Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 31

EXALG310 – EXALG319

http://www.matheux.c.la

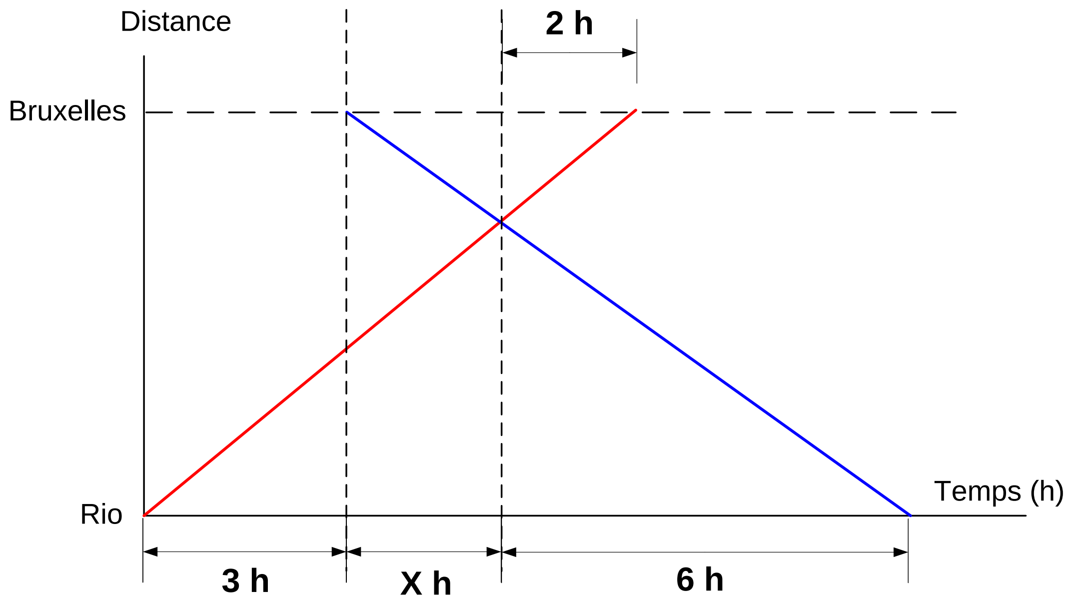
Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Juillet 08

EXALG310 – FSA – UCL – Louvain, juillet 2008, série 1.

Deux avions volent dans des directions opposées : l'un fait le trajet de Bruxelles à Rio, l'autre le trajet en sens inverse. La longueur du trajet est de 9300 km (cfr. :Google Earth).
Celui qui a décollé de Rio vers Bruxelles a quitté son point de départ 3 heures AVANT le moment de décollage de celui qui vole vers Rio. Pour le calcul on supposera que ces avions volent chacun à vitesse constante mais que celles-ci ne sont pas nécessairement égales à cause des vents dominants.
Ces avions se croisent quelque part sur le trajet. Après cette rencontre, l'avion qui vole vers Bruxelles met encore 2h pour achever son trajet alors que celui qui vole vers Rio met encore 6h.

Déterminez la distance entre Bruxelles et le point de rencontre.



Soit x le temps entre le décollage de l'avion venant de Bruxelles et le croissement.

Soit v_R, la vitesse de l'avion venant de Rio

Soit v_B, la vitesse de l'avion venant de Bruxelles

On a directement les équations suivantes.

$$\begin{cases} (x+5)v_R = 9300 & \text{car l'avion de Rio vole } x+5 \text{ heures} \\ (x+6)v_B = 9300 & \text{car l'avion de Bruxelle vole } x+6 \text{ heures} \\ 2v_R + 6v_B = 9300 & \text{car après le croissement l'avion de Rio vole encore 2 heures et celui} \\ & \text{de Bruxelles vole encore 6 heures} \end{cases}$$

Ce qui donne, en éliminant v_R et v_B :

$$\frac{2}{x+5} + \frac{6}{x+6} = 1 \rightarrow 2(x+6) + 6(x+5) = (x+5)(x+6) \rightarrow 2x + 12 + \cancel{6x} + \cancel{30} = x^2 + 5x + \cancel{6x} + \cancel{30}$$

$$\rightarrow x^2 + 3x - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-3+\sqrt{9+48}}{2} = 2.27\ h \\ x = \dfrac{-3-\sqrt{9+48}}{2} < 0 \text{ A rejeter} \end{cases}$$

Les vitesses des avions sont alors : $\begin{cases} v_B = \dfrac{9300}{6+2.27} = 1124.5\ km/h \\ v_R = \dfrac{9300}{5+2.27} = 1279\ km/h \end{cases}$

Et la distance Bruxelles - point de rencontre : $d = 1124.5 \times 2.27 = \boxed{2552\ km}$

Si on note :
v_B la vitesse de l'avion venant de Bruxelles
v_R la vitesse de l'avion venant de Rio
t_B le temps de vol total de l'avion venant de Bruxelles
t_R le temps de vol total de l'avion venant de Rio

Au niveau du trajet total on écrit : $\begin{cases} 9300 = v_B t_B & (1) \\ 9300 = v_R t_R & (2) \end{cases}$

Au niveau du temps de vol, au croisement il reste 6h à parcourir à l'avion provenant de Bruxelles alors qu'il en reste encore 2 pour celui de Rio, qui est parti 3h à l'avance : la différence de temps de vol total est donc de 1h :

$$t_B - t_R = 1 \qquad (3)$$

On peut aussi voir la distance totale de Rio à Bruxelles comme la somme des trajets restant à effectuer aux deux avions après leur croisement :

$$9300 = 6v_B + (2+3)v_R \qquad (4)$$

La distance entre Bruxelles et le point de rencontre est simplement : $d = 2v_R$

De (4) on écrit : $v_B = 1550 - \frac{5}{6}v_R$

De (2) on écrit : $t_R = \frac{9300}{v_R}$

De (3) et (2) on écrit : $t_B = \frac{9300}{v_R} + 1$

En remplaçant le tout dans (1) on obtient : $9300 = \left(1550 - \frac{5}{6}v_R\right)\left(\frac{9300}{v_R} + 1\right)$

On trouve en résolvant ce second degré : $\boxed{v_R \simeq 888 km/h}$

On trouve donc une distance entre Bruxelles et le point de rencontre de :

$$\boxed{d \simeq 1776 km}$$

24 juillet 2008 (Relu par Benoit Baudelet)

EXALG311 – FPMs, Mons, juillet 2008, groupe A.

Soit une matrice carrée $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

1. Calculer le déterminant de la matrice $(A-\lambda I)$, avec $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité et $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Déterminer les valeurs de λ qui annulent ce déterminant.
3. Pour la plus petite de ces valeurs, résoudre le système
$$(A-\lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
4. Pour ce(s) vecteur(s), calculer $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

1. $B=A-\lambda I=\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}$

   $\det B=(3-\lambda)(5-\lambda)-8=15-8\lambda+\lambda^2-8=\lambda^2-8\lambda+7=(\lambda-1)(\lambda+7)$

2. $\det B=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=1 \\ \lambda=7 \end{cases}$

3. $(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow 2\begin{pmatrix} x-y \\ -2x+2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=y \end{cases}$ Système simplement indéterminé.

   Sol $=\{(r,r) \mid r \in \mathbb{R}\}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3r-2r \\ -4r+5r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}$

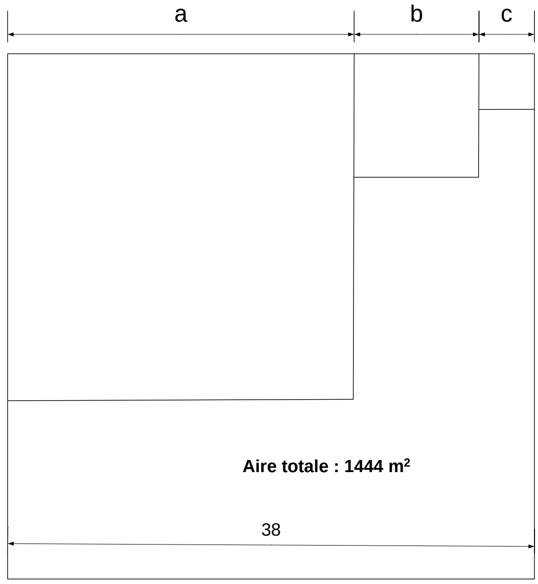
---

24 juillet 2008

EXALG312 – FPMs, Mons, juillet 2008, groupe C.

Un fermier possède un terrain carré de 38 mètres de côté dont il veut léguer la moitié à ses trois fils.
Chaque enfant aura une portion carrée du terrain. L'ainé aura la plus grande portion : la longueur en mètres du côté de sa parcelle est égale au carré de la différence entre les longueurs des côtés des deux autres parcelles.
De plus, quand on met les côtés des trois parcelles bout à bout, on obtient la longueur du côté du terrain initial.
Quelles sont les longueurs des côtés des trois parcelles carrées?

Solution proposée par Fabienne Zoetard



$38 > a > b > c$ Aire totale 1444 m^2

$$\begin{cases} a=(b-c)^2 \\ a+b+c=38 \\ a^2+b^2+c^2=722 \end{cases} \to \begin{cases} a=(b-c)^2 \\ (b-c)^2+b+c=38 \\ (b-c)^4 b^2+c^2=722 \end{cases}$$

Posons $\begin{cases} x=b-c \\ y=b+c \end{cases} \to \begin{cases} x+y=2b \\ y-x=2c \end{cases}$

Donc, on obtient : $\begin{cases} x^2+y=38 \\ x^4+\dfrac{1}{4}(x+y)^2+\dfrac{1}{4}(y-x)^2=722 \end{cases}$

$$\to \begin{cases} x^2+y=38 \\ 4x^4+x^2+y^2+\cancel{2xy}+y^2+x^2-\cancel{2xy}=4\times 722 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x^2+y=38 \\ 2x^4+x^2+y^2=2\times 722 \end{cases} \to \begin{cases} x^2+y=38 \\ 2(38-y)^2+38-y+y^2=2\times 722 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x^2+y=38 \\ 2\times 1444+2y^2-4\times 38y+38-y+y^2=2\times 722 \end{cases}$$

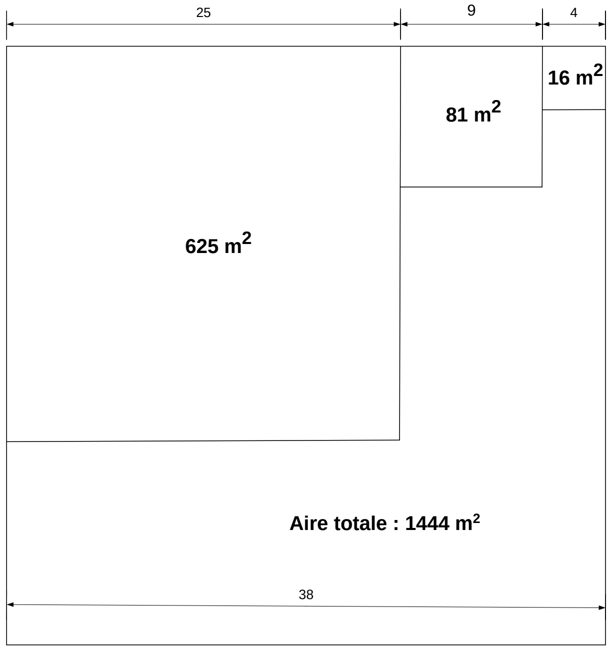
$$\to \begin{cases} x^2+y=38 \\ 3y^2-153y+1482=0 \to y=\dfrac{153\pm 75}{6} \to \begin{cases} y=38 \\ y=13 \end{cases} \end{cases}$$

1) $y=38 \to x=0 \to \begin{cases} b+c=38 \\ b-c=0 \end{cases} \to b=c=19$ A rejeter

2) $y=13 \to x^2=25 \to \begin{cases} x=5 \to \begin{cases} b+c=13 \\ b-c=5 \end{cases} \to \begin{cases} b=9 \\ c=4 \end{cases} \\ x=-5 \to \begin{cases} b+c=13 \\ b-c=-5 \end{cases} \to \begin{cases} b=4 \\ c=9 \end{cases} \end{cases}$

Ces solutions sont équivalentes.

Conclusion : $\boxed{a=25, b=9, c=4}$



24 juillet 2008

EXALG313 – FPMs, Mons 2002, groupe A.

Discutez en fonction des valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de :

$$\sin^4 x + 2m\cos^2 x = 0$$

Solution proposée par Steve Tumson

$$\sin^4 x + 2m\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin^4 x + 2m\left(1-\sin^2 x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin^4 x - 2m\sin^2 x + 2m = 0$$

$$\Rightarrow \rho = 4m^2 - 8m = 4m(m-2)$$

• Si $m = 0$ ou $m = 2 \to \rho = 0$

$$* \; m = 0 \to \sin^4 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{\text{2 solutions dans l'intervalle } [0, 2\pi[}$$

$$* \; m = 2 \to \sin^2 x = 2 \Leftrightarrow \sin x = \pm\sqrt{2} \notin [-1,1] \Rightarrow \boxed{\text{Pas de solution}}$$

• Si $0 < m < 2 \to \rho < 0 \Rightarrow \boxed{\text{Pas de solution}}$

• Si $m < 0 \to \rho > 0$

$$\sin^2 x = \frac{2m \pm 2\sqrt{m(m-2)}}{2} = m \pm \sqrt{m(m-2)}$$

$$* \text{ pour } \sin^2 x = m - \sqrt{m(m-2)} \text{ , il faut } m - \sqrt{m(m-2)} \geq 0 \text{ avec } m < 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{m}_{<0} \geq \underbrace{\sqrt{m(m-2)}}_{>0} \Rightarrow \text{A rejeter !}$$

$$* \text{ pour } \sin^2 x = m + \sqrt{m(m-2)} \text{ , il faut } m + \sqrt{m(m-2)} \geq 0 \text{ avec } m < 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{m(m-2)}}_{>0} \geq \underbrace{-m}_{>0} \Leftrightarrow m(m-2) \geq m^2 \Leftrightarrow -2m \geq 0 \Rightarrow \text{Toujours vérifié !}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = m + \sqrt{m(m-2)} \Rightarrow \text{il faut encore } m + \sqrt{m(m-2)} \leq 1 \text{ avec } m < 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{m(m-2)}}_{>0} \leq \underbrace{1-m}_{>0} \Leftrightarrow m(m-2) - (1-m)^2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq 0 \Rightarrow \text{Toujours vérifié !}$$

$$\Rightarrow \sin x = \pm\sqrt{m + \sqrt{m(m-2)}} \Rightarrow \boxed{\text{4 solutions dans l'intervalle } [0, 2\pi[}$$

• Si $m > 2 \to \rho > 0$

$$\Rightarrow \sin^4 x + 2m\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\sin^4 x}_{>0} = \underbrace{-2m\cos^2 x}_{<0} \Rightarrow \boxed{\text{Pas de solution}}$$

Le 9 septembre 2008

EXALG314 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2008.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\leq\sqrt{2}(x+1)$$

Solution proposée par Steve Tumson

$$\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\leq\sqrt{2}(x+1)\qquad\rightarrow\qquad CE: x\in\mathbb{R}$$

* <u>pour $x\leq -1$</u>

$$\underbrace{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}_{>0}\leq\underbrace{\sqrt{2}(x+1)}_{\leq 0}\rightarrow\qquad \text{Jamais vérifié !}$$

* <u>pour $x> -1$</u>

$$\underbrace{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}_{>0}\leq\underbrace{\sqrt{2}(x+1)}_{>0}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)^2\leq\left(\sqrt{2}(x+1)\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+1+x^2-x+1+2\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}\leq 2x^2+2+4x$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}\leq 2x$$

* <u>pour $x\leq 0$</u>

$$\underbrace{\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}}_{>0}\leq\underbrace{2x}_{\leq 0}\qquad\rightarrow\qquad\text{Jamais vérifié !}$$

* <u>pour $x>0$</u>

$$\underbrace{\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}}_{>0}\leq\underbrace{2x}_{>0}\Leftrightarrow\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\leq 4x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4-x^3+x^2+x^3-x^2+x+x^2-x+1-4x^2\leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^4-3x^2+1\leq 0\qquad\rightarrow\qquad\text{Equation bicarrée : posons } x^2=t$$

$$\Leftrightarrow t^2-3t+1\leq 0\qquad\rightarrow\qquad\rho=5\quad\rightarrow\quad t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}>0$$

$$\Leftrightarrow\left(t-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(t-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\leq 0\Leftrightarrow\left(x^2-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x^2-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow P(x)=\underbrace{\left(x-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)}_{(1)}\underbrace{\left(x+\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)}_{(2)}\underbrace{\left(x-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)}_{(3)}\underbrace{\left(x+\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)}_{(4)}\leq 0$$

		$-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$		$-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$		$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$		$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	
(1)	−	−	−	−	−	−	−	0	+
(2)	−	0	+	+	+	+	+	+	+
(3)	−	−	−	−	−	0	+	+	+
(4)	−	−	−	0	+	+	+	+	+
$P(x)$	+	0	−	0	+	$\vert 0$	−	$0\vert$	+

La solution finale est donc :

$$\boxed{S=\left[\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}};\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right]}$$

Le 17 septembre 2008

EXALG315 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2008.

Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} ax-ay+3az=a+1 \\ (a-1)x+ay+(a+1)z=2a^2 \\ 3ax+(3a+1)y+(3a+2)z=9a+5 \end{cases}$$

Solution proposée par Steve Tumson

$$\begin{cases} ax-ay+3az=a+1 \\ (a-1)x+ay+(a+1)z=2a^2 \\ 3ax+(3a+1)y+(3a+2)z=9a+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -a & 3a \\ a-1 & a & a+1 \\ 3a & 3a+1 & 3a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+1 \\ 2a^2 \\ 9a+5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \Delta=\begin{vmatrix} a & -a & 3a \\ a-1 & a & a+1 \\ 3a & 3a+1 & 3a+2 \end{vmatrix}=-6a(2a+1)$$

$$\rightarrow \Delta_X=\begin{vmatrix} a+1 & -a & 3a \\ 2a^2 & a & a+1 \\ 9a+5 & 3a+1 & 3a+2 \end{vmatrix}=24a^4-26a^3-31a^2-8a-1$$

$$\xrightarrow{HORNER} \Delta_X=\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(24a^3-38a^2-12a-2\right)=(2a+1)\left(12a^3-19a^2-6a-1\right)$$

$$\rightarrow \Delta_Y=\begin{vmatrix} a & a+1 & 3a \\ a-1 & 2a^2 & a+1 \\ 3a & 9a+5 & 3a+2 \end{vmatrix}=\left(-12a^4+22a^3-22a^2-14a+2\right)$$

$$\xrightarrow{HORNER} \Delta_Y=\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(-12a^3+28a^2-36a+4\right)=(2a+1)\left(-6a^3+14a^2-18a+2\right)$$

$$\rightarrow \Delta_Z=\begin{vmatrix} a & -a & a+1 \\ a-1 & a & 2a^2 \\ 3a & 3a+1 & 9a+5 \end{vmatrix}=-12a^4+16a^3-a^2-8a-1$$

$$\xrightarrow{HORNER} \Delta_Y=\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(-12a^3+22a^2-12a-2\right)=(2a+1)\left(-6a^3+11a^2-6a-1\right)$$

* pour $a=0$

$$\begin{cases} 0=1 \\ -x+z=0 \\ y+2z=5 \end{cases} \rightarrow \boxed{\text{Système impossible !}}$$

* pour $a=-\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} -x+y-3z=1 \\ -3x-y+z=1 \\ -3x-y+z=1 \end{cases} \rightarrow \boxed{\text{Système simplement indéterminé : } S=\left\{\left(x;y;\frac{x+y}{2}\right)\right\}}$$

* pour $a\neq-\frac{1}{2}$ et $a\neq0$

$$\begin{cases} x=\frac{\Delta_X}{\Delta}=\frac{-12a^3+19a^2+6a+1}{6a} \\ y=\frac{\Delta_Y}{\Delta}=\frac{6a^3-14a^2+18a-2}{6a} \\ z=\frac{\Delta_Z}{\Delta}=\frac{6a^3-11a^2+6a+1}{6a} \end{cases} \rightarrow \boxed{\text{Système à solution unique}}$$

$$\boxed{S=\left\{\left(\frac{-12a^3+19a^2+6a+1}{6a};\frac{6a^3-14a^2+18a-2}{6a};\frac{6a^3-11a^2+6a+1}{6a}\right)\right\}}$$

Le 17 septembre 2008

EXALG316 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2008.

Trouvez deux nombres réels *x* et *y*, tels que leur somme soit égale à leur produit, et aussi égale à la différence de leur carré.

Solution proposée par Steve Tumson

$$\begin{cases} x+y=xy & (1) \\ x+y=x^2-y^2 & (2) \end{cases}$$

$y \neq 1$ et $y \neq 0$

$(1) \rightarrow y = xy - x \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{(y-1)}$ ($y \neq 1$ car on ne peut satisfaire $x+1=x$)

(1) dans $(2) \rightarrow xy = x^2 - y^2 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{(y-1)} = \dfrac{y^2}{(y-1)^2} - y^2 \Leftrightarrow y^2(y-1) - y^2 + y^2(y-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow y - 2 + (y-1)^2 = 0$ ($y = 0$, solution triviale !)

$\Leftrightarrow y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$\boxed{S = \left\{ \left(x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}; y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right), \left(x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}; y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right), (x=0; y=0) \right\}}$$

Le 17 septembre 2008

EXALG317 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2008.

Les parlementaires d'un pays sont amenés à voter POUR ou CONTRE une proposition de loi importante.

Après présentation de la proposition de loi et de ses motivations, chaque parlementaire présent exprime son choix POUR ou CONTRE l proposition (il n'y a ni de vote nul ni de vote blanc). On souhaite savoir quel est le nombre total de parlementaires présents, quel est le nombre de ceux-ci qui ont voté POUR ainsi que le nombre ayant voté CONTRE.
La loi a-t-elle été approuvée ?

On dispose des informations suivantes : lorsque l'on compte le nombre de bulletins POUR et que l'on y ajoute un bulletin de vote, on peut faire trois tas identiques avec les bulletins ; chacun de ces tas a la même taille que chacun des quatre tas identiques obtenus en rajoutant un bulletin de vote aux bulletins CONTRE, ou encore que chacun des cinq tas identiques obtenus en enlevant seize bulletins de vote de l'ensemble des bulletins de vote (exprimés POUR ou CONTRE).

Solution proposée par Steve Tumson

Posons les inconnues suivantes :

$$\begin{cases} \text{P : nombre de bulletins POUR} \\ \text{C : nombre de bulletins CONTRE} \\ \text{N : nombre de parlementaires} \\ \text{T : taille d'un tas de bulletin} \end{cases}$$

Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} P + C = N \\ P + 1 = 3T \\ C + 1 = 4T \\ P + C - 16 = 5T \end{cases} \Rightarrow \boxed{P = 26 \qquad C = 35 \qquad N = 61 \qquad T = 9}$$

La loi n'est donc pas approuvée !

Le 17 septembre 2008

EXALG318 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2008.

Cherchez les conditions sur m un paramètre réel pour que les racines réelles x_1 et x_2 de l'équation

$$\frac{mx}{m-1}+\frac{m+1}{x}=x+1$$

Obéissent à la condition suivante :

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<2m+1$$

Solution proposée par Steve Tumson

$$\frac{mx}{m-1}+\frac{m+1}{x}=x+1 \Leftrightarrow mx^2+(m+1)(m-1)=(x+1)x(m-1) \Leftrightarrow mx^2+\left(m^2-1\right)=mx^2+mx-x^2-x$$

$$\Leftrightarrow x^2+x\left(1-m\right)+\left(m^2-1\right)=0$$

$$\Rightarrow \rho=\left(1-m\right)^2-4\left(m^2-1\right)=-3m^2-2m+5 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{\left(m-1\right)\pm\sqrt{\rho}}{2}$$

$$\to \rho\geq 0 \Leftrightarrow m\in\left[-\frac{5}{3};1\right[$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{\left(m-1\right)+\sqrt{\rho}}+\frac{2}{\left(m-1\right)-\sqrt{\rho}}=\frac{2\left(m-1\right)-2\sqrt{\rho}+2\left(m-1\right)+2\sqrt{\rho}}{\left(\left(m-1\right)+\sqrt{\rho}\right)\left(\left(m-1\right)-\sqrt{\rho}\right)}=\frac{4\left(m-1\right)}{\left(m-1\right)^2-\rho}=\frac{1}{\left(m+1\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<2m+1 \Leftrightarrow \frac{1}{\left(m+1\right)}<2m+1 \Leftrightarrow \frac{1}{\left(m+1\right)}-2m-1<0 \Leftrightarrow \frac{-m\left(3+2m\right)}{m+1}<0$$

		$-3/2$		-1		0	
$-m$	+	+	+	+	+	0	−
$3+2m$	−	0	+	+	+	+	+
$m+1$	−	−	−	0	+	+	+
	+	0	$\boxed{-}$	0	+	/	$\boxed{-}$

$$\boxed{S=\left]-3/2;-1\right[\cup\left]0;1\right[}$$

Le 17 septembre 2008

EXALG319 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2008.

Résoudre dans les réels, l'équation suivante :

$$x\sqrt{x-3}=2x-4$$

Solution proposée par Steve Tumson

$$\begin{aligned}
&x\sqrt{x-3}=2x-4\\
&\rightarrow CE: x\geq 3\\
&\Rightarrow \underbrace{x\sqrt{x-3}}_{>0}=\underbrace{2x-4}_{>0}\Rightarrow x^2(x-3)=(2x-4)^2\\
&\xrightarrow{HORNER}(x-4)\underbrace{\left(x^2-3x+4\right)}_{>0}=0\\
&\qquad\boxed{S=\{4\}}
\end{aligned}$$

Le 17 septembre 2008