}$$

  Évaluons les possibles intersections:

- si $x \leq -1$: $g(x) = -x-1$ et $f(x) = 1-2x$: on aurait $-x-1 = 1-2x$ et $x = 2$ IMPOSSIBLE
- si $-1 < x \leq 0$: $g(x) = x+1$ et $f(x) = 1-2x$: on a $x+1 = 1-2x$ donc $x = 0$
- si $0 < x < 1$: $g(x) = x+1$ et $f(x) = 1$ et donc $x = 0$ (pas dans le domaine $0 < x < 1$ mais déjà calculé au point précédent)
- si $x \geq 1$: $g(x) = x+1$ et $f(x) = 2x-1$: on a $x+1 = 2x-1$ et donc $x = 2$.



28 juillet 07.