Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 32

EXALG320 – EXALG329

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Novembre 08

EXALG320 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2008.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\quad 4^x - 3^{\left(x-\frac{1}{2}\right)} = 3^{\left(x+\frac{1}{2}\right)} - 2^{2x-1}$

$$\begin{aligned}
&4^x - 3^{\left(x-\frac{1}{2}\right)} = 3^{\left(x+\frac{1}{2}\right)} - 2^{2x-1}\\
&\qquad \Leftrightarrow 2^{2x} + \frac{2^{2x}}{2} = 3^x\sqrt{3} + 3^x\frac{1}{\sqrt{3}}\\
&\qquad \Leftrightarrow \frac{3}{2}2^{2x} = \left(\sqrt{3}\right)^{2x}\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\
&\qquad \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{2}{3}\\
&\qquad \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \frac{8}{3\sqrt{3}}\\
&\qquad \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{3}\\
&\qquad \Leftrightarrow 2x = 3\\
&\qquad \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

---

10 novembre 08. Modifié le 2 juillet 2009 (Benoit Baudelet)

EXALG321 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2008.

Si α est une racine cubique non réelle de l'unité alors

a) Démontrer que $\alpha^2+\alpha+1=0$

b) En déduire que l'expression $\left(\alpha^2-\alpha+1\right)\left(1+\alpha-\alpha^2\right)$ est indépendante de α.

---

a)

Si α est une racine cubique de 1, alors α est solution de $x^3-1=0$ qui se factorise selon

$(x-1)\left(x^2+x+1\right)=0$

Le premier facteur a pour solution $x=1$ qui est réel

Le deuxième facteur est une équation du second degré dont le discriminant est négatif.

Il admet donc deux racines complexes : α et son conjugué $\overline{\alpha}$.

Ces racines complexes sont bien des racines cubique de l'unité.

Donc : $\alpha^2+\alpha+1=0$

b)

Il suffit de faire apparaître la relation précédente :

$$\left(\alpha^2-\alpha+1\right)\left(1+\alpha-\alpha^2\right)=\left(\underbrace{\alpha^2+\alpha+1}_{=0}-2\alpha\right)\left(\underbrace{\alpha^2+\alpha+1}_{=0}-2\alpha^2\right)$$

$$=(-2\alpha)\left(-2\alpha^2\right)=+4\underbrace{\alpha^3}_{=1}=4$$

---

10 novembre 2008

EXALG322 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2008..

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} (10m+7)x & - & 3y & + & (7-m)z & = & -6m \\ (2m+1)x & - & y & + & 2z & = & -2m \\ -(2+m)x & + & my & - & (m+1)z & = & 1+m^2 \end{cases} \qquad (m\in\mathbb{R})$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système

Calculons les Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10m+7 & -3 & 7-m \\ 2m+1 & -1 & 2 \\ -(2+m) & m & -(m+1) \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3=L_2+L_3} \begin{vmatrix} 10m+7 & -3 & 7-m \\ 2m+1 & -1 & 2 \\ m-1 & m-1 & -m+1 \end{vmatrix} \longrightarrow (m-1)\begin{vmatrix} 10m+7 & -3 & 7-m \\ 2m+1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_3=C_3+C_2]{C_1=C_1-C_2} (m-1)\begin{vmatrix} 10m+10 & -3 & 4-m \\ 2m+2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2(m-1)(m+1)\begin{vmatrix} 5 & 4-m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(m-1)(m+1)^2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -6m & -3 & 7-m \\ -2m & -1 & 2 \\ 1+m^2 & m & -(m+1) \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1=L_1-3L_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 7-m \\ -2m & -1 & 2 \\ 1+m^2 & m & -(m+1) \end{vmatrix} = (1-m)\begin{vmatrix} -2m & -1 \\ 1+m^2 & m \end{vmatrix}$$

$$= (1-m)\left(-2m^2+1+m^2\right) = (1-m)\left(1-m^2\right) = (1-m)^2(1+m)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 10m+7 & -6m & 7-m \\ 2m+1 & -2m & 2 \\ -(2+m) & 1+m^2 & -(m+1) \end{vmatrix}$$

Pour factoriser ce déterminant, il est plus simple de l'effectuer.

On obtient une équation de degré 4 : $\Delta_x = -2m^4 + 3m^3 + 9m^2 - 3m - 7$

On remarque que ce polynôme est nul pour $m = 1$ et $m = -1$.

Il suffit donc d'appliquer Horner deux fois :

	4	3	2	1	0
	-2	3	9	-3	-7
1		-2	1	10	7
	-2	1	10	7	0
-1		2	-3	-7	
	-2	3	7	0	

$$\rightarrow \Delta_x = (m-1)(m+1)\left(-2m^2+3m+7\right)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 10m+7 & -3 & -6m \\ 2m+1 & -1 & -2m \\ -(2+m) & m & 1+m^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3=L_3+L_2} \begin{vmatrix} 10m+7 & -3 & -6m \\ 2m+1 & -1 & -2m \\ m-1 & m-1 & (m-1)^2 \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 10m+7 & -3 & -6m \\ 2m+1 & -1 & -2m \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2=L_2+L_3} (m-1)\begin{vmatrix} 10m+7 & -3 & -6m \\ 2m+2 & 0 & -m-1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = (m-1)(m+1)\begin{vmatrix} 10m+7 & -3 & -6m \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1=C_1-C_2} (m-1)(m+1)\begin{vmatrix} 10m+10 & -3 & -6m \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = 2(m-1)(m+1)\begin{vmatrix} 5m+5 & -3 & -6m \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m-1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1=L_1+3L_3} 2(m-1)(m+1)\begin{vmatrix} 5m+5 & 0 & -3m-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = 2(m-1)(m+1)^2\begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m-1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(m-1)(m+1)^2$$

Discussion

1er cas : $m=1$: Le système devient $\begin{cases} 17x-3y+6z=-6 \\ 3x-y+2z=-2 \\ -3x+y-2z=2 \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} 17x-3y+6z=-6 \\ 3x-y+2z=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 17x-3y=-6-6z \\ 3x-y=-2-2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2+2z \end{cases}$$

Système simplement indéterminé

2ème cas : $m=-1$: Le système devient $\begin{cases} -3x-3y+10z=6 \\ -x-y+2z=2 \\ -x-y=2 \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x+3y=-6 \\ x+y=-2 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-y-2 \\ z=0 \end{cases}$$ Système simplement indéterminé

Dans les autres cas

$$x = \frac{(1-m)^2(1+m)}{-2(m-1)(m+1)^2} \rightarrow \boxed{x = \frac{1-m}{2(m+1)}}$$

$$y = \frac{(m-1)(m+1)(-2m^2+3m+7)}{-2(m-1)(m+1)^2} \rightarrow \boxed{y = \frac{2m^2-3m-7}{2(m+1)}}$$

$$z = \frac{4(m-1)(m+1)^2}{-2(m-1)(m+1)^2} \rightarrow \boxed{z=-2}$$

EXALG323 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2008..

Déterminer les valeurs réelles des paramètres a,b,c pour lesquelles

$$\begin{vmatrix} a^4 & a & 1 \\ b^4 & b & 1 \\ c^4 & c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Soit A le premier déterminant et B le deuxième

$$A = \begin{vmatrix} a^4 & a & 1 \\ b^4 & b & 1 \\ c^4 & c & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 - L_1]{L_2 = L_2 - L_1} \begin{vmatrix} a^4 & a & 1 \\ b^4 - a^4 & b-a & 0 \\ c^4 - a^4 & c-a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b-a)(b+a)(b^2+a^2) & b-a \\ (c-a)(c+a)(c^2+a^2) & c-a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} (b+a)(b^2+a^2) & 1 \\ (c+a)(c^2+a^2) & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\left(b^3+ab^2+a^2b+\cancel{a^3}-c^3-ac^2-a^2c-\cancel{a^3}\right)$$

$$= (b-a)(c-a)\left(b^3-c^3+a^2(b-c)+a\left(b^2-c^2\right)\right)$$

$$= (b-a)(c-a)\left((b-c)\left(b^2+bc+c^2\right)+a^2(b-c)+a(b-c)(b+c)\right)$$

$$= (b-a)(c-a)(b-c)\left(b^2+c^2+a^2+bc+ab+ac\right)$$

$$B = \begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3 = C_3 - C_1]{C_2 = C_2 - C_1} \begin{vmatrix} a^3 & b^3 - a^3 & c^3 - a^3 \\ a^2 & b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b-a)\left(b^2+ba+a^2\right) & (c-a)\left(c^2+ca+a^2\right) \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\left(b^2c+\cancel{abc}+\cancel{a^2c}+ab^2+\cancel{a^2b}+\cancel{a^3}-bc^2-\cancel{abc}-\cancel{a^2b}-ac^2-\cancel{a^2c}-\cancel{a^3}\right)$$

$$= (b-a)(c-a)\left(b^2c+ab^2-bc^2-ac^2\right) = (b-a)\left(cb(b-c)+a(b-c)(b+c)\right)$$

$$= (b-a)(c-a)(b-c)(cb+ab+ac)$$

Donc $A = B$, si

1) $a = b$

2) $a = c$

3) $b = c$

4) ou encore si : $b^2+bc+c^2+ab+ac = cb+ab+ac$

$\rightarrow b^2+c^2 = 0$ qui n'est vrai que si $b = c = 0$

Le 14 novembre 2008

EXALG324 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2008.

Déterminer $a,b,c\in\mathbb{R}$ pour que le polynôme $P(x)=ax^5+bx^4+cx^3+1$ soit divisible par $(x-1)^3$. Indiquer le quotient de cette division.

On a alors :

$$P(x)=ax^5+bx^4+cx^3+1=(x-1)^3\left(mx^2+px+r\right)$$

qui doit être égal à :

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-1)^3\left(mx^2+px+r\right)\\&=\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\left(mx^2+px+r\right)\end{aligned}$$

On effectue.

$$P(x)=mx^5+(-3m+p)x^4+(3m-3p+r)x^3+(-m+3p-3r)x^2+(-p+3r)x-r$$

Par identification, on obtient le système :

$$\begin{cases}m=a\\-3m+p=b\\3m-3p+r=c\\-m+3p-3r=0\\-p+3r=0\\-r=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=-6\\b=-3m+p=18-3=15\\c=-18+9-1=-10\\m=3p-3r=-9+3=-6\\p=-3\\r=-1\end{cases}$$

Conclusion :

$$\boxed{P(x)=-6x^5+15x^4-10x^3+1=(x-1)^3\left(-6x^2-3x-1\right)}$$

Le 14 novembre 2008

EXALG325 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2008.

Déterminer toutes les valeurs réelles du paramètre m pour lesquelles la matrice.

$$A=\begin{pmatrix} m+1 & m-1 & m^2-1 \\ -m & 2-m & -m^2 \\ m+2 & m-1 & m \end{pmatrix} \quad \text{est inversible.}$$

Calculer l'inverse de cette matrice dans le cas où $m=0$

Pour que la matrice soit inversible, il faut et il suffit que son déterminant soit nul.

$$\det A=\begin{vmatrix} m+1 & m-1 & m^2-1 \\ -m & 2-m & -m^2 \\ m+2 & m-1 & m \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1=L_1+L_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -m & 2-m & -m^2 \\ m+2 & m-1 & m \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3=L_3+L_1]{L_2=L_2-L_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m & 2 & -m^2-m \\ m+2 & -3 & 2m+2 \end{vmatrix} = 4m+4-3m^2-3m=-3m^2+m+4$$

Cette équation a pour solutions : $\begin{cases} m=-1 \\ m=\dfrac{4}{3} \end{cases}$

Conclusion : La matrice est inversible pour $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1;\dfrac{4}{3}\right\}$

Inversion

Soit $m=0 \rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calcul du déterminant $\det A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=4$

2. Calcul de la matrice adjointe : L'adjointe est la transposée de la matrice obtenue en remplaçant, dans A, chaque élément par son cofacteur.

Le cofacteur de l'élément a_{ij} de la matrice A est le produit du mineur M_{ij} de a_{ij} par le facteur $(-1)^{i+j}$.

Le mineur de l'élément a_{ij} de la matrice A est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne et la colonne de a_{ij} dans A.

$$\text{adj } A={}^t\begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Calcul de l'inverse :

$$A^{-1}=\frac{\text{adj } A}{\det A}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Inversion : Méthode de la matrice compagnon

Soit $m=0 \rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

On construit le tableau suivant

Colonne $(1)=$ Description de l'opération

Colonne $(2)=$ Numéro de la ligne

Colonne $(3)=$ Matrice A

Colonne $(4)=$ Matrice inverse

Colonne $(5)=$ Contrôle des opérations : somme de la ligne

(1)	(2)	(3)			(4)			(5)
	1	1	-1	-1	1	0	0	0
	2	0	2	0	0	1	0	3
	3	2	-1	0	0	0	1	2
$L_4=L_1$	4	1	-1	-1	1	0	0	0
$L_5=\frac{1}{2}L_2$	5	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
$L_6=\frac{1}{2}L_3$	6	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1
$L_7=L_4+L_5$	7	1	0	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
$L_8=L_5$	8	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
$L_9=L_6-L_4$	9	0	$\frac{1}{2}$	1	-1	0	$\frac{1}{2}$	1
$L_{10}=L_7$	10	1	0	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
$L_{11}=L_8$	11	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
$L_{12}=L_9-\frac{1}{2}L_8$	12	0	0	1	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$L_{13}=L_{10}+L_{12}$	13	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$
$L_{14}=L_{11}$	14	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
$L_{15}=L_{12}$	15	0	0	1	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Donc : $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

EXALG326 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2008..

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquations :

$$\begin{cases} \dfrac{-3x^2+40x-28}{x-2} \geq 2 \\ |x-2| > |2x-1| \end{cases}$$

Résolvons la première inéquation :

$$\frac{-3x^2+40x-28}{x-2} \geq 2 \rightarrow \frac{-3x^2+40x-28}{x-2} - 2 \geq 0 \rightarrow \frac{-3x^2+40x-28-2x+4}{x-2} \geq 0$$

$$\rightarrow \frac{-3x^2+38x-24}{x-2} \geq 0 \rightarrow \frac{(2-3x)(x-12)}{x-2} \geq 0$$

Tableau de signe

		$\frac{2}{3}$		2		12	
$2-3x$	+	0	−	−	−	−	−
$x-12$	−	−	−	−	−	0	+
$x-2$	−	−	−	0	+	+	+
	+	0	−	/	+	0	−

$\rightarrow x \in \left]-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup \left]2; 12\right]$

Résolvons la deuxième inéquation :

1) si $x > 2$ $\quad \rightarrow x-2 > 2x-1 \rightarrow -x > 1 \rightarrow x < 1$ Impossible

2) si $x = 2$ $\quad \rightarrow 0 > 3$ Impossible

3) si $\frac{1}{2} < x < 2$ $\quad \rightarrow -x+2 > 2x-1 \rightarrow -3x > -3$

$\rightarrow x < 1 \rightarrow$ $\quad \frac{1}{2} < x < 1$

4) si $x = \frac{1}{2}$ $\quad \rightarrow -\left(\frac{1}{2}-2\right) > 0 \rightarrow \frac{3}{2} > 0 \rightarrow$ $\quad x = \frac{1}{2}$

5) si $x < \frac{1}{2}$ $\quad \rightarrow -x+2 > -2x+1 \rightarrow x > -1 \rightarrow$ $\quad -1 < x < \frac{1}{2}$

Autrement dit : $x \in \left]-1; 1\right]$

Conclusion

En combinant les deux solutions : $\quad x \in \left]-1 : \frac{1}{2}\right]$

Le 17 septembre 2008

EXALG327 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2008.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} (3-m)x + (2-m)y + z = -m \\ (2m+4)x + (2+m)y + (2m+1)z = -2m^2 \\ (3m-1)x + (2m-1)y + mz = -m^2+m+1 \end{cases} \qquad (m \in \mathbb{R})$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système

Calculons les déterminants.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3-m & 2-m & 1 \\ 2m+4 & 2+m & 2m+1 \\ 3m-1 & 2m-1 & m \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1=C_1-C_2-C_3} \begin{vmatrix} 0 & 2-m & 1 \\ 1-m & 2+m & 2m+1 \\ 0 & 2m-1 & m \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 2-m & 1 \\ 2m-1 & m \end{vmatrix}$$

$$= (m-1)\left(2m-m^2-2m+1\right) = (m-1)\left(1-m^2\right) = -(m-1)^2(m+1)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -m & 2-m & 1 \\ -2m^2 & 2+m & 2m+1 \\ -m^2+m+1 & 2m-1 & m \end{vmatrix} \xrightarrow[C_2=C_2-C_3]{C_1=C_1-C_3} \begin{vmatrix} -m-1 & 1-m & 1 \\ -2m^2-2m-1 & 1-m & 2m+1 \\ -m^2+1 & m-1 & m \end{vmatrix}$$

$$= (m-1)\begin{vmatrix} -m-1 & -1 & 1 \\ -2m^2-2m-1 & -1 & 2m+1 \\ -m^2+1 & 1 & m \end{vmatrix} \xrightarrow[L_2=L_1+L_3]{L_1=L_1+L_3} (m-1)\begin{vmatrix} -m^2-m & 0 & m+1 \\ -3m^2-2m & 0 & 3m+1 \\ -m^2+1 & 1 & m \end{vmatrix}$$

$$= m(m-1)(m+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3m+2 & 3m+1 \end{vmatrix} = m(m-1)(m+1)(3m+1-3m-2)$$

$$= m(1-m)(m+1)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3-m & -m & 1 \\ 2m+4 & -2m^2 & 2m+1 \\ 3m-1 & -m^2+m+1 & m \end{vmatrix}$$

Il est plus simple de l'éffectuer et de factoriser.

$$\Delta_y = -2(3-m)m^3 - m(2m+1)(3m-1) + (2m+4)\left(-m^2+m+1\right)$$

$$+ 2m^2(3m-1) + (m-3)(2m+1)\left(-m^2+3+1\right) + m^2(2m+4)$$

$$= m^3 - m^2 - m + 1 = m^2(m-1) - (m-1) = (m-1)^2(m+1)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3-m & 2-m & -m \\ 2m+4 & 2+m & -2m^2 \\ 3m-1 & 2m-1 & -m^2+m+1 \end{vmatrix}$$

On effectue et on factorise.

$$\begin{aligned}\Delta_z &= (3-m)(2+m)\left(-m^2+m+1\right)-2m^2(2-m)-m(2m+4)(2m-1)\\ &\quad +m(2+m)(3m-1)+2m^2(3-m)(2m-1)+(m-2)(2m+4)\left(-m^2+m+1\right)\\ &= m^4-m^3+m^2+m-2\end{aligned}$$

Ce polynôme est divisible par $(m-1)$ et $(m+1)$. On utilise Horner

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & & -1 & 2 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & & 1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1 & -1 & 2 & 0 & \end{array} \rightarrow \Delta_z = (m-1)(m+1)\left(m^2-m+2\right)$$

Discussion

1er cas : $m=1$

Le système devient : $\begin{cases} 2x+y+z=-1 \\ 6x+3y+3z=-2 \\ 2x+y+z=1 \end{cases} \rightarrow$ Système impossible

2ème cas : $m=-1$

Le système devient : $\begin{cases} 4x+3y+z=1 \\ 2x+y-z=-2 \\ -4x-3y-z=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x+3y+z=1 \\ 2x+y-z=-2 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} 4x+3y=1-z \\ 2x+y=-2+z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{7}{2}+2z \\ y=5-3z \end{cases}$ Système simplement indéterminé.

Dans les autres cas

$$x=\frac{-m\cancel{(m-1)}\cancel{(m+1)}}{-(m-1)^{\cancel{2}}\cancel{(m+1)}} \rightarrow \boxed{x=\frac{m}{m-1}}$$

$$y=\frac{(m-1)^2(m+1)}{-(m-1)^2(m+1)}= \rightarrow \boxed{y=-1}$$

$$z=\frac{\cancel{(m-1)}\cancel{(m+1)}\left(m^2-m+2\right)}{-(m-1)^{\cancel{2}}\cancel{(m+1)}} \rightarrow \boxed{z=-\frac{m^2-m+2}{m-1}}$$

EXALG328 – FPMs, Mons, groupe C, juillet 2009

Soit l'équation

$$\left(2m-1\right)x^2-\left(m+2\right)x+2m=0$$

de racines x_1 et x_2. Déterminez les valeurs du paramètre réel m qui permettent de vérifier

$$0<x_1<x_2$$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

Notons d'abord la condition $m\neq\frac{1}{2}$ pour avoir une équation du second dégré.

L'équation a deux solutions x_1 et x_2 telles que $0<x_1<x_2$, si et seulement si

$\Delta>0$ et $P>0$ et $S>0$

a) Etudions le Δ

$$\Delta=\left(m+2\right)^2-4\left(2m-1\right).2m=m^2+4m+4-16m^2+8m=-15m^2+12m+4$$

Résolvons cette équation :

$$\Delta_\Delta=144+240=384$$

$$\text{Zéros de } \Delta: m=\frac{-12\pm8\sqrt{6}}{-30}=\frac{6\mp4\sqrt{6}}{15}\rightarrow\begin{cases}m_1=-0.253\\m_2=1.053\end{cases}$$

Signe de Δ :

m		-0.253		1.053	
Δ	$-$	0	$+$	0	$-$

b) Etudions le produit :

$$P=\frac{2m}{2m-1}$$

Signe de P :

m		0		$1/2$	
P	$+$	0	$-$	//	$+$

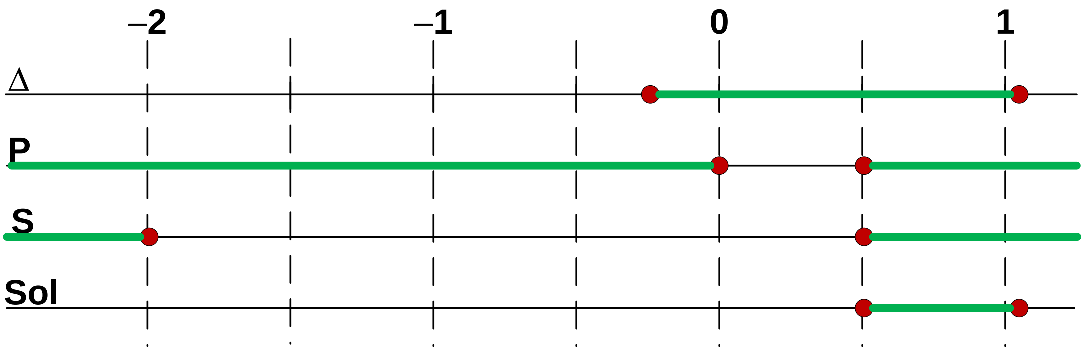
c) Etudions la somme :

$$S=\frac{m+2}{2m-1}$$

Signe de S :

m		-2		$1/2$	
S	$+$	0	$-$	//	$+$

Conclusion   Condition satisfaite si $\boxed{m\in\left]\frac{1}{2},\frac{6+4\sqrt{6}}{15}\right[}$



Le 2 juillet 2009

EXALG329 – FACSA – ULG – Liège, juillet 2009.

1. Calculer le produit AB des matrices A et B suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ m & m & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} m & m & m \\ 2 & m & m \\ 2 & 2 & m \end{pmatrix}$$

2. Résoudre le système suivant sur $\mathbb{R}$, dans lequel m est un paramètre réel :

$$\begin{cases} (m+4)x + 2(m+1)y + 3mz = \frac{1}{2}m+2 \\ (m^2+4)x + (m^2+m+2)y + m(m+2)z = m+2 \\ (m^2+2m+2)x + 2(m^2+1)y + m(2m+1)z = 2m+1 \end{cases}$$

Nous reprenons, la solution proposée par l'université.
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf

On observe que le produit AB est précisément la matrice des coefficients du système qui peut donc s'écrire.

$$AB\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m+2 \\ m+2 \\ 2m+1 \end{pmatrix}$$

On calcule ainsi :

$$\text{dtm } (A) = (m-1)^2 \text{, dtm}(B) = m(m-2)^2 \text{ et donc dtm}(AB) = m(m-1)^2(m-2)^2$$

Ce dernier déterminant s'annule si et seulement si $m \in \{0,1,2\}$

Si m vaut respectivement 0, 1, 2 le système se réduit respectivement à

$$\begin{cases} 4x+2y=2 \\ 4x+2y=2 \\ 2x+2y=1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 5x+4y+3z=\frac{5}{2} \\ 5x+4y+3z=3 \\ 5x+4y+3z=3 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 6x+6y+6z=3 \\ 8x+8y+8z=4 \\ 10x+10y+10z=5 \end{cases}$$

On en tire immédiatement les conclusions suivantes :

- Si $m=0,$ le système est simplement indéterminé; on a $x=\frac{1}{2}, y=0$ et z est un réel quelconque;
- Si $m=1,$ les équations sont incompatibles et le système n'admet aucune solution.
- Si $m=2,$ le système est doublement indéterminé; on a $x=\lambda,\ y=\mu$ et $z=\frac{1}{2}-\lambda-\mu$

  où λ et μ sont des réels quelconques.

D'autre part, si $m \notin \{0,1,2\}$, le système admet une solution unique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}A^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}m+2 \\ m+2 \\ 2m+1 \end{pmatrix}$$

En reportant les valeurs suivantes obtenues par la règle des mineurs:

$$A^{-1} = \frac{1}{m-1}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ m & 0 & -1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \frac{1}{m(m-2)}\begin{pmatrix} m & -m & 0 \\ 0 & m & -m \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix}$$

Cette solution se réduit à

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2(m-1)}\begin{pmatrix} -1 \\ -m \\ m+2 \end{pmatrix}$$