Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 3

EXALG030 – EXALG039

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

1 avril 03

EXALG030 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1997.

Pour quelles valeurs réelles de m le trinôme $x^2 + mx + m$ est-il strictement positif dans l'intervalle [0, 1]
Suggestion : Discuter la position de O et 1 par rapport aux racines du trinôme quand il y en a.

On a $x^2+mx+m=0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\left(-m-\sqrt{m^2-4m}\right) \\ x_2 = \frac{1}{2}\left(-m+\sqrt{m^2-4m}\right) \end{cases}$

D'où, on déduit les conditions d'existence : $m \leq 0$ et $m \geq 4$

A) Si $m<0$

* Il faut soit l'ordre suivant $\underline{x_1 \quad x_2 \quad 0 \quad 1}$

  Donc $x_2 = \frac{1}{2}\left(-m+\sqrt{m^2-4m}\right) < 0 \rightarrow$ Ce qui est impossible

* Soit il faut l'ordre suivant $\underline{0 \quad 1 \quad x_1 \quad x_2}$

  Donc $x_1 = \frac{1}{2}\left(-m-\sqrt{m^2-4m}\right) > 1 \rightarrow \sqrt{m^2-4m} < -2-m$

  • Or une racine est toujours positive $\rightarrow \quad m<-2$

  • De plus : $m^2-4m < 4+4m+m^2 \rightarrow m > -\frac{1}{2}$

  Les conditions $m<-2$ *et* $m>-\frac{1}{2}$ sont incompatibles.

B) $\underline{\text{Si } m=0}$, le trinôme devient : x^2 qui a pour racine $x=0$. Donc à exclure .

C) $\underline{\text{Si } 0<m<4}$, le Δ est négatif et le trinôme est toujours positif

D) Si $\underline{m=4}$, le trinôme devient : $(x+2)^2$ qui a pour racine $x=-2$.
Le trinôme est positif dans l'intervale

E) $\underline{\text{Si } m>4}$

* Il faut soit l'ordre suivant $\underline{x_1 \quad x_2 \quad 0 \quad 1}$

  Donc $x_2 = \frac{1}{2}\left(-m+\sqrt{m^2-4m}\right) < 0 \rightarrow m > \sqrt{m^2-4m} \rightarrow m^2 > m^2-4m$

  Ce qui est toujours vérifié.

* Soit il faut l'ordre suivant $\underline{0 \quad 1 \quad x_1 \quad x_2}$

  Donc $x_1 = \frac{1}{2}\left(-m-\sqrt{m^2-4m}\right) > 1 \rightarrow$ Ce qui est impossible.

Conclusion : $m>0$

EXALG031 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1997.

Déterminer le nombre de racines réelles distinctes de $x^4 - mx^2 + m$

C'est une équation bicarée: $\rightarrow\ x^2 = m \pm \sqrt{m^2 - 4m} \ \rightarrow\ x = \pm\sqrt{m \pm \sqrt{m^2 - 4m}}$

CE : 1) $m^2 - 4m \geq 0 \ \rightarrow\ m \leq 0$ et $m \geq 4$

2) L'autre condition d'existence sera discutée par après.

1) $m > 4$

$a)\ x = \pm\sqrt{m + \sqrt{m^2 - 4m}}$

$CE : m + \sqrt{m^2 - 4m} \geq 0 \ \rightarrow\ m \geq -\sqrt{m^2 - 4m}$ Toujours vérifié.

$b)\ x = \pm\sqrt{m - \sqrt{m^2 - 4m}}$

$CE : m - \sqrt{m^2 - 4m} \geq 0 \ \rightarrow\ m \geq \sqrt{m^2 - 4m} \ \rightarrow\ m^2 \geq m^2 - 4m$

$\rightarrow\ 0 \geq -4m$ Toujours vérifié.

Donc si m > 4, on a 4 racines distinctes.

2) $m < 0$

$a)\ x = \pm\sqrt{m + \sqrt{m^2 - 4m}}$

$CE : m + \sqrt{m^2 - 4m} \geq 0 \ \rightarrow\ m \geq -\sqrt{m^2 - 4m} \ \rightarrow\ m^2 \leq m^2 - 4m$

$0 \leq -4m$ Toujours vérifié.

$b)\ x = \pm\sqrt{m - \sqrt{m^2 - 4m}}$

$CE : m - \sqrt{m^2 - 4m} \geq 0 \ \rightarrow\ m \geq \sqrt{m^2 - 4m}$ Impossible

Donc si $m < 0$, on a 2 racines distinctes.

3) $m = 4$

$\rightarrow\ x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \ \rightarrow\ (x^2 - 2)^2 = 0 \ \rightarrow\ x = \pm\sqrt{2}$

Deux racines distinctes.

4) $m = 0$

$\rightarrow\ x^4 = 0 \ \rightarrow\ x = 0$ Une racine distincte.

Conclusion :

$m < 0$	2 racines distinctes
$m = 0$	1 racine distincte
$0 < m < 4$	Pas de racines réelles
$m = 4$	2 racines distinctes
$m > 4$	4 racines distinctes

EXALG032 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1996.

Donner le nombre de solutions strictement positives de l'équation

$$(m^2-1)x^2+2mx-\sqrt{2}m=0$$

où m est un paramètre réel.

$$x=-m\pm\sqrt{m^2+\sqrt{2}m\left(m^2-1\right)}=-m\pm\sqrt{m\left(\sqrt{2}m^2-m+\sqrt{2}\right)}$$

$CE:\ \ m\left(\sqrt{2}m^2-m+\sqrt{2}\right)\geq 0$

1) Le trinôme $\sqrt{2}m^2-m+\sqrt{2}$ est toujours positif car son Δ est <0
2) $m\geq 0$

$\underline{A)\ m=0}\quad -x^2=0\ \rightarrow\ x=0$

$\underline{B)\ m>0}$

$*$ Pour avoir deux racines positives, il faut l'ordre suivant : $0<x_1<x_2$

C'est-à-dire $x_1>0.\ \rightarrow\ x_1=-m-\sqrt{m\left(\sqrt{2}m^2-m+\sqrt{2}\right)}>0$

$\rightarrow\ -m>\sqrt{m\left(\sqrt{2}m^2-m+\sqrt{2}\right)}$ Ce qui est impossible.

$*$ Pour avoir une racine positive, il faut l'ordre suivant : $x_1<0<x_2$

C'est-à-dire $x_2>0.\ \rightarrow\ x_1=-m+\sqrt{m\left(\sqrt{2}m^2-m+\sqrt{2}\right)}>0$

$\rightarrow\ m<\sqrt{m\left(\sqrt{2}m^2-m+\sqrt{2}\right)}\ \rightarrow\ m^2<m\left(\sqrt{2}m^2-m+\sqrt{2}\right)$

$\rightarrow\ \sqrt{2}m^2-2m+\sqrt{2}>0$ Le $\Delta=4-4.2=-4$ est négatif. L'inéqualité est toujours vérifié.

<u>Conclusion</u> : Une seule racine positive.

EXALG033 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1996.

Quelles conditions faut-il imposer aux nombres réels a et b pour que le polynôme $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + 1$ possède deux racines réelles distinctes et opposées ?

Soit m et $-m$ les deux racines ($m > 0$). Le polynôme peut se mettre sous la forme :

$$(x+m)(x-m)(x^2+px+q)=0$$

$$(x^2-m^2)(x^2+px+q)=x^4+px^3+(q-m^2)x^2-m^2px-m^2q=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} p=1 \\ q-m^2=a \\ -m^2p=b \\ -m^2q=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p=1 \\ q=a+m^2 \\ -m^2=b \quad (\text{donc } b<0) \\ -m^2(a+m^2)=1 \end{cases}$$

Des deux dernières équations, on tire : $b(a-b)=1 \rightarrow a=\dfrac{b^2+1}{b}$ avec $b<0$

Exemple:

$b=-1 \rightarrow a=-2 \rightarrow m=1$. Donc:

$$x^4+x^3-2x^2-x+1=(x-1)(x+1)(x^2+x-1)=0$$

EXALG034 – Polytech, UMons, questions-types 2000-2001.

Résoudre :

$$\sqrt{10-3x}-\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+17}=0$$

CE :

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ 10-3x\geq 0 & \rightarrow x\leq \dfrac{10}{3} \\ 2)\ x+3\geq 0 & \rightarrow x\geq -3 \\ 3)\ 4x+17\geq 0 & \rightarrow x\geq -\dfrac{17}{4} \end{array}\right\} \rightarrow -3\leq x\leq \frac{10}{3}$$

$$\sqrt{10-3x}=\sqrt{x+3}+\sqrt{4x+17}$$

$$10-3x=x+3+2\sqrt{(x-3)(4x+17)}+4x+17$$

$$-(5+4x)=\sqrt{(x+3)(4x+17)}$$

Cette dernière équation rajoute une condition : $x\leq -\frac{5}{4}$

car une racine carrée est toujours positive.

$$25+40x+x^2=4x^2+12x+17x+51$$

$$12x^2+11x-26=0$$

$$\rightarrow x=\frac{-11\pm\sqrt{121+4\times 26\times 12}}{24}=\frac{-11\pm 37}{24}\rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=\dfrac{13}{12}>-\dfrac{5}{4} \text{ donc à rejeter.} \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{x=-2}$

CE :

1) $10-3x \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \leq \frac{10}{3}$

2) $x+3 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq -3$

3) $4x+17 \geq 0 \rightarrow \quad x \geq -\frac{17}{4}$

$\rightarrow \quad -3 \leq x \leq \frac{10}{3}$

$\sqrt{10-3x} = \sqrt{x+3} + \sqrt{4x+17}$

$10-3x = x+3+2\sqrt{(x+3)(4x+17)} + 4x+17$

$-(5+4x) = \sqrt{(x+3)(4x+17)}$

$25+40x+x^2 = 4x^2+12x+17x+51$

$12x^2+11x-26=0$

$\rightarrow \quad x = \frac{-11 \pm \sqrt{121+4.26.12}}{24} = \frac{-11 \pm 37}{24}$

$x_1 = -2$

$x_2 = 1.083 \approx 1$ *or* $\sqrt{10\text{-}3} - \sqrt{x+3} - \sqrt{4x+17} \neq 0$ *donc à rejeter.*

EXALG035 – Polytech, UMons, questions-types 2000-2001.

Résoudre l'inéquation :

$$\frac{2x^2-x-3}{3x^2-2x-5}\le 5 \qquad x\in\Re,\ x\neq 1$$

$$\frac{2x^2-x-3}{3x^2-2x-5}\le 5$$

CE :

$$3x^2-2x-5=0 \ \rightarrow\ (x+1)\left(x-\frac{5}{3}\right)=0 \ \rightarrow\ x\neq 1,\ x\neq\frac{5}{3}$$

D'autre part :

$$\frac{2x^2-x-3}{3x^2-2x-5}\le 5 \ \rightarrow\ \frac{2x^2-x-3}{3x^2-2x-5}-5\le 0$$

$$\rightarrow\ \frac{2x^2-x-3-15x^2+10x+25}{3x^2-2x-5}=\frac{-13x^2+9x+22}{3x^2-2x-5}\le 0$$

Le numérateur donne : $-13x^2+9x+22=-(x+1)\left(x-\frac{22}{13}\right)$

Tableau des signes :

		-1		$\frac{5}{3}$		$\frac{22}{13}$	
$-13x^2+9x+22$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$3x^2-2x-5$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
	$-$		$-$		$+$		$-$

Conclusion: $x\le\frac{5}{3} \quad x\ge\frac{22}{13}$

Note:

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-x-3}{3x^2-2x-5}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)(3x-5)}=\lim_{x\to-1}\frac{(2x-3)}{(3x-5)}=\frac{5}{8}\le 5$$

Donc, pour $x=-1$, la vraie valeur de la forme indéterminée vérifie l'inéquation.

EXALG036 – Polyetch, UMons, questions-types 2000-2001.

Discuter en fonction de la valeur du paramètre *m*, le nombre de solutions de l'équation :

$$2\cos^2 x - \cos x - 2m - 1 = 0 \qquad \text{avec} \quad 0 \le x < 2\pi$$

Soit $y = \cos x$ avec $-1 \le y \le 1$

L'équation devient : $2y^2 - y + 2m - 1 = 0 \rightarrow y = \dfrac{1 \pm \sqrt{9-16m}}{4}$

Ce qui implique la CE : $m \le \dfrac{9}{16}$

Identifions les points remarquables :

1) $y = \dfrac{1+\sqrt{9-16m}}{4} \le 1 \rightarrow \sqrt{9-16m} \le 3 \rightarrow m \le 0$

2) $y = \dfrac{1+\sqrt{9-16m}}{4} \ge -1 \rightarrow \sqrt{9-16m} \ge -5 \rightarrow$ Toujours vérifié

3) $y = \dfrac{1-\sqrt{9-16m}}{4} \le 1 \rightarrow -\sqrt{9-16m} \le 3 \rightarrow$ Toujours vérifié

4) $y = \dfrac{1-\sqrt{9-16m}}{4} \ge -1 \rightarrow -\sqrt{9-16m} \ge -5 \rightarrow m \ge -1$

Les points remarquables sont donc : $m = -1$; $m = 1$ et $m = \dfrac{9}{16}$

1	$m=-1$	$y = \dfrac{1\pm 5}{4}$	$y_1 = \dfrac{6}{4}$	A rejeter	1 solution : $x = 0$
			$y_2 = -1$	$\cos x = -1$	
				$\cos(-x) = -1$	
2	$-1 < m < 0$	$y = \dfrac{1\pm\sqrt{\Delta}}{4}$	$y_1 > 1$	A rejeter	2 solutions
			y_2	$\cos x = y_2$	
				$\cos(-x) = y_2$	
3	$m = 0$	$y = \dfrac{1\pm 3}{4}$	$y_1 = -\dfrac{3}{4}$	$\cos x = -\dfrac{3}{4}$	3 solutions
				$\cos(-x) = -\dfrac{3}{4}$	
			$y_2 = 1$	$\cos x = 1$	
				$\cos(-x) = 1$	
4	$0 < m < \dfrac{9}{16}$	$y = \dfrac{1\pm\sqrt{\Delta}}{4}$	y_1	$\cos x = y_1$	4 solutions
				$\cos(-x) = y_1$	
			y_2	$\cos x = y_2$	
				$\cos(-x) = y_2$	
5	$m = \dfrac{9}{16}$	$y = \dfrac{1}{4}$		$\cos x = \dfrac{1}{4}$	2 solutions
				$\cos(-x) = \dfrac{1}{4}$	

EXALG037 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2000.

Résoudre l'équation :

$$Z^2 = -\frac{3}{\sqrt{5}}|Z| + 4i \quad (Z \in C)$$

Suggestion : égaler les modules des deux membres pour déterminer $|Z|$.

$Z = a + bi \qquad |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$Z^2 = a^2 - b^2 + 2abi \qquad |Z^2| = \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2}$

$$= \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2 + b^2 = |Z|^2$$

De même :

$$\left|-\frac{3}{\sqrt{5}}|Z| + 4i\right| = \sqrt{\frac{9}{5}|Z|^2 + 16} \to |Z|^2 = \sqrt{\frac{9}{5}|Z|^2 + 16} \to |Z|^4 = \frac{9}{5}|Z|^2 + 16$$

Soit : $t = |Z|^2$ (t est un réel positif)

On obtient l'équation : $5t^2 - 9t - 80 = 0 \to \begin{cases} t = 5 \\ t = -\frac{16}{5} \quad \text{A rejeter} \end{cases}$

Si $t = 5 \to |Z|^2 = 5 \to |Z| = \sqrt{5}$ $(-\sqrt{5}$ est à rejeter$) \to \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$

Or $Z^2 = a^2 - b^2 + 2abi = -\frac{3}{\sqrt{5}}\sqrt{a^2 + b^2} + 4i = -3 + 4i$

Il reste à prendre la racine carrée de ce nombre :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ 2ab = 4 \quad (\text{donc } a \text{ et } b \text{ de même signe}) \end{cases} \to \begin{cases} 2a^2 = 2 \to a = \pm 1 \\ 2b^2 = 8 \to b = \pm 2 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{Z = 1 + 2i \quad \text{et} \quad Z = -1 - 2i}$

EXALG038 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1999.

a) Calculer $(1+\omega)^n$ ou ω est une racine cubique de 1 (n entier positif)
b) Combien de valeurs différentes obtient-on quand ω ≠ de 1. Lesquels ?

$$1=\text{cis}(k360) \;\to\; \sqrt[3]{1}=\text{cis}(k120)$$

Donc 1) $\sqrt[3]{1}=1$

2) $\sqrt[3]{1}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2) $\sqrt[3]{1}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$a)$ Soit $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\text{cis}120$

$1+\omega=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\text{cis}\,60$

n	angle	$(1+\omega)^n$
1	60	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
2	120	$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
3	180	-1
4	240	$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
5	300	$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
6	360	1

$a)$ Soit $\omega=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\text{cis}\,240$

$1+\omega=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\text{cis}\,300$

Le tableau est le même, mais les angles seront en ordre décroissant.

Conclusion : 6 solutions différentes.

EXALG039 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1999.

Calculer les racines carrées de –16–30i

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -16 \\ 2ab = -30 \quad \text{(donc } a \text{ et } b \text{ de signes contraires)} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -16 \\ a^2 + b^2 + \sqrt{16^2 + 30^2} = 34 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a^2 = 18 \\ 2b^2 = 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \pm 3 \\ b = \pm 5 \end{cases}$$

Solutions : $3 - 5i \quad et \quad -3 + 5i$