Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 4

EXALG040 – EXALG049

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG040 - Liège, juillet 1997

Résoudre l'équation :

$$Z^2 = |Z|^2 + i\sqrt{2}\,|Z|$$

Suggestion : Rechercher | Z | en égalant les modules des deux membres. En déduire la forme trigonométrique des solutions. Pour obtenir les formes algébriques, noter que π/12= π/3 - π/4

A l'exercice EXALG037, on montre que : $\left|Z^2\right| = |Z|^2$.

De même, on montre facilement que $\left|Z^3\right| = |Z|^3$.

Egalons les modules des deux membres :

$$\left|Z^3\right| = \sqrt{|Z|^4 + 2|Z|^2} \quad \to \quad |Z|^3 = |Z|\sqrt{|Z|^2 + 2}$$

1) $|Z| = 0 \quad \to \quad a = b = 0$ Solution triviale

2) $|Z|^2 = \sqrt{|Z|^2 + 2} \quad \to \quad |Z|^4 - |Z|^2 - 2 = 0$

$\to \quad |Z|^2 = \dfrac{1 \pm 3}{2} = 2$ (On ne retient que la solution > 0)

$\to \quad |Z| = \sqrt{2}$

L'équation de départ devient :

$$Z^3 = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)$$

$$\to \quad Z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right)$$

$a)$ si $k=0$

$$Z_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}+i\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)+\frac{1}{2}i\left(\sqrt{3}-1\right)$$

$b)$ si $k=1$

$$Z_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=-1+i$$

$c)$ si $k=2$

$$Z_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\left(-\sin\frac{17\pi}{12}-i\cos\frac{17\pi}{12}\right)$$

$$=-\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=-\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}+i\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)-\frac{1}{2}i\left(1+\sqrt{3}\right)$$

EXALG041 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 1996

Résoudre l'équation :

$$Z^3 = -|Z| \qquad Z \in \mathbb{C}$$

Solution proposée par Hugues VERMEIREN

Conseil : Ne jamais oublier que $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

$Z = 0$ est une solution évidente. Supposons donc que $Z \neq 0$:

- En prenant le module des deux membres, on obtient:

$$|Z^3| = |Z| \iff |Z|\left(|Z|^2 - 1\right) = 0 \iff |Z| = 1 \text{ car } Z \neq 0\,.$$

- L'équation se réécrit donc $Z^3 = -1$, dont les solutions sont les racines cubiques de -1.
- Les solutions sont donc

$$Z_0 = 0\,,\ Z_1 = -1\,,\ Z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ Z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Autre manière de raisonner...

- Elevons au carré les deux membres de l'équation:

$$\begin{aligned} Z^3 = -|Z| &\implies Z^6 = |Z|^2 \\ &\implies Z^6 = Z \cdot \overline{Z} \\ &\implies Z^5 = \overline{Z} \end{aligned}$$

- Si Z est solution et si $\alpha = \arg Z$, on a donc

$$\begin{aligned} 5\alpha = -\alpha \mod (2\pi) &\iff 6\alpha = 0 \mod (2\pi) \\ &\iff 6\alpha = 2k\pi \\ &\iff \alpha = \frac{k\pi}{3} \end{aligned}$$

- En élevant au carré, on ramasse (parfois) des solutions parasites. Les solutions se trouvent parmi les complexes : $z_k = \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ car $|Z| = 1$.
  On vérifie alors que seules les valeurs $k = 1, 3, 5$ fournissent une solution non nulle.

Solution proposée par Jacques COLLOT

On voit immédiatement que 0 et -1 sont deux solutions de l'équation

Si $Z = -1$

$Z^3 = -1 = \cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)$

$\rightarrow\ Z = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)$

$a)\ k = 0 \quad \rightarrow \quad Z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$b)\ k = 1 \quad \rightarrow \quad Z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = -1$

$c)\ k = 2 \quad \rightarrow \quad Z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$

$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Modifié le 6 septembre 2018 (Hugues VERMEIREN)

EXALG042 – Compléments.

En utilisant les nombres complexes :
Exprimer en fonction de cos φ

$$\cos 2\phi \quad \cos 3\phi \quad \cos 4\phi$$

Démontrer la relation suivante :

$$\cos^4 \phi = \frac{1}{8}\cos 4\phi + \frac{1}{2}\cos 2\phi + \frac{3}{8}$$

<u>Rappel</u>

Si $Z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ est un nombre complexe,

son conjugué est $\overline{Z} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

On déduit facilement les formules suivantes :

$$\cos\varphi = \frac{Z+\overline{Z}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{Z-\overline{Z}}{2}$$

$$Z.\overline{Z} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

$$Z^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi \quad et \quad \overline{Z}^n = \cos n\varphi - \mathrm{i}\sin n\varphi$$

$$\cos n\varphi = \frac{Z^n + \overline{Z}^n}{2} \quad \text{et} \quad \sin n\varphi = \frac{Z^n - \overline{Z}^n}{2}$$

A ne pas confondre avec :

$$\cos^n \varphi = \left(\frac{Z+\overline{Z}}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad \sin^n \varphi = \left(\frac{Z-\overline{Z}}{2}\right)^n$$

$\underline{A)\ \cos 2\varphi}$

$$\cos 2\varphi = \frac{Z^2+\overline{Z}^2}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi + \cos^2\varphi - 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi\right) = 2\cos^2\varphi - 1$$

$\underline{B)\ \cos 3\varphi}$

$$\cos 3\varphi = \frac{Z^3+\overline{Z}^3}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(\cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi$$
$$+\cos^3\varphi - 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i\sin^3\varphi)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2\cos^3\varphi - 6\left(1-\cos^2\varphi\right)\cos\varphi\right) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

$\underline{C)\ \cos 4\varphi}$

$$\cos 4\varphi = \frac{Z^4+\overline{Z}^4}{2}$$
$$Z^4 = \cos^4\varphi + 4i\cos^3\varphi\sin\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 4i\cos\varphi\sin^3\varphi + \sin^4\varphi$$
$$\overline{Z}^4 = \cos^4\varphi - 4i\cos^3\varphi\sin\varphi + 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 4i\cos\varphi\sin^3\varphi + \sin^4\varphi$$
$$Z^4+\overline{Z}^4 = 2\cos^4\varphi + 2\sin^4\varphi = 2\left(\cos^4\varphi + \left(1-\cos^2\varphi\right)^2\right)$$
$$= 2\left(\cos^4\varphi + 1 - 2\cos^2\varphi + \cos^4\varphi\right) = 4\cos^4\varphi - 4\cos^2\varphi + 2$$
$$\cos 4\varphi = 2\cos^4\varphi - 2\cos^2\varphi + 1$$

$\underline{D)\ \cos^4\varphi}$

$$\cos^4\varphi = \left(\frac{Z+\overline{Z}}{2}\right)^4$$
$$= \frac{1}{16}\left(Z^4 + 4Z^3\overline{Z} + 6Z^2\overline{Z}^2 + 4Z\overline{Z}^3 + \overline{Z}^4\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(Z^4 + 4Z^2 + 6 + 4\overline{Z}^2 + \overline{Z}^4\right)$$
$$= \frac{1}{16}(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 4i\sin 2\varphi + 6$$
$$+4\cos 2\varphi - 4i\sin 2\varphi + \cos 4\varphi - i\sin 4\varphi)$$
$$= \frac{1}{16}\left(2\cos 4\varphi + 8\cos 2\varphi + 6\right) = \frac{1}{8}\cos 4\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{3}{8}$$

EXALG043 – Liège, septembre 1997.

a) En utilisant la formule de Moivre, montrer que cos 5φ peut se mettre sous la forme :

$$\cos 5\phi = \cos\phi \; P_4(\cos\phi)$$

où P_4 (cos φ) est un polynôme du 4ème degré en cos φ.

b) Calculer les racines du polynôme P_4

c) En déduire la valeur de cos π/10. (Noter que cos 5π/10 =0)

$\underline{A)\ \cos 5\varphi}$

$$\cos 5\varphi = \frac{Z^5 + \overline{Z}^5}{2}$$

$$Z^5 = \cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi - 10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi$$

$$\overline{Z}^5 = \cos^5\varphi - 5i\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi - i\sin^5\varphi$$

$$Z^5 + \overline{Z}^5 = 2\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 10\cos\varphi\sin^4\varphi$$

$$= 2\cos\varphi\left(\cos^4\varphi - 10\cos^2\varphi\left(1-\cos^2\varphi\right) + 5\left(1-\cos^2\varphi\right)^2\right)$$

$$= 2\cos\varphi\left(16\cos^4\varphi - 20\cos^2\varphi + 5\right)$$

$$\cos 5\varphi = \cos\varphi\left(16\cos^4\varphi - 20\cos^2\varphi + 5\right)$$

$\underline{B)\ \text{Racines}}$

$$16\cos^4\varphi - 20\cos^2\varphi + 5 = 0 \quad\rightarrow\quad \cos^2\varphi = \frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$$

$$\rightarrow\quad \cos\varphi_1 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \qquad \cos\varphi_2 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \qquad \cos\varphi_3 = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \qquad \cos\varphi_4 = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

$\underline{C)\ \cos\frac{\pi}{10}}$

Puisque $\cos 5\frac{\pi}{10} = 0$, la valeur cherchée est une des solutions ci-dessus.

$$\rightarrow\quad \cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = 0.951$$

EXALG044 – Compléments.

a) Démontrer :

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

b) En déduire la formule d'Euler :

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

A) On connait les développements en série :

$$\sin\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots$$

$$\cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots$$

$$\rightarrow e^{i\,\theta} = 1 + i\ \theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\ \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\ \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} \ldots\ldots$$

$$= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots\ldots + i\ \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots\ldots\right)$$

$$\rightarrow \boxed{e^{i\,\theta} = \cos\ \theta + i\ \sin\ \theta}$$

B) Si $\theta = \pi \rightarrow \boxed{e^{i\,\pi} = -1}$

C) Notes

On a aussi :

$$Z = x + i\ y = r\left(\cos\ \theta + i\ \sin\ \theta\right) = r\ \ \text{cis}\ \ \theta = r\ \ e^{i\,\theta}$$

On définit également :

$$\cos\ \theta = \frac{e^{i\,\theta} + e^{-i\,\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\ \theta = \frac{e^{i\,\theta} - e^{-i\,\theta}}{2\ i}$$

On trouve facilement les formules :

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2\ \ e^{i\,(\theta_1+\theta_2)}\ , \quad Z^n = r^n\ \ e^{i\,n\,\theta}, \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}\ \ e^{i\,(\theta_1-\theta_2)}$$

EXALG045 – POLYTECH, UMons, Mons, questions-types 2000-2001.

On suppose que les racines de $x^2 + px + q = 0$ ($p, q \in R$) sont complexes.
Quel est le lieu des racines dans le plan complexe lorsque p varie, q étant constant.

L'équation a des racines complexes, si : $\Delta = p^2 - 4q < 0$

Soit $Z = a + bi = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2} \quad \rightarrow \quad 2a + 2ib + p = \pm\sqrt{p^2-4q}$

$\rightarrow \quad 4a^2 - 4b^2 + p^2 + 4ap + 4ipb + 8iab = p^2 - 4q$

$\rightarrow \quad a^2 - b^2 + ap + q + ib(p + 2a) = 0$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 + ap + q = 0 \\ p + 2a = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 + ap + q = 0 \\ -2a = p \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 - 2a^2 + q = 0 \\ -2a = p \end{cases}$$

$\rightarrow \quad a^2 + b^2 = q$

Le lieu est donc : $x^2 + y^2 = q$. C'est un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{q}$.

EXALG046

Résoudre et représenter.

$$-Z^2+(i+1)Z-(i+2)=0$$

$Z^2-(i+1)Z+(i+2)=0$

$\Delta^2=(1+i)^2-4i-8=-8-2i$

Calcul de Δ :

$\begin{cases} x^2-y^2=-8 \\ 2xy=-2 \ \ (x \text{ et } y \text{ de signes contraires}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{8^2+2^2}=2\sqrt{17} \\ x^2-y^2=-8 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2=\sqrt{\sqrt{17}-4} \\ y^2=\sqrt{\sqrt{17}+4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0.3509 \\ y=-2.8501 \end{cases}$

$\rightarrow Z_1=\frac{1}{2}\left((i+1)+(0.3509-2.8501i)\right)=0.6755-0.9251i$

$\rightarrow Z_2=\frac{1}{2}\left((i+1)-(0.3509-2.8501i)\right)=0.3246+1.9251i$

EXALG047 – Mons, questions-types 2000-2001.

La fonction $f(Z)$ de la variable complexe Z est définie par :

$$f(Z) = Z^3 + 4(1-i)Z^2 - 2(2+7i)Z - 16 + 8i = 0$$

Sachant que cette fonction admet une et une seule racine réelle, rechercher les racines de $f(Z)$ et les représenter dans le plan complexe.

Soit a, la racine réelle. On a :

$f(a) = a^3 + 4(1-i)a^2 - 2(2+7i)a - 16 + 8i = 0.$

$$\rightarrow \begin{cases} a^3 + 4a^2 - 4a - 16 = 0 & (1) \\ -4a^2 - 14a + 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow 2a^2 + 7a - 4 = 0 \rightarrow a = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4.2.4}}{4} \rightarrow \begin{cases} a_1 = -4 \\ a_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On teste dans (1) :

$$(-4)^3 + 4(-4)^2 - 4(-4) - 16 = 0$$

$$(\frac{1}{2})^3 + 4(\frac{1}{2})^2 - 4(\frac{1}{2}) - 16 \neq 0$$

Donc $f(Z)$ est divisible par $Z + 4$

n	3	2	1	0
	1	$4-4i$	$-4-14i$	$-16+8i$
-4		-4	$16i$	$16-8i$
	1	$-4i$	$-4+2i$	0

$$\rightarrow \quad f(Z) = (Z+4)(Z^2 - 4iZ - 4 + 2i)$$

Résolvons l'équation du second degré :

$Z^2 - 4iZ - 4 + 2i = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta = (-4i)^2 - 4(-4+2i) = -8i$

Calculons $\sqrt{\Delta}$

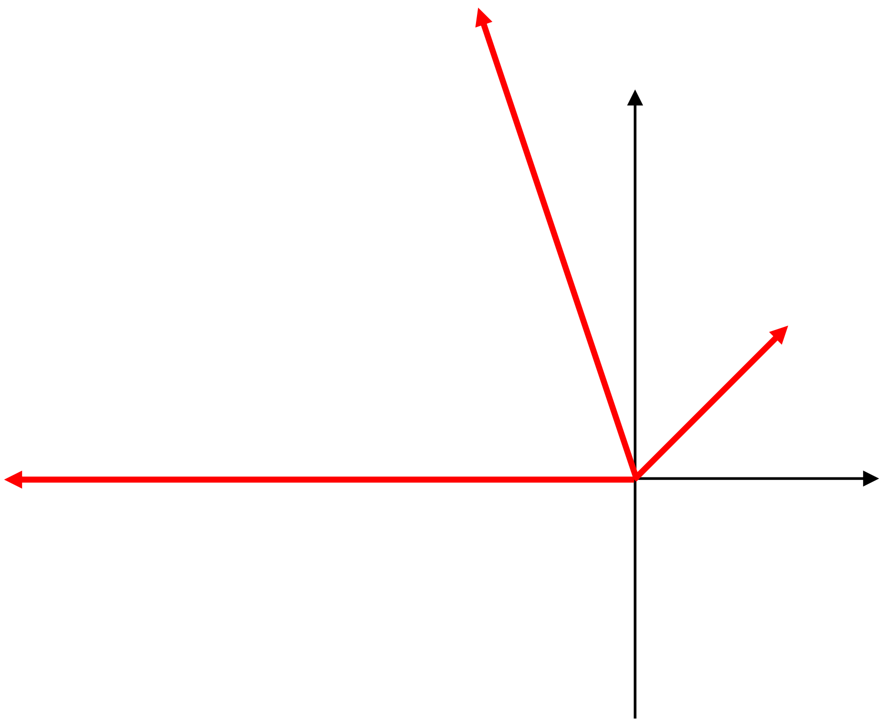
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -8 \quad (x \text{ et } y \text{ de signes contraires}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \rightarrow \sqrt{\Delta} = 2 - 2i$$

Conclusions:

$$Z_1 = -4$$

$$Z_2 = \frac{1}{2}(4i + 2 - 2i) = i + 1$$

$$Z_3 = \frac{1}{2}(4i - 2 + 2i) = -1 + 3i$$



Modifié le 21 août 2009

EXALG048 – Mons, questions-types 2000-2001.

Déterminer les solutions de l'équation suivante dans C

$$Z+3\bar{Z}=\left(2+i\sqrt{3}\right)|\,Z\,|$$

On a :

$$\left(a+bi\right)+3\left(a-bi\right)=\left(2+i\sqrt{3}\right)\sqrt{a^2+b^2}\quad\rightarrow\quad 4a-2bi=2\sqrt{a^2+b^2}+i\sqrt{3\left(a^2+b^2\right)}$$

$$\rightarrow\quad\begin{cases}4a=2\sqrt{a^2+b^2} & \rightarrow\quad a\geq 0\\ -2b=\sqrt{3\left(a^2+b^2\right)} & \rightarrow\quad b\leq 0\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}4a^2=a^2+b^2\\ 4b^2=3a^2+3b^2\end{cases}\quad\rightarrow\quad 3a^2=b^2$$

$$\rightarrow\quad b=\sqrt{3}\,a\quad\text{(à rejeter)}\quad\text{et}\quad b=-\sqrt{3}\,a$$

Conclusion :

$$Z=a\left(1-\sqrt{3}\,i\right)\quad avec\quad a\geq 0$$

C'est une demi-droite dans $\mathbb{C}$.

EXALG049 – Bruxelles, 1991.

Résoudre

$$\begin{cases} \log \sqrt[3]{x} + \log \sqrt[3]{y} = \dfrac{1}{3} \\ 2\log x + 3\log y = 2 + \log 2.5 \end{cases}$$

CE : $x > 0; \quad y > 0$

$$\begin{cases} \log x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \log 10^{\frac{1}{3}} \\ \log x^2 y^3 = \log\left(10^2 \times 2.5\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy = 10 \\ x^2 y^3 = 250 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy = 10 \\ (xy)^2\, y = 250 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2.5 \end{cases}$$