Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 37

EXALG370 – EXALG379

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Juillet 2010

EXALG370 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2010 série 1.

a) Démontrez la relation générale : $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$; et indiquez les conditions auxquelles doivent obéir a et b. (*Réponse en* 5 *lignes* max.)

b) Résolvez dans $\mathbb{R}$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \log_x 10 + \log_y 10 = 5 \\ \log_{10} x + \log_{10} y = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

---

1) Soit $y = \log_a b \Rightarrow a^y = b \Rightarrow \log_b a^y = \log_b b \Rightarrow y \log_b a = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{\log_b a} \Rightarrow \boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}$

Avec $a > 0$ et $b > 0$.

2) $\begin{cases} \log_x 10 + \log_y 10 = 5 \\ \log_{10} x + \log_{10} y = \dfrac{5}{4} \end{cases}$ Donc CE: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Transformons la première équation :

$$\log_x 10 + \log_y 10 = 5 \Rightarrow \frac{1}{\log_{10} x} + \frac{1}{\log_{10} y} = 5 \Rightarrow \log_{10} y + \log_{10} x = 5 \log_{10} x . \log_{10} y$$

Avec la deuxième équation, nous avons alors : $\log_{10} x . \log_{10} y = \dfrac{1}{4}$

$\log_{10} x$ et $\log_{10} y$ sont alors solution de l'équation :

$$X^2 - \frac{5}{4} X + \frac{1}{4} = 0 \to 4X^2 - 5X + 1 = 0 \Rightarrow X = \frac{+5 \pm \sqrt{25-16}}{8} = \frac{+5 \pm 3}{8} = \begin{cases} X = 1 \\ X = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Soit alors : $\begin{cases} \log_{10} x = 1 \Rightarrow x = 10 \\ \log_{10} y = \dfrac{1}{4} \Rightarrow y = \sqrt[4]{10} \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} \log_{10} x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt[4]{10} \\ \log_{10} y = 1 \Rightarrow y = 10 \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{(x, y) \in \left\{ \left(10, \sqrt[4]{10}\right); \left(\sqrt[4]{10}, 10\right) \right\}}$

---

20 septembre 2010

EXALG371 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2010 série 1.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\left|\frac{1}{x+2}\right| < \left|\frac{2}{x-1}\right|$$

<u>1er cas</u> : $x < -2$

L'équation devient : $-\dfrac{1}{x+2} < -\dfrac{2}{x-1} \Rightarrow \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{2}{x-1} > 0 \Rightarrow \dfrac{x-1-2x-4}{(x+2)(x-1)} > 0$

$\Rightarrow -\dfrac{x+5}{(x+2)(x-1)} > 0 \Rightarrow \dfrac{x+5}{(x+2)(x-1)} < 0$

qui sera vérifier si : $x < -5$

<u>2ème cas</u> : $-2 < x < 1$

$\dfrac{1}{x+2} < -\dfrac{2}{x-1} \Rightarrow \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{2}{x-1} < 0 \Rightarrow \dfrac{x-1+2x+4}{(x+2)(x-1)} < 0 \Rightarrow \dfrac{3(x+1)}{(x+2)(x-1)} < 0$

		-2		-1		1	
$3(x+1)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x+2)(x-1)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{3(x+1)}{(x+2)(x-1)}$	$-$	/	$+$	0	$-$	/	$+$

$\Rightarrow \quad -1 < x < 1$

<u>3ème cas</u> : $x > 1$

$\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{2}{x-1} \Rightarrow \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x+2} > 0 \Rightarrow \dfrac{2x+4-x+1}{(x+2)(x-1)} > 0 \Rightarrow \dfrac{x+5}{(x+2)(x-1)} > 0$

qui est toujours vérifié si $x > 1$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{x \in \left]-\infty, -5\right[\cup \left]-1, +\infty\right[\setminus \{1\}}$

Le 30 septembre 2010

EXALG372 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2010 série 1.

Soit l'équation suivante dans les complexes où le pramètre m est un réel :

$$z^2-(3-8i)z-4(m+3i)=0$$

a) Résolvez l'équation en z.

b) Pour quelle valeur du paramètre réel m, l'équation admet-elle une racine imaginaire pure et que valent alors les racines?

c) Pour quelle valeur du paramètre réel m, l'équation admet-elle une racine réelle pure et que valent alors les racines?

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Partie (a) : $\Delta = (3-8i)^2+16(m+3i) = 9-48i-64+16m+48i = 16m-55$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16m-55}$ (réel ou imaginaire pure selon la valeur de m)

$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(3-8i \pm \sqrt{16m-55}\right)$

Il faut distinguer trois cas :

$m = \frac{55}{16}$: $\quad z_1 = z_2 = \frac{3}{2} - 4i$

$m > \frac{55}{16}$: $\quad z_1 = \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{16m-55}\right) - 4i$

$z_2 = \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{16m-55}\right) - 4i$

$m < \frac{55}{16}$: $\quad z_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(8+\sqrt{55-16m}\right)i$

$z_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(8-\sqrt{55-16m}\right)i$

Partie (b) :

Une racine imaginaire pure n'est possible que si $m > \frac{55}{16}$ et $\sqrt{16m-55} = 3$;

alors : $16m-55 = 9 \iff 16m = 64 \iff \boldsymbol{m = 4}$

et les racines sont : $\boldsymbol{z_1 = 3-4i}$ et $\boldsymbol{z_2 = -4i}$

Partie (c) :

Une racine réelle pure n'est possible que si $m < \frac{55}{16}$ et $\sqrt{55-16m} = 8$;

alors : $55-16m = 64 \iff 16m = -9 \iff \boldsymbol{m = -\frac{9}{16}}$

et les racines sont : $\boldsymbol{z_1 = \frac{3}{2} - 8i}$ et $\boldsymbol{z_2 = \frac{3}{2}}$

Le 28 septembre 2010. Modifié le 25 novembre 2010 (Carine Demesmaeker). Modifié le 17 juillet 2011 (E Houdart). Modifié le 31 jan 2012 (Jan Fans Broeckx)

EXALG373 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2010 série 1.

Benjamin et son copain Manu ont assité au match de quart de finale de la coupe du monde entre le Ghana et l'Uruguay le 2 juillet dernier.
Au moment où les entrées dans le stade débutent, à 15h30, on leur annonce qu'il y a 70000 personnes devant eux dans la file.
La première heure, le rythme des entrées dans le stade est très soutenu mais cela ralentit pendant la seconde heure : entre 16h30 et 17h30, il n'y a plus que 15000 personnes qui parviennent à entrer, ce qui représente k fois le nombre des entrées de la première heure.
Pendant la troisième heure, les entrées se ralentissent encore par rapport à la deuxième heure avec le même facteur k. Toutefois, le stade est tout juste rempli au moment où le match débute, à 18h30.
Pour la sortie, 15000 spectateurs acharnés restent dans le stade très tard à faire la fête alors que tous les autres spectateurs sont sortis du stade en seulement deux heures. Le rythme de sortie est soutenu durant la première heure mais se réduit de moitié pendant la seconde heure et l'on sait que seulement 25000 personnes sortent au cours de la seconde heure.
Nous voulons savoir :

a) que vaut k ?

b) si Benjamin et Manu étaient déjà dans le stade à 16h30?

c) combien de spectateurs étaient dans le stade à 16h30?

d) combien de spectateurs ont assisté au match?

Note : mettez ce problème en équation(s), justifiez toutes vos réponses et arrondissez le nombre de spectateurs à l'unité la plus proche dans vos réponses finales.

Entrée

Heure	Nombre de personnes entrées	
15h30 à 16h30	$\dfrac{15000}{k}$	$k<1$
16h30 à 17h30	15000	
17h30 à 18h30	$15000.k$	
Total	$T=15000\left(\dfrac{1}{k}+1+k\right)$	

Sortie

Heure	Nombre de personnes sorties
1ére heure	50000
2ème heure	25000
Nombre de personnes restées	15000
Total	$T=90000$

La valeur de k est donc :

$$15000\left(\frac{1}{k}+1+k\right)=90000 \Rightarrow \frac{1}{k}+1+k=6 \Rightarrow k^2-5k+1=0 \Rightarrow k=\frac{5-\sqrt{21}}{2}=0.20871$$

Nous avons alors pour les entrées

Heure	Nombre de personnes entrées
15h30 à 16h30	71869
16h30 à 17h30	15000
17h30 à 18h30	3131
Total	90000

Autrement dit :

a) $k=0.20871$

b) Benjamin et Manu étaient dans le stade à 16h30.

c) Il y avait 71869 à 16h30 dans le stade.

d) 90000 spectateurs ont assisté au match.

Le 13 juillet 2010

EXALG374 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2010 série 2.

Résoudre dans les réels le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ xy + xz + yz = 27 \end{cases}$$

Expliquez clairement les étapes de votre raisonnement

Il est évident que x, y et z doivent être différents de zéro.

La deuxième équation se transforme :

$$yz + xz + yz = xyz \Rightarrow xyz = 27$$

x, y et z sont alors solutions du polynôme :

$$X^3 - (x + y + z)X^2 + (yz + xz + yz)X - xyz = 0$$

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27 = 0 \Rightarrow (X - 3)^3 = 0$$

Conclusion: $\boxed{x = y = z = 3}$

Le 25 octobre 2009

EXALG375 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2010 série 2.

Calculez dans les réels les coefficients p et q et les deux racines distinctes x_1 et x_2 de l'équation :

$$mx^2 + px + q = 0$$

sachant que ces racines x_1 et x_2 augmentées chacune de 1 deviennent celles de l'équation

$$x^2 - p^2x + pq = 0$$

Nous devons donc avoir : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p & (1) \\ x_1x_2 = q & (2) \\ (x_1+1)+(x_2+1) = p^2 & (3) \\ (x_1+1)(x_2+1) = pq & (4) \end{cases}$

De (1) et (3), nous tirons : $-p+2 = p^2 \Rightarrow p^2 + p - 2 = 0 \Rightarrow (p+2)(p-1) = 0$

<u>1er cas</u> : $p = -2$

De (4) : $\underbrace{x_1x_2}_{=q} + \underbrace{x_1 + x_2}_{=+2} + 1 = pq \Rightarrow q + 3 = -2q \Rightarrow q = -1$

Alors $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow X^2 - 2X - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{2} \\ x_2 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$

<u>2ème cas</u> : $p = 1$

De (4) : $\underbrace{x_1x_2}_{=q} + \underbrace{x_1 + x_2}_{=-1} + 1 = pq \Rightarrow q = q \Rightarrow q$ est indéterminé

En effet, les deux équations sont alors :

$$\begin{cases} x^2 + x + q = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{1-4q}}{2} & \text{avec } q \leq \dfrac{1}{4} \\ x^2 - x + q = 0 \Rightarrow x = +\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{1-4q}}{2} & \text{avec } q \leq \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

La relation demandée est bien vérifiée pour $q \leq \dfrac{1}{4}$

Le 30 septembre 2010

EXALG376 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2010 série 2.

Résoudre dans les réels l'inéquation :

$$2(2x+1)-3\sqrt{6-x-x^2}\leq 0$$

CE : $6-x-x^2 \leq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 2 \qquad (1)$

L'équation devient :

$$2(2x+1)-3\sqrt{6-x-x^2}\leq 0 \Rightarrow 2(2x+1)\leq 3\sqrt{6-x-x^2}$$

Cette relation est d'office vérifiée si : $x \leq -\frac{1}{2} \qquad (2)$

Elevons au carré, il vient successivement :

$$4\left(4x^2+4x+1\right)=9\left(6-x-x^2\right) \Rightarrow 25x^2+25x-50 \leq 0 \Rightarrow x^2+x-2 \leq 0$$

Donc : $-2 \leq x \leq 1$

Compte tenu de (1) et (2), nous concluons : $\boxed{x \in [-3,1]}$

Le 8 septembre 2010 . Modifié le 2 février 2011 (Nicole Berckmans)

EXALG377 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2010 série 2.

Elise vient de terminer ses humanités et profite de vacances bien mérités en Provence avec toute sa famille. A sa grande surprise, c'est en pleine randonnée en montagne qu'elle réalise que l'algèbre peut être bien utile.

Avant le départ, elle se charge de la répartition des vivres dans les sacs à dos. Elle met dans son sac le pique-nique et répartit dans les sacs à dos de ses trois frères les boissons placées dans des gourdes d'une contenance d'un demi litre chacune (du départ toutes les gourdes sont remplies).

Lors de la randonnée, les promeneurs passent près de fontaines où il y a moyen de remplir les gourdes lorsque celles-ci sont complètement vides. Au retour, Elise fait les comptes de l'eau qui a été consommée et réalise qu'ils ont pas été très économes puisque toutes les gourdes sont vides alors que Pierre a vidé deux fois toutes ces gourdes, François trois fois et Antoine quatre fois, pour un total de trente sept litres, dont la plupart a servi à des jeux d'eau (qui n'ont d'ailleurs pas épargné Elise!).

Par ailleurs, Elise sait que la première fois qu'ils se sont désaltérés (toutes les gourdes étaient alors pleines), les trois frères ont bu les quantités suivantes :

- Pierre a bu le dixième de sa réserve d'eau, ce qui représente un verre d'eau plus un dixième de litre.
- François a bu le huitième de sa réserve d'eau, ce qui représente un verre d'eau plus un quart de litre.
- Antoine a bu le sixième de sa réserve d'eau, ce qui représente un verre d'eau plus un demi litre.

On vous demande combien de gourdes d'un demi litre Pierre, François et Antoine avaient-ils chacun emmenées dans leur sac. Pouvez-vous confirmer que Pierre, le plus jeune, a dû porter la charge la plus lourde? Mettez ce problème en équation(s) et justifiez toutes vos réponses.

Soit $\begin{cases} P \text{ le nombre de gourdes de Pierre} \\ F \text{ le nombre de gourdes de François} \\ A \text{ le nombre de gourdes d'Antoine.} \\ V \text{ la contenance d'un verre} \end{cases}$

La mise en équation du système donne :

$$\begin{cases} 2\times\frac{1}{2}\times P+3\times\frac{1}{2}\times F+4\times\frac{1}{2}\times A=37 \\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{10}\times P=V+\frac{1}{10} & \rightarrow P=20\left(V+\frac{1}{10}\right) \\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\times F=V+\frac{1}{4} & \rightarrow F=16\left(V+\frac{1}{4}\right) \\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times A=V+\frac{1}{2} & \rightarrow A=12\left(V+\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

On remplace dans la première équation :

$$2\times\frac{1}{2}\times 20\left(V+\frac{1}{10}\right)+3\times\frac{1}{2}\times 16\left(V+\frac{1}{4}\right)+4\times\frac{1}{2}\times 12\left(V+\frac{1}{2}\right)=37$$

$\Rightarrow \quad 20V+2+24V+6+24V+12=37$

$\Rightarrow \quad 68V=17 \Rightarrow V=\frac{1}{4}$

Ce qui nous donne :

$$\begin{cases} P=7 \\ F=8 \\ A=9 \end{cases}$$

Nous confirmons qu'Antoine a dû porter la charge la plus lourde

Le 8 septembre 2010

EXALG378 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 2010.

Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} (a+6)x + 2y + a(a+4)z = 1-a \\ 2x - (a+1)y - 2az = 17+a \\ (a+10)x + (a^2-15)y + a^2z = 35+a \end{cases}$$

Appliquons la méthode de Cramer.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+6 & 2 & a(a+4) \\ 2 & -(a+1) & -2a \\ a+10 & a^2-15 & a^2 \end{vmatrix} \overset{L_3=L_3-L_1-2L_2}{=} \begin{vmatrix} a+6 & 2 & a(a+4) \\ 2 & -a-1 & -2a \\ 0 & a^2+2a-15 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(a^2+2a-15)\begin{vmatrix} a+6 & a^2+4a \\ 2 & -2a \end{vmatrix} = -2a(a+5)(a-3)\begin{vmatrix} a+6 & a+4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2a(a+5)(a-3)(-a-6-a-4) = 4a(a+5)^2(a-3)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1-a & 2 & a^2+4a \\ 17+a & -a-1 & -2a \\ 35+a & a^2-15 & a^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2=L_2+L_1 \\ L_3=L_3+L_1}}{=} a\begin{vmatrix} 1-a & 2 & a+4 \\ 18 & -a+1 & a+2 \\ 36 & a^2-13 & 2a+4 \end{vmatrix} \overset{L_3=L_3-2L_2}{=} a\begin{vmatrix} 1-a & 2 & a+4 \\ 18 & -a+1 & a+2 \\ 0 & a^2+2a-15 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a(a^2+2a-15)\begin{vmatrix} 1-a & a+4 \\ 18 & a+2 \end{vmatrix} = -a(a+5)(a-3)(a+2-a^2-2a-18a-72)$$

$$= a(a+5)(a-3)(a^2+19a+70) = a(a+5)^2(a+14)(a-3)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a+6 & 1-a & a^2+4a \\ 2 & 17+a & -2a \\ a+10 & 35+a & a^2 \end{vmatrix} \overset{L_3=L_3-L_1-2L_2}{=} \begin{vmatrix} a+6 & 1-a & a^2+4a \\ 2 & 17+a & -2a \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a+6 & 2 & 1-a \\ 2 & -a-1 & 17+a \\ a+10 & a^2-15 & 35+a \end{vmatrix} \overset{L_3=L_3-L_1-2L_2}{=} \begin{vmatrix} a+6 & 2 & 1-a \\ 2 & -a-1 & 17+a \\ 0 & a^2+2a-15 & 0 \end{vmatrix} = -(a^2+2a-15)\begin{vmatrix} a+6 & 1-a \\ 2 & 17+a \end{vmatrix}$$

$$= -(a+5)(a-3)(17a+102+a^2+6a-2+2a) = -(a+5)(a-3)(a^2+25a+100)$$

$$= -(a+5)^2(a-3)(a+20)$$

Discussion

1er cas : $a = 0$

$$\begin{cases} 6x + 2y = 1 \\ 2x - y = 17 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) + 2(2) \rightarrow 10x = 35 \\ (3) - 3(2) \rightarrow -4x = -44 \end{cases} \Rightarrow \text{Système impossible}$$

2ème cas : $a = -5$

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 6 \\ 2x + 4y + 10z = 12 \\ 5x + 10y + 25z = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 - 2\lambda - 5\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \qquad \text{Système doublement indéterminé.}$$

3ème cas : $a = 3$

$$\begin{cases} 9x + 2y + 21z = -2 \\ 2x - 4y - 6z = 20 \\ 13x - 6y + 9z = 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-9\lambda + 4}{5} \\ y = -\dfrac{12\lambda + 23}{5} \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \text{Système simplement indeterminé.}$$

Dans les autres cas

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{a(a+5)^2(a+14)(a-3)}{4a(a+5)^2(a-3)} = \dfrac{a+14}{4} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = 0 \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{-(a-3)(a+5)^2(a+20)}{4a(a+5)^2(a-3)} = -\dfrac{a+20}{4a} \end{cases}$$

Le 8 septembre 2010. Modifié le 17 mai 2013 (Carine Demesmaeker)

EXALG379 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 2010.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$i(1+z)^4=1$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

Posons : $Z=z+1$. Il vient : $iZ^4=1 \Rightarrow Z^4=-i=\text{cis}(270°+k360°)$

Donc : $Z=\text{cis}\left(\dfrac{135^\circ}{2}+k90°\right)$

Pour $k=0 \Rightarrow Z=\text{cis}\dfrac{135°}{2}=\cos\dfrac{135°}{2}+i\sin\dfrac{135°}{2}$

$$\text{avec}\begin{cases}\cos\dfrac{135°}{2}=\sqrt{\dfrac{\cos 135°+1}{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} & \text{car } \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1\\ \sin\dfrac{135°}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos 135°}{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} & \text{car } \sin 2\alpha=1-2\sin^2\alpha\end{cases}$$

Alors : $Z=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}+\dfrac{i}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \Rightarrow z=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}-1+\dfrac{i}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

On répète la même chose pour $k=1, 2$ et 3. Ce qui donne le tableau récapitulatif suivant :

k	α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	z
0	67.5°	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}-1+\frac{i}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
1	157.5°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}-1+\frac{i}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
2	247.5°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}-1-\frac{i}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
3	337.5°	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}-1-\frac{i}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Le 8 septembre 2010