

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Algèbre

## **ALG 35**

**EXALG350 – EXALG359**

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot  
Benoit Baudalet – Steve Tumson

Juin 2010

## EXALG350 – FACS, ULB, Bruxelles - juillet 2009.

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$ , en discutant en fonction du paramètre réel  $m$ , le système

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R}).$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

---

Le calcul des différents déterminants donne

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{vmatrix} = m(m-2)(m+2) & \Delta_x &= \begin{vmatrix} m+2 & 1 & 1-m \\ 0 & -1 & 2 \\ m+2 & -m & 3 \end{vmatrix} = m(m+2) \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & m+2 & 1-m \\ 1+m & 0 & 2 \\ 2 & m+2 & 3 \end{vmatrix} = -m(m+2)(m+3) & \Delta_z &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & m+2 \\ 1+m & -1 & 0 \\ 2 & -m & m+2 \end{vmatrix} = -m(m+2)^2 \end{aligned}$$

1er cas :  $m = 0$

$$\text{Le système devient : } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda - 2 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{Système simplement indéterminé}$$

2ème cas :  $m = 2$

$$\text{Le système devient : } \begin{cases} x + y - z = 4 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z = 8 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{Système impossible.}$$

3ème cas :  $m = -2$

$$\text{Le système devient : } \begin{cases} x + y - z = 4 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{Système simplement indéterminé}$$

$$\text{Dans les autres cas : } \begin{cases} x = \frac{1}{m-2} \\ y = -\frac{m+3}{m-2} \\ z = -\frac{m+2}{m-2} \end{cases}$$

---

20 juin 2010

## EXALG351 – FACS, ULB, Bruxelles - septembre 2009.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $2\ln(x+4) \geq \ln(2-x)$

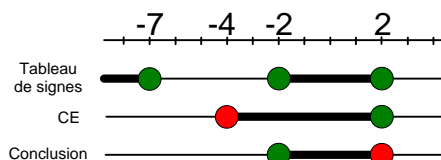
$$\text{CE : } \begin{cases} x < 2 \\ x > -4 \end{cases} \rightarrow x \in ]-4; 2[$$

$$2\ln(x+4) \geq \ln(2-x) \rightarrow 2\ln(x+4) - \ln(2-x) \geq 0 \rightarrow \frac{(x+4)^2}{2-x} \geq 1 \rightarrow \frac{(x+4)^2}{2-x} - 1 \geq 0$$

$$\rightarrow \frac{(x+4)^2 - (2-x)}{2-x} \geq 0 \rightarrow \frac{x^2 + 9x + 14}{2-x} \geq 0 \rightarrow \frac{(x+2)(x+7)}{2-x} \geq 0$$

		-7		-2		2		
$(x+2)(x+7)$	+	0	-	0	+	+	+	
$2-x$	+	+	+	+	+	0	-	$\rightarrow x \in \leftarrow; -7 ] \cup ] -2; 2 ]$
$\frac{(x+2)(x+7)}{2-x}$	+	0	-	0	+	0	-	

En combinant avec les CE :  $\rightarrow x \in \boxed{]-2; 2[}$



Résolu le 22 juin 2010

## EXALG352 – FACS, ULB, Bruxelles - septembre 2009.

Déterminez les valeurs réelles des paramètres  $a, b, c$  pour lesquelles la matrice

$$\begin{pmatrix} a+1 & a+3 & a-2 \\ b-2 & b+1 & b+3 \\ c+3 & c-2 & c+1 \end{pmatrix} \text{ est inversible.}$$

Calculer  $A^{-1}$  lorsque  $a = b = c = 0$

1) Déterminons les valeurs pour lesquelles la matrice n'est pas inversible. Ces valeurs correspondent à un déterminant nul :

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a+1 & a+3 & a-2 \\ b-2 & b+1 & b+3 \\ c+3 & c-2 & c-1 \end{vmatrix} \stackrel{L_1=L_1+L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix} a+b+c+2 & a+b+c+2 & a+b+c+2 \\ b-2 & b+1 & b+3 \\ c+3 & c-2 & c-1 \end{vmatrix} \\ & = (a+b+c+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-2 & b+1 & b+3 \\ c+3 & c-2 & c-1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-L_1}}{=} (a+b+c+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b-2 & 3 & 5 \\ c+3 & -5 & -2 \end{vmatrix} \\ & = 19(a+b+c+2) \end{aligned}$$

$$\text{Le déterminant sera nul si } \begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \\ c = -\alpha - \beta - 2 \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Pour toutes autres de ces valeurs, la matrice est inversible.

$$2) a = b = c = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ La matrice des cofacteurs est : } \text{cof}(A) = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 1 \\ 1 & 7 & 11 \\ 11 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs :

$$\text{Adj}(A) = (\text{cof}(A))^t = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 11 \\ 11 & 7 & 1 \\ 1 & 11 & 7 \end{pmatrix}. \text{ Le déterminant vaut : } \det(A) = 38$$

$$\text{Et donc : } A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{\det(A)} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 11 \\ 11 & 7 & 1 \\ 1 & 11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/38 & 1/38 & 11/38 \\ 11/38 & 7/38 & 1/38 \\ 1/38 & 1/38 & 7/38 \end{pmatrix}$$

Résolu le 22 juin 2010

## EXALG353 – FACS, ULB, Bruxelles - septembre 2009.

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$ , en discutant en fonction du paramètre réel  $m$ , le système

$$\begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \quad (m \in \mathbb{R}) \\ mx + y - m^3z = -1 \end{cases}$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

---

Calculons les déterminants :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = m(m-1)(m+1)(m^2+1) \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} m & -m & m^2 \\ 1 & -m^2 & m \\ -1 & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = m^2(1-m)^2(1+m)^2$$
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & 1 & m \\ m & -1 & -m^3 \end{vmatrix} = m(m+1)^2(m-1)^2 \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -m & m \\ m & -m^2 & 1 \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1+m)(m-1)(1+m^2)$$

1er cas :  $m = 0$

$$\text{Le système devient : } \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{Système impossible.}$$

2ème cas :  $m = -1$

$$\text{Le système devient : } \begin{cases} x + y + z = -1 \\ -x - y - z = 1 \\ -x + y + z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = -1 \\ -x + y + z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Système simplement indéterminé.

3ème cas :  $m = 1$

$$\text{Le système devient : } \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Système simplement indéterminé.

Dans les autres cas :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{m(m-1)(m+1)}{m^2+1} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{(m+1)(m-1)}{m^2+1} \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{1}{m}$$

## EXALG354 – Polytech, Umons, Mons, Présentation examen admission 2009-2010.

Vous faites une descente de la Lesse en kayak et vous avez pique-niqué sur la berge à midi. Vous reprenez la descente à 13h. L'esprit un peu engourdi par la digestion, ce n'est qu'après 2 kilomètres de descente que vous vous apercevez que vous avez oublié votre appareil photo sur la berge où vous avez mangé. Vous décidez de remonter en pagayant à contre courant pour récupérer votre appareil. Vous atteignez votre lieu de pique-nique à 17h, soit 4h après l'avoir quitté. Heureusement, l'appareil est toujours là.

Calculez votre vitesse moyenne par rapport à l'eau si on suppose que :

- la vitesse du courant est de 2km/h
- votre vitesse par rapport à l'eau est la même que vous ramiez dans le sens du courant ou à contre-courant.

Soit  $V_K$  = la vitesse du kayak,  $V_E$  = la vitesse de l'eau (2 km/h),  $t_D$  = le temps de descente, et  $t_R$  le temps de remontée. La distance parcourue pour la descente et la remontée est de 2 km.

Le kayak et l'eau sont en MRU.

$$\rightarrow \begin{cases} (V_K + V_E)t_D = 2 & \text{(Pour la descente, les vitesses s'additionnent)} \\ (V_K - V_E)t_R = 2 & \text{(Pour la remontée, les vitesses se soustraient)} \\ t_D + t_R = 4 & \text{(Le temps total de descente et de remontée est de 4 h)} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} t_D = \frac{2}{V_K + 2} \\ t_R = \frac{2}{V_K - 2} \end{cases} \quad \rightarrow V_K^2 - V_K - 4 = 0 \rightarrow V_K = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \approx 2.562 \text{ km/h}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{V_K + 2} + \frac{2}{V_K - 2} = 4 \end{array} \right.$$

Et les temps sont :  $t_D = \frac{2}{4.562} = 0.44 \text{ h}$  et  $t_R = \frac{2}{0.562} = 3.56 \text{ h}$

Pendant la descente, la vitesse du kayak par rapport à l'eau est de  $V_K^D = 2.562 \text{ km/h}$ .

Pendant la remontée, la vitesse du kayak par rapport à l'eau est de  $V_K^R = -2.562 \text{ km/h}$ .

La vitesse moyenne du kayak par rapport à l'eau pour l'ensemble du périple est alors :

$$V_{\text{moy}} = \frac{V_K^D \cdot t_D + V_K^R \cdot t_R}{t_D + t_R} = \frac{2.562 \times 0.44 - 2.562 \times 3.56}{4} = \boxed{-2 \text{ km/h}}$$

### Méthode alternative

Dans un premier temps considérons que l'origine des positions  $x$  est le lieu du pique-nique.

Imaginons un bouchon  $B$  qui suit exactement le mouvement de l'eau.

A l'instant  $t = 0$ , le bouchon  $B$  et le kayak  $k$  se trouvent en position  $x = 0$ .

A l'instant  $t = 4$  h, le bouchon  $B$  est en position  $x = 4 \times 2 = 8$  km, mais le kayak est revenu en  $x = 0$ .

Prenons maintenant,  $B$  comme origine des positions  $x'$ .

Les positions du kayak sont dans ce nouveau repère :  $\begin{cases} t = 0 \rightarrow x'_{initial} = 0 \\ t = 4 \rightarrow x'_{final} = -8 \text{ km} \end{cases}$ .

Par définition, une vitesse moyenne est donnée par :

$$v_{moy} = \frac{x'_{final} - x'_{initial}}{\Delta t} = \frac{-8 - 0}{4} = -2 \text{ km/h}$$

---

Le 5 juillet 2010

## EXALG355 – Polytech, Umons, Mons, Présentation examen admission 2009-2010.

Rechercher la solution  $x$  et  $y$  du système suivant :

$$\begin{cases} (1+i)x + 2y = 1-i \\ x - iy = i \end{cases}$$

où  $i^2 = -1$ . Notez que  $x$  et  $y$  peuvent être des nombres complexes.

---

Utilisons la méthode de Cramer.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+i & 2 \\ 1 & -i \end{vmatrix} = -i-1 \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1-i & 2 \\ i & -i \end{vmatrix} = -3i-1 \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 1 & i \end{vmatrix} = 2i-2$$

Ce qui donne :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-3i-1}{-i-1} = \frac{-3i-1}{-i-1} \cdot \frac{i-1}{i-1} = \frac{3-i+3i+1}{2} = 2+i$$
$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2i-2}{-i-1} = \frac{2i-2}{-i-1} \cdot \frac{i-1}{i-1} = \frac{-2-2i-2i+2}{2} = -2i$$

Conclusion  $S : \{ (2+i; -2i) \}$

---

Le 5 juillet 2010



## EXALG356 – Polytech, Umons, Mons, Présentation examen admission 2009-2010.

Soit l'équation

$$(2m-1)x^2 - (m+2)x + 2m = 0$$

de racines  $x_1$  et  $x_2$ . Déterminez les valeurs du paramètre réel  $m$  qui permettent de vérifier

$$0 < x_1 < x_2.$$

---

Pour avoir deux solutions réelles, distinctes et positives, nous avons les conditions suivantes :

a) Produit des racines positif :  $\frac{2m}{2m-1} > 0 \rightarrow m \in -\infty; 0 \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

b) Somme des racines positives :  $\frac{m+2}{2m-1} > 0 \rightarrow m \in -\infty; -2 \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Enfin, il faut que le delta de l'équation soit positif :

$$(m+2)^2 - 4(2m-1).2m = -15m^2 + 12m + 4 > 0$$

Les solutions de cette équation sont :  $m = \frac{+6 \pm \sqrt{6^2 + 15 \times 4}}{-15} = \begin{cases} m_1 = \frac{-6 - 4\sqrt{6}}{-15} \approx 1.0532 \\ m_2 = \frac{-6 + 4\sqrt{6}}{-15} \approx -0.253 \end{cases}$

Il faut donc :  $\frac{6 - 4\sqrt{6}}{15} < m < \frac{6 + 4\sqrt{6}}{+15}$

Avec les conditions précitées, nous concluons :

$$m \in \left[ \frac{1}{2}; \frac{6 + 4\sqrt{6}}{+15} \right[$$

---

Le 5 juillet 2010

## EXALG357 – Polytech, Umons, Mons, Présentation examen admission 2009-2010.

Résoudre dans les réels le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 4y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

---

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 4y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

La première des équations représente une ellipse et la deuxième une droite.

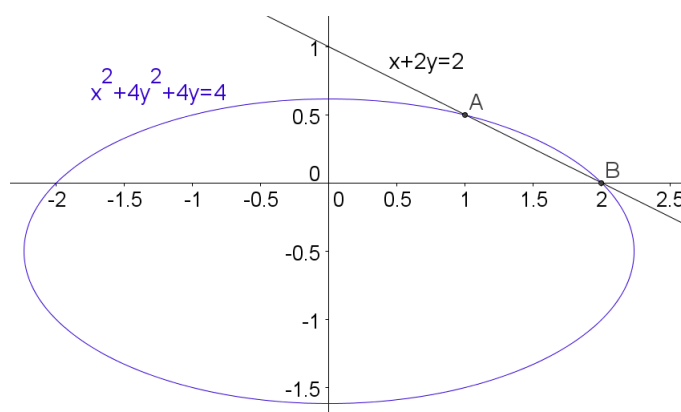
Il est facile de calculer l'intersection de cette droite et de cette ellipse.

$$x = 2 - 2y \rightarrow (2 - 2y)^2 + 4y^2 + 4y = 4 \rightarrow 8y^2 - 4y = 0 \rightarrow 4y(2y - 1) = 0$$

$$1) y = 0 \rightarrow x = 2$$

$$2) y = \frac{1}{2} \rightarrow x = 1$$

Conclusion  $S : \left\{ (2, 0); \left( 1, \frac{1}{2} \right) \right\}$



---

Le 5 juillet 2010

**EXALG358 – Polytech, Umons, Mons, Présentation examen admission 2009-2010.**

Résoudre et discuter en fonction du paramètre  $m$  le système d'équations :

$$\begin{cases} x + 2my + (2m-1)z = 2m+1 \\ 3x + 2y + 2mz = 3 \\ (2m-1)x + 2my + (2m+1)z = 2m-1 \end{cases}$$

Le calcul des  $\Delta$  donne :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2m & 2m-1 \\ 3 & 2 & 2m \\ 2m-1 & 2m & 2m+1 \end{vmatrix} = 8m^2(m-2) \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2m+1 & m & 2m-1 \\ 3 & 2 & 2m \\ 2m-1 & 2m & 2m+1 \end{vmatrix} = 4m(1-2m)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2m+1 & 2m-1 \\ 3 & 3 & 2m \\ 2m-1 & 2m-1 & 2m+1 \end{vmatrix} = 2m(4m^2-8m-2) \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2m & 2m+1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2m-1 & 2m & 2m-1 \end{vmatrix} = 4m(m+1)$$

1er cas :  $m = 0$ .

Le système devient :  $\begin{cases} x - z = 1 \\ 3x + 2y = 3 \\ -x + z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{3}{2}(1-\lambda) \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$  Système simplement indéterminé.

2ème cas :  $m = 2$

Le système devient :

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 5 & (1) \\ 3x + 2y + 4z = 3 & (2) \\ 3x + 4y + 3z = 3 & (3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (2) - 3(1) : -10y - 5z = -12 \\ (3) - (2) : 2y + z = 0 \end{cases} \quad \text{Système impossible.}$$

Dans les autres cas :

$x = \frac{1-2m}{2m(m-2)}$	;	$y = \frac{4m^2-8m-3}{4m(m-2)}$	;	$z = \frac{m+1}{2m(m-2)}$
----------------------------	---	---------------------------------	---	---------------------------

## EXALG359 – Polytech, Umons, Mons, Présentation examen admission 2009-2010.

Déterminez tous les polynômes  $P(x)$  vérifiant pour tout  $x$  la relation

$$P(2x) = P'(x) \cdot P''(x)$$

où  $P'$  et  $P''$  désignent respectivement les dérivées première et seconde du polynôme  $P$ .

Remarque : commencez par déterminer le degré  $n$  du polynôme  $P(x)$  qui vérifie la relation précitée.

---

Soit  $m$  le degré de  $P(x)$ . Le degré de  $P'(x)$  est donc de  $m-1$  et celui de  $P''(x)$  de  $m-2$ .

Alors si  $P(2x) = P'(x) \cdot P''(x) \rightarrow m = m-1 + m-2 \rightarrow m = 3$ .

$P(x)$  est donc de la forme :  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ .

Nous pouvons maintenant écrire :

$$\begin{aligned} a(2x)^3 + b(2x)^2 + c(2x) + d &= (3ax^2 + 2bx + c)(6ax + 2b) \\ &= 18a^2x^3 + 18abx^2 + (6ac + 4b^2)x + 2bc \end{aligned}$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} 18a^2 = 6a \\ 18ab = 4b \\ 6ac + 4b^2 = 2c \\ 2bc = d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{9} \text{ (ou } a = 0 \text{ : à rejeter)} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Conclusion :  $P(x) = \frac{4}{9}x^3$

---

Le 6 aout 2010