

Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 38

EXALG380 – EXALG389

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot
Benoit Baudalet – Steve Tumson

Septembre 2010

EXALG380 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2010.

Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{a, -a-1\}$ l'inéquation paramétrique

$$\frac{x}{x-a} + \frac{x+1}{x+a+1} \geq 0$$

où $a \in [0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-a} + \frac{x+1}{x+a+1} \geq 0 &\Rightarrow \frac{x^2 + ax + x + x^2 + x - ax - a}{(x-a)(x+a+1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 2x - a}{(x-a)(x+a+1)} \geq 0 \\ &\Rightarrow \frac{2\left(x - \frac{-1 - \sqrt{1+2a}}{2}\right)\left(x - \frac{-1 + \sqrt{1+2a}}{2}\right)}{(x-a)(x+a+1)} \geq 0 \end{aligned}$$

Pour construire un tableau de signe, il faut déterminer la position respective des racines des différents facteurs l'un par rapport à l'autre.

Il est immédiat que a et $\frac{-1 + \sqrt{1+2a}}{2}$ sont ≥ 0 et que $-a-1$ et $\frac{-1 - \sqrt{1+2a}}{2}$ sont ≤ 0

Déterminons la position de a et $\frac{-1 + \sqrt{1+2a}}{2}$.

Pour cela considérons la fonction : $f(a) = a + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+2a}}{2}$.

$f(0) = 0$ et $f'(a) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1+2a}}$ qui est toujours positif puisque $a \in [0, \infty[$

Nous en déduisons que quelque soit la valeur de a , nous avons $\frac{-1 + \sqrt{1+2a}}{2} \leq a$

Considérons maintenant la fonction : $g(a) = -a - 1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+2a}}{2}$.

$g(0) = 0$ et $g'(a) = -1 + \frac{1}{2\sqrt{1+2a}}$ qui est toujours négatif puisque $a \in [0, \infty[$

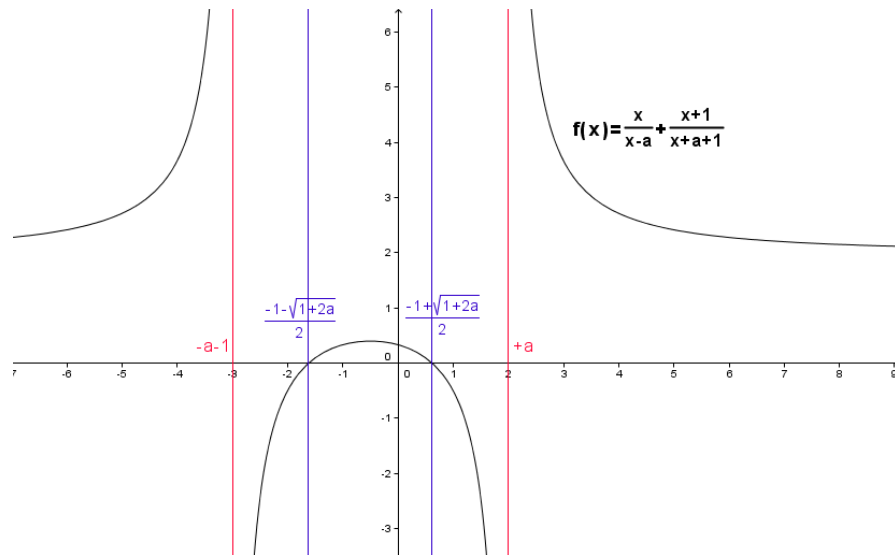
Nous en déduisons que quelque soit la valeur de a , nous avons $-a - 1 \leq \frac{-1 - \sqrt{1+2a}}{2}$

Nous pouvons alors construire le tableau de signe suivant

	$-a-1$	$\frac{-1 - \sqrt{1+2a}}{2}$	$\frac{-1 + \sqrt{1+2a}}{2}$	a
$2x^2 + 2x - a$	+	+	+	0
$(x-a)(x+a+1)$	+	0	-	-
$\frac{2x^2 + 2x - a}{(x-a)(x+a+1)}$	+	/	-	0

Conclusion :

$$a \in [0, \infty[\Rightarrow x \in]-\infty, -a-1[\cup \left[\frac{-1 - \sqrt{1+2a}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{1+2a}}{2} \right] \cup]a, +\infty[$$



27 septembre 2010

EXALG381 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2010.

Déterminer toutes les valeurs réelles de a et b pour que $(a+bi)^3$ soit un réel strictement supérieure à 8. Interpréter géométriquement l'ensemble des solutions.

$$(a+bi)^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab^2 > 8 & (1) \\ 3a^2b - b^3 = 0 \Rightarrow b(\sqrt{3}a+b)(\sqrt{3}a-b) = 0 \end{cases}$$

1er cas : $b = 0 \Rightarrow a^3 > 8 \Rightarrow a > 2$

2ème cas : $b = -\sqrt{3}a$

Ce qui se représente par une droite passant par l'origine et de pente $m = -\sqrt{3}$

On remplace dans (1) : $a^3 - 9a^3 > 8 \Rightarrow a < -1$

3ème cas : $b = +\sqrt{3}a$

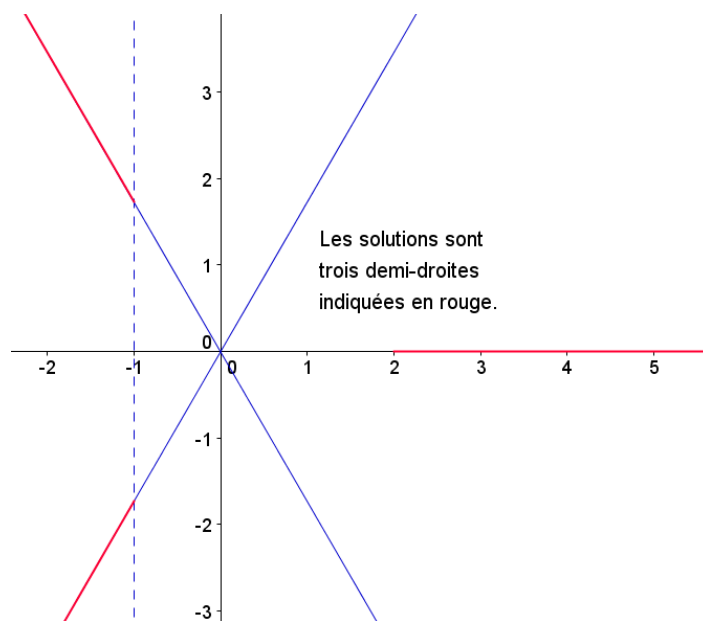
Ce qui se représente par une droite passant par l'origine et de pente $m = +\sqrt{3}$

On remplace dans (1) : $a^3 - 9a^3 > 8 \Rightarrow a < -1$

Conclusion :

$$\begin{cases} b = 0 & \text{avec } a > 2 \\ b = \pm\sqrt{3}a & \text{avec } a < -1 \end{cases}$$

Ce qui correspond à trois demi-droites. Voir figure ci-dessous.



EXALG382 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2010.

Déterminer toutes les valeurs réelles du paramètre m , telle que

$$\frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} < 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Remarquons que le dénominateur est toujours positif car son discriminant est négatif.

Nous pouvons donc éliminer le dénominateur.

$$\Rightarrow \frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} < 3 \Rightarrow x^2 - mx + 1 - 3x^2 - 3x - 3 < 0 \Rightarrow 2x^2 + (m+3)x + 2 > 0$$

Comme le coefficient du x^2 est positif, ce trinôme sera toujours positif si son discriminant est ≤ 0

$$\Rightarrow \Delta = (m+3)^2 - 16 = (m-1)(m+7) \leq 0$$

Ce qui donne les solutions : $m \in]-7, 1[$

Le 26 décembre 2010

EXALG383 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2010.

Factoriser au maximum le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_1=C_1-C_3 \\ C_2=C_2-C_3}} \begin{vmatrix} -a-b-c & 0 & 2a \\ 0 & -b-c-a & 2b \\ c+a+b & c+a+b & c-a-b \end{vmatrix} \\ & = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 0 & -1 & 2b \\ 1 & 1 & c-a-b \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1=L_1+L_2+L_3} (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & a+b+c \\ 0 & -1 & 2b \\ 1 & 1 & c-a-b \end{vmatrix} \\ & = (a+b+c)^3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)^3 \end{aligned}$$

Le 13 juillet 2010

EXALG384 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2010.

Résoudre dans \mathbb{R}^3 , en discutant en fonction du paramètre réel m , le système

$$\begin{cases} x + y + (m^2 - 1)z = -m \\ mx + y + 2(m-1)z = -m \\ (1+m)x - my + (m+1)z = m^2 + 3m + 3 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

La résolution de cet exercice nécessite des calculs longs et fastidieux.

On peut raisonnablement se poser la question de l'intérêt de ces difficultés.

A moins, d'une erreur dans l'énoncé.....?

Calculons le Δ du système :

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & m^2 - 1 \\ m & 1 & 2(m-1) \\ 1+m & -m & m+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2=C_2-C_1 \\ C_3=C_3-C_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & m^2 - 2 \\ m & 1-m & m-2 \\ 1+m & -1-2m & 0 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{L_2=L_2-L_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & m^2 - 2 \\ m-1 & 1-m & m(1-m) \\ 1+m & -1-2m & 0 \end{vmatrix} = (1-m) \begin{vmatrix} 1 & 0 & m^2 - 2 \\ -1 & 1 & m \\ 1+m & -1-2m & 0 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{L_3=L_3+L_2} (1-m) \begin{vmatrix} 1 & 0 & m^2 - 2 \\ -1 & 1 & m \\ m & -2m & m \end{vmatrix} = m(1-m) \begin{vmatrix} 1 & 0 & m^2 - 2 \\ -1 & 1 & m \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{\substack{L_2=L_2+L_1 \\ L_3=L_3-L_1}} m(1-m) \begin{vmatrix} 1 & 0 & m^2 - 2 \\ 0 & 1 & m^2 + m - 2 \\ 0 & -2 & 3 - m^2 \end{vmatrix} = m(1-m) \begin{vmatrix} 1 & m^2 + m - 2 \\ -2 & 3 - m^2 \end{vmatrix} \\ & = m(1-m)(m^2 + 2m - 1) \end{aligned}$$

Les valeurs remarquables à considérer sont donc : $m = 0$, $m = 1$, $m = 1 \pm \sqrt{2}$

1er cas : $m = 0$

$$\text{Le système devient : } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ +y - 2z = 0 \\ x + z = 3 \end{cases} \xrightarrow{L_1 - L_2} \begin{cases} x + z = 0 \\ x + z = 3 \end{cases} \quad \text{système impossible}$$

2ème cas : $m = 1$

Le système devient :

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x + y = -1 \\ 2x - y + 2z = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{Posons } z = \lambda} \begin{cases} x + y = -1 \\ 2x - y = 7 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \frac{2}{3}\lambda \\ y = -3 + \frac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{système simplement indéterminé}$$

3ème cas : $m = -1 - \sqrt{2}$

Le système devient :

$$\begin{cases} x + y + 2(1 + \sqrt{2})z = 1 + \sqrt{2} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(1 + \sqrt{2})x + y - 2(2 + \sqrt{2})z = 1 + \sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{2}x + (1 + \sqrt{2})y - \sqrt{2}z = 3 - \sqrt{2} & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) & \rightarrow x + y + 2(1 + \sqrt{2})z = 1 + \sqrt{2} & (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) - (2) & \rightarrow (2 + \sqrt{2})x + 2(3 + 2\sqrt{2})z = 0 & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - \sqrt{2}) \times (3) & \rightarrow (2 - \sqrt{2})x - y + (2 - \sqrt{2})z = 5 - 4\sqrt{2} & (6) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (4) + (6) & \rightarrow (3 - \sqrt{2})x + (4 + \sqrt{2})z = 6 - 3\sqrt{2} & (7) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (5) & \rightarrow (2 + \sqrt{2})x + 2(3 + 2\sqrt{2})z = 0 & (8) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (4 - \sqrt{2}) \times (7) & \rightarrow (14 - 7\sqrt{2})x + 14z = 30 - 8\sqrt{2} & (9) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3 - 2\sqrt{2}) \times (8) & \rightarrow (2 - \sqrt{2})x + 2z = 0 & (10) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{7} \times (9) & \rightarrow (2 - \sqrt{2})x + 2z = \frac{30 - 8\sqrt{2}}{7} \\ (10) & \rightarrow (2 - \sqrt{2})x + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{Système impossible}$$

4ème cas : $m = -1 + \sqrt{2}$

$$\begin{cases} x + y + 2(1 - \sqrt{2})z = 1 - \sqrt{2} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-1 + \sqrt{2})x + y + 2(-2 + \sqrt{2})z = 1 - \sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + (1 - \sqrt{2})y + \sqrt{2}z = 3 + \sqrt{2} & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) & \rightarrow x + y + 2(1 - \sqrt{2})z = 1 - \sqrt{2} & (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) - (2) & \rightarrow (2 - \sqrt{2})x + 2(3 - 2\sqrt{2})z = 0 & (5) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1 + \sqrt{2}) \times (3) & \rightarrow (2 + \sqrt{2})x - y + (2 + \sqrt{2})z = 5 - \sqrt{2} & (6) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (4) + (6) & \rightarrow (3 + \sqrt{2})x + (4 - \sqrt{2})z = 6 - 2\sqrt{2} & (7) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (5) & \rightarrow (2 - \sqrt{2})x + 2(3 - 2\sqrt{2})z = 0 & (8) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (4 + \sqrt{2}) \times (7) & \rightarrow (14 + 7\sqrt{2})x + 14z = 20 - 2\sqrt{2} & (9) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3 + 2\sqrt{2}) \times (8) & \rightarrow (2 + \sqrt{2})x + 2z = 0 & (10) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{7} \times (9) & \rightarrow (2 + \sqrt{2})x + 2z = \frac{20 - 2\sqrt{2}}{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (10) & \rightarrow (2 + \sqrt{2})x + 2z = 0 \end{cases}$$

Systeme impossible

Dans les autres cas

$$\begin{cases} x + y + (m^2 - 1)z = -m & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} mx + y + 2(m-1)z = -m & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+m)x - my + (m+1)z = m^2 + 3m + 3 & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1)-(2) & \rightarrow (1-m)x + [(m-1)(m+1) - 2(m-1)]z = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2) + \frac{1}{m} \times (3) & \rightarrow \left(m + \frac{1+m}{m}\right)x + \left(2m - 2 + \frac{m+1}{m}\right)z = -m + \frac{m^2 + 3m + 3}{m} & (5) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{m-1} \times (4) & \rightarrow -x + (m-1)z = 0 & (6) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (5) & \rightarrow \frac{m^2 + m + 1}{m}x + \frac{2m^2 - m + 1}{m}z = \frac{3m + 3}{m} & (7) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (6) & \rightarrow x = (m-1)z & (8) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \times (7) & \rightarrow (m^2 + m + 1)x + (2m^2 - m + 1)z = 3m + 3 & (9) \end{cases}$$

$$\text{Injectons (8) dans (9): } z = \frac{3m + 3}{m(m^2 + 2m - 1)} \quad (10)$$

$$\text{puis (10) dans (6): } x = \frac{3(m+1)(m-1)}{m(m^2 + 2m - 1)} \quad (11)$$

et finalement (10) et (11) dans (1):

$$y = -m - \frac{3(m+1)(m-1)}{m(m^2 + 2m - 1)} - \frac{3(m+1)(m^2 - 1)}{m(m^2 + 2m - 1)} = -\frac{m^4 + 5m^3 + 5m^2 - 3m - 6}{m(m^2 + 2m - 1)}$$

Résumé

- | | |
|--------------------------|--------------------------------|
| 1) $m = 0$ | système impossible |
| 2) $m = 1$ | système simplement indéterminé |
| 3) $m = -1 \pm \sqrt{2}$ | système impossible |

$$4) \text{ dans les autres cas : } \begin{cases} x = \frac{3(m+1)(m-1)}{m(m^2 + 2m - 1)} \\ y = -\frac{m^4 + 5m^3 + 5m^2 - 3m - 6}{m(m^2 + 2m - 1)} \\ z = \frac{3m + 3}{m(m^2 + 2m - 1)} \end{cases}$$

EXALG385 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2010.

Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation

$$\log_{10}(7x-9)^2 + 2\log_{10}(3x-4) = 2$$

$$CE: \begin{cases} x \neq \frac{9}{7} \\ 3x-4 > 0 \Rightarrow x > \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{4}{3}$$

L'équation devient successivement

$$\log_{10}[(7x-9)^2(3x-4)^2] = \log_{10} 10^2$$

$$\Leftrightarrow (7x-9)^2(3x-4)^2 - 10^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [(7x-9)(3x-4)-10][(7x-9)(3x-4)+10] = 0$$

$$\Leftrightarrow (21x-55x+26)(21x-55x+46) = 0$$

1er cas : $21x - 55x + 26 = 0 \Rightarrow x = \frac{+55 \pm \sqrt{55^2 - 4 \times 21 \times 26}}{42} = \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{13}{21} \text{ à rejeter} \end{cases}$

2ème cas : $21x - 55x + 46 = 0 \Rightarrow \Delta = 55^2 - 4 \times 21 \times 46 = -839 < 0$ Pas de solution.

Conclusion $S: \{2\}$

Le 26 décembre 2010

EXALG386 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2010.

Déterminer toutes les valeurs réelles des paramètres a et b telles que le polynôme

$$P(x) = ax^5 + bx^3 + a^2x + b^2$$

soit divisible par $(x+1)^2$

Appliquons deux fois Horner pour effectuer deux fois par $x+1$

	5	4	3	2	1	0
	a		b		a^2	b^2
-1		$-a$	a	$-a-b$	$a+b$	$-a^2-a-b$
	a	$-a$	$a+b$	$-a-b$	a^2+a+b	b^2-a^2-a-b
-1		$-a$	$2a$	$-3a-b$	$4a+2b$	
	a	$-2a$	$3a+b$	$-4a-2b$	$a^2+5a+3b$	

Le polynôme sera divisible si :

$$\begin{cases} b^2 - a^2 - a - b = 0 \\ a^2 + 5a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow b^2 + 4a + 2b = 0 \Rightarrow a = -\frac{2b+b^2}{4}$$

On remplace dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2b+b^2}{4}\right)^2 + 5\left(-\frac{2b+b^2}{4}\right) + 3b &= 0 \\ \Rightarrow b(b^3 + 4b^2 - 16b + 8) &= 0 \\ \Rightarrow b(b-2)(b^2 + 6b - 4) &= 0 \\ \Rightarrow b(b-2)(b+3+\sqrt{13})(b+3-\sqrt{13}) &= 0 \end{aligned}$$

On a alors :

a	b	$P(x)$
0	0	Solution triviale à rejeter
-2	2	$-2x^5 + 2x^3 + 4x + 4 = (x+1)^2(-2x^3 + 4x^2 - 4x + 4)$
$-4-\sqrt{13}$	$-3-\sqrt{13}$	$-(4+\sqrt{13})x^5 - (3+\sqrt{13})x^3 + (29+8\sqrt{13})x + 22 + 6\sqrt{13}$ $= (x+1)^2(-(4+\sqrt{13})x^3 + (8+2\sqrt{13})x^2 - (15+4\sqrt{13})x + 22 + 6\sqrt{13})$
$-4+\sqrt{13}$	$-3+\sqrt{13}$	$-(4-\sqrt{13})x^5 - (-3+\sqrt{13})x^3 + (29-8\sqrt{13})x + 22 - 6\sqrt{13}$ $= (x+1)^2(-(4-\sqrt{13})x^3 + (8-2\sqrt{13})x^2 - (15-4\sqrt{13})x + 22 - 6\sqrt{13})$

EXALG387 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2010.

Déterminer toutes les valeurs réelles du paramètre m pour lesquelles la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3m+1 & m-1 & m^2+1 \\ -5-m & 2m-2 & 2m \\ 2+2m & -m^2+1 & m+1 \end{pmatrix}$$

est inversible

Les valeurs pour lesquelles la matrice n'est pas inversible correspondent à son delta nul.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3m+1 & m-1 & m^2+1 \\ -5-m & 2m-2 & 2m \\ 2+2m & -m^2+1 & m+1 \end{vmatrix} &= (m+1)(m-1) \begin{vmatrix} 3m+1 & 1 & m^2+1 \\ -5-m & 2 & 2m \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \xrightarrow[\substack{L_2=L_2-2L_1 \\ L_3=L_3+L_1}]{(m+1)(m-1)} &\begin{vmatrix} 3m+1 & 1 & m^2+1 \\ -7-7m & 0 & 2m-2m^2-2 \\ 3m+3 & 0 & m^2+2 \end{vmatrix} \\ &= -(m+1)(m-1) \begin{vmatrix} -7(m+1) & 2m-2m^2-2 \\ 3(m+1) & m^2+2 \end{vmatrix} = -(m+1)^2(m-1) \begin{vmatrix} -7 & 2m-2m^2-2 \\ 3 & m^2+2 \end{vmatrix} \\ &= -(m+1)^2(m-1)(-m^2-6m-8) = (m+1)^2(m-1)(m+2)(m+4) \end{aligned}$$

Conclusion

La matrice A est inversible pour tout $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; -2; -4\}$

Pour information, la matrice inverse est :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{(m+2)(m+4)} & -\frac{m^2+2}{(m+1)(m+2)(m+4)} & -\frac{2m^2-2m+2}{(m+1)^2(m+2)(m+4)} \\ \frac{5}{(m-1)(m+2)(m+4)} & -\frac{2m-1}{(m+1)(m+2)(m+4)} & -\frac{m^3+11m^2+3m+5}{(m-1)(m+1)^2(m+2)(m+4)} \\ \frac{1}{(m+2)(m+4)} & \frac{3}{(m+2)(m+4)} & \frac{7}{(m+1)(m+2)(m+4)} \end{pmatrix}$$

Le 20 février 2011

EXALG388 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2010.

Résoudre dans \mathbb{R}^3 , en discutant en fonction du paramètre réel m , le système

$$\begin{cases} -mx - (m^2 + m)y + z = m^2 + m \\ x + (-m + 1)y - mz = -1 \\ -mx + (m^2 + 1)y + z = -m - 1 \end{cases}$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

Calculons le Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -m & -m^2 - m & 1 \\ 1 & -m + 1 & -m \\ -m & m^2 + 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 + L_1} \begin{vmatrix} -m & -m^2 - m & 1 \\ 1 & -m + 1 & -m \\ 0 & 2m^2 + m + 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (2m^2 + m + 1) \begin{vmatrix} -m & 1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = (2m^2 + m + 1)(m - 1)(m + 1)$$

1er cas : $m = 1$

$$\text{Le système devient : } \begin{cases} -x - 2y + z = 2 \\ x - z = -1 \\ -x + 2y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2z = 4 \\ x - z = -1 \end{cases} \text{ Système impossible}$$

2ème cas : $m = -1$

$$\text{Le système devient : } \begin{cases} x + z = 0 \\ x + 2y + z = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Système impossible}$$

Dans les autres cas :

$$\begin{cases} -mx - (m^2 + m)y + z = m^2 + m & (1) \\ x + (-m + 1)y - mz = -1 & (2) \\ -mx + (m^2 + 1)y + z = -m - 1 & (3) \end{cases}$$

En faisant (1) - (3), on trouve : $y = -\frac{(m+1)^2}{2m^2 + m + 1}$.

On remplace dans (1) et (2)

$$\begin{cases} -mx + z = m^2 + m - \frac{m(m+1)^3}{2m^2 + m + 1} & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - mz = -1 - \frac{(m+1)^2(1-m)}{2m^2 + m + 1} & (5) \end{cases}$$

En faisant (4) + m × (5), on trouve :

$$(1 - m^2)z = m^2 - \frac{m(m+1)^3}{2m^2 + m + 1} - \frac{m(m+1)^2(1-m)}{2m^2 + m + 1}$$

Après simplification : $z = \frac{m^2(3m+1)}{(2m^2 + m + 1)(m-1)(m+1)}$

Injectons y et z dans 2 :

$$\begin{aligned} x &= -1 + (-m+1) \frac{(m+1)^2}{2m^2 + m + 1} + \frac{m^3(3m+1)}{(2m^2 + m + 1)(1-m)(m+1)} \\ &= -\frac{m^2(m^3 - 2m + 3)}{(2m^2 + m + 1)(1-m)(m+1)} \end{aligned}$$

Conclusion

$$\begin{cases} x = \frac{m^2(m^3 - 2m + 3)}{(2m^2 + m + 1)(1-m)(m+1)} \\ y = -\frac{(m+1)^2}{2m^2 + m + 1} \\ z = \frac{m^2(3m+1)}{(2m^2 + m + 1)(m-1)(m+1)} \end{cases}$$

EXALG389 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2011, série 1.

Déterminer toutes les racines (réelles ou complexes) de l'équation complexe en z :

$$iz^2 + (5 - 2i)z + 50 = 0 \quad (1)$$

où i est l'unité (la particule) imaginaire (ou encore $i^2 = -1$).

(Réponse(s) sous la forme $(a + bi)$ ou (r, φ) au choix.)

Solution proposée par Jan Franc Broeckx

Malgré que ce ne soit pas strictement nécessaire, il est toutefois plus facile pour l'écriture finale de la solution de multiplier l'équation (1) par $-i$, de sorte que le coefficient de z^2 devienne unité :

$$(1) \Leftrightarrow z^2 - (2 + 5i)z - 50i = 0 \quad (2)$$

Calcul du discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= (2 + 5i)^2 + 200i \\ &= 4 + 20i - 25 + 200i \\ &= -21 + 220i \end{aligned}$$

Calcul des racines carrées du discriminant :

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta} = a + bi &\Leftrightarrow (a + bi)^2 = -21 + 220i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -21 \\ 2ab = 220 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (a^2 - b^2)^2 = 441 \\ 4a^2b^2 = 48400 \end{cases} \\ &\Rightarrow (a^2 + b^2)^2 = 48841 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 221 \\ a^2 - b^2 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 121 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 10 \\ b = \pm 11 \end{cases} \\ &\text{et } a \text{ et } b \text{ ont le même signe} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = \pm(10 + 11i) \end{aligned}$$

Calcul des solutions de l'équation du second degré :

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left(+(2 + 5i) \pm (10 + 11i) \right) = \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}(12 + 16i) = 6 + 8i \\ z_2 = \frac{1}{2}(-8 - 6i) = -4 - 3i \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$S = \{6 + 8i, -4 - 3i\}$$

Le 8 septembre 2010