Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 41

EXALG410 – EXALG419

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Janvier 2012

EXALG410 – FACSA, ULG, Liège, Juillet 2011.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 + |z| = 0$

Suggestion : Calculer d'abord la valeur de $|z|$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

Solution. De $z^4 = -|z|$ on tire $|z|^4 = |z^4| = |-|z|| = |z|$; les seules valeurs possibles pour $|z|$ sont donc 0 et 1. Si $|z| = 0$, on a nécessairement $z = 0$ qui est une première solution de l'équation posée. Si $|z| = 1$, on peut poser $z = \operatorname{cis}\theta$ et l'équation se récrit

$$\operatorname{cis} 4\theta + 1 = 0$$

ou encore

$$\operatorname{cis} 4\theta = -1 = \operatorname{cis}\pi$$

dont on tire

$$4\theta = \pi + 2k\pi$$

ou encore

$$\theta = (2k+1)\pi/4 .$$

En résumé, l'ensemble des solutions est

$$\{0\,, \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\,, \operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}\,, \operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}\,, \operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}\} = \{0,\ \frac{(1+i)\sqrt{2}}{2},\ -\frac{(1-i)\sqrt{2}}{2},\ -\frac{(1+i)\sqrt{2}}{2},\ \frac{(1-i)\sqrt{2}}{2}\}\,.$$

Le 12 novembre 2011

EXALG411 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 2011.

Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel:

$$\begin{cases} 2x + 3y + (a-1)z = 2 \\ 4x + 3ay + az = 4 \\ (6-3a)y + (a-2)z = 0 \end{cases}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

Solution. Si $a = 2$, la troisième équation disparaît ($0 = 0$); la deuxième devient le double de la première et est donc inutile. La première équation devient $2x + 3y + z = 2$. Les solutions du système sont $(x, y, z) = (\lambda, \mu, 2 - 2\lambda - 3\mu)$, où λ et μ sont des réels quelconques.

Si $a \neq 2$, le système se réduit à

$$\begin{cases} 2x + 3y + (a-1)z = 2\,; \\ 4x + 3ay + az = 4\,; \\ 3y - z = 0\,. \end{cases}$$

ou encore, en éliminant z dans les deux premières équations, à

$$\begin{cases} 2x + 3ay = 2\,; \\ 4x + 6ay = 4\,; \\ 3y - z = 0\,. \end{cases}$$

La deuxième équation est inutile et le système se réduit à

$$\begin{cases} 2x + 3ay = 2\,; \\ 3y - z = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont $(x, y, z) = \left(\dfrac{2 - 3a\lambda}{2}, \lambda, 3\lambda\right)$, où λ est un réel quelconque.

Le 16 janvier 2012

EXALG412 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 2011.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2(\log x)^3+\frac{\log\left(x^{20}\right)}{10}-\frac{\left(\log\left(x^{\sqrt{20}}\right)\right)^2}{4}=0$$

La notation $\log$ désigne le logarithme en base 10

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

Solution. Le réel x doit être strictement positif. En tenant compte de la propriété connue

$$\log(x^y) \;=\; y\log x\,,$$

l'équation peut se récrire en

$$2(\log x)^3+2\log x-5(\log x)^2 \;=\; 0\,,$$

puis en

$$(\log x)\,[2(\log x)^2+2-5\log x] \;=\; 0\,.$$

Le premier facteur s'annule pour $x=1$; le second est un polynôme du second degré en $\log x$ qui s'annule si $\log x$ vaut 2 ou $1/2$, c'est-à-dire si $x=100$ ou $x=\sqrt{10}$.

Le 16 janvier 2012

EXALG413 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 2011.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{x+\sqrt{\frac{x+1}{2}}}{\sqrt{\frac{x+1}{2}}} \leq x+1$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

Solution. L'inéquation est définie sur l'intervalle $]-1:+\infty[$. Elle peut se récrire en

$$\frac{x}{\sqrt{(x+1)/2}}+1 \;\leq\; x+1\,,$$

ou encore en

$$\frac{x}{\sqrt{(x+1)/2}} \;\leq\; x\,.$$

Si $x=0$, l'inégalité est vérifiée.
Si $x>0$, l'inéquation se simplifie en

$$\sqrt{(x+1)/2} \;\geq\; 1$$

ou encore en

$$x+1 \;\geq\; 2\,,$$

c'est-à-dire $x \geq 1$.
Si $-1<x<0$, l'inéquation se simplifie en

$$\sqrt{(x+1)/2} \;\leq\; 1$$

ou encore en

$$x+1 \;\leq\; 2\,,$$

qui est toujours vrai.
L'ensemble des solutions est donc

$$]-1:0] \;\cup\; [1:+\infty[\,.$$

Le 16 janvier 2012

EXALG414 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2012.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$4z^5 - 12z^2 + \frac{9}{z} = 0$$

On donnera la forme algébrique et la forme trigonométrique de chaque solution

---

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

L'équation peut se récrire

$$\frac{1}{z}(2z^3 - 3)^2 = 0$$

Le premier facteur ne s'annule jamais; le second facteur s'annule si et selement si $z^3 = \dfrac{3}{2}$.

Les solutions sont donc les trois racines du polynôme $2z^3 - 3$, c'est-à-dire, en posant $r = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$, les nombres $r, r\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$ et $r\left(-1 - i\sqrt{3}\right)$.

Les formes trigonométriques sont $r, r \text{ cis}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ et $r \text{ cis}\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$

Le 28 aout 2012

EXALG415 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2012.

La suite f et la matrice Φ de Fibonacci sont définies par les égalités :

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ pour } n = 2,3,\ldots; \qquad \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démontrer que pour tout entier naturel $n > 0$, on a $\Phi^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$

En déduire l'égalité $f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

La première égalité se démontre facilement par récurrence. Elle est évidente pour $n = 1$ et, si elle est vraie pour n, elle est encore vraie pour $n+1$ car

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n-1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

La seconde égalité est évidente pou $n = 0$. Pour $n > 0$, on développe l'égalité $\Phi^{2n} = \Phi^n \Phi^n$; on obtient ainsi $f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2$ et aussi $f_{2n} = \left(f_{n+1} + f_{n-1} \right) f_n$.

En effet,

$$\begin{pmatrix} f_{2n+1} & f_{2n} \\ f_{2n} & f_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1}^2 + f_n^2 & f_n f_{n+1} + f_n f_{n-1} \\ f_n f_{n+1} + f_n f_{n-1} & f_n^2 + f_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

Le 28 aout 2012. Modifié le 7 septembre 2014 (Morgan Diepart)

EXALG416 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2012.

Déterminer la valeur de k sachant que le polynôme $x^4+2\sqrt{2}x^3+kx^2+\left(2+5\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{2}$ admet quatre racines réelles $x_1, x_2 x_3, x_4$ telles que $x_1+x_2=x_3+x_4$.
On calculera les racines

Remarque : On peut souvent simplifier $\sqrt{a\pm b\sqrt{2}}$ en cherchant x, y tels que

$$\left(x\pm y\sqrt{2}\right)^2=a\pm b\sqrt{2}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

La somme des quatre racines vaut l'opposé du coefficient de x^3, c'est-à-dire $2\sqrt{2}$; on a donc $x_1+x_2=x_3+x_4=\sqrt{2}$. le polynôme est donc égal au prosuit des deux trinômes $x^2-\sqrt{2}x+a$, de racines x_1 et x_2, et $x^2-\sqrt{2}x+b$, de racines x_3 ete x_4, pour des valeurs à déterminer de a et b.

Ce produit vaut : $\qquad x^4-2\sqrt{2}x^3+(a+2+b)x^2-\sqrt{2}(a+b)x+ab.$

On en déduit les trois égalités suivantes:

$$k=a+2+b; \qquad 2+5\sqrt{2}=-\sqrt{2}(a+b); \qquad -2\sqrt{2}=ab.$$

De la deuxième inégalité on déduit $2\sqrt{2}+10=-2(a+b)$; d'où $a+b=-\left(\sqrt{2}+5\right)$ et $k=-\left(\sqrt{2}+3\right)$.

De plus a et b sont les racines du trinôme $X^2+\left(\sqrt{2}+5\right)-2\sqrt{2}$;

le discrimant vaut $\Delta=27+18\sqrt{2}=\left(3+3\sqrt{2}\right)^2$

et les racines valent $\dfrac{-\left(\sqrt{2}+5\right)\pm\left(3+3\sqrt{2}\right)}{2}$, c'est-à-dire $\sqrt{2}-1$ et $-2\left(\sqrt{2}+2\right)$.

On trouve alors facilement

$$\{x_1, x_2\}=\left\{1, \sqrt{2}-1\right\} \quad \text{et} \quad \{x_3, x_4\}=\left\{\sqrt{2}+2, -2\right\}$$

Le 28 aout 2012

EXALG417 – EPL, UCL, LLN, juillet 2011 série 1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| > \left|\frac{x-2}{x+2}\right|$$

Solution proposée par Nicole Berckmans

$$|x-1||x+2| > |x+1||x-2| \qquad \text{CE : } x \neq -1, x \neq -2$$

$$|x^2+x-2| > |x^2-x-2|$$

x		-2		-1		1		2	
x^2+x-2	$+$	$/$	$-$	$/$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-x-2	$+$	$/$	$+$	$/$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
	I		II		III		IV		V

$I:$	$x^2+x-2 > x^2-x-2 \Rightarrow x>0$	Impossible
$II:$	$-(x^2+x-2) > x^2-x-2 \Rightarrow 0 < 2(x^2-2)$	$S_{II} : \left]-\sqrt{2},-1\right[$
$III:$	$-(x^2+x-2) > -(x^2-x-2) \Rightarrow 0 > x$	$S_{III} : \left]-1,0\right[$
$IV:$	$x^2+x-2 > -(x^2-x-2) \Rightarrow 2(x^2-2) > 0$	$S_{IV} : \left]\sqrt{2},2\right[$
$V:$	Idem I	$S_V : [2,\rightarrow$

$$\boxed{S = \left]-\sqrt{2},-1\right[\cup \left]-1,0\right[\cup \left]2,\rightarrow\right[}$$

Le 3 septembre 2012

EXALG418 – EPL, UCL, LLN, juillet 2011 série 1.

Résoudre

$$\frac{3+i}{z+i}-\frac{1-3i}{z-i}=2(z-1)$$

Solution proposée par Nicole Berckmans

$$2z+4iz-4i-2=2(z-1)(z^2+1) \qquad \text{CE: } z\neq \pm i$$

$$2(z-1)(1+2i)=2(z-1)(z^2+1)$$

$$(z-1)(z^2-2i)=0$$

1) $z=1$

2) $z^2=2i$

$$z^2=2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z=\pm\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z=\pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$z=\pm(1+i)$$

$$\boxed{S=\{1,1+i,-1-i\}}$$

Le 3 septembre 2012

EXALG419 – EPL, UCL, LLN, juillet 2011 série 1.

Déterminer le polynôme $P(x)$ de degré 4 à coefficients réels tel que :

1) $P(x)$ est un carré parfait, c'est-à-dire le carré d'un certain polynôme.
2) $P(x)-P(-x)=4x(x^2-2)$
3) $x^4P(x^5)$ est divisible par $(x-1)$

Solution proposée par Nicole Berckmans

1) $P(x)=(ax^2+bx+c)^2$

2) $P(x)-P(-x)=(ax^2+bx+c)^2-(ax^2-bx+c)^2$

$=(2ax^2+2c)(2bx)$ Différence de 2 carrés.

$=4x(abx^2+bc)=4x(x^2-2)$

D'où $ab=1$ et $bc=-2$ $\qquad (i)$

3) $f(x)=x^4P(x^5)$ est divisible par $(x-1)$ si $f(1)=0$ càd $P(1)=0$

$\Rightarrow P(1)=(a+b+c)^2=0 \Rightarrow a+b+c=0 \qquad (ii)$

(i) et (ii) impliquent que :

$$a=\frac{1}{b},\quad c=-\frac{2}{b},\quad \frac{1}{b}+b-\frac{2}{b}=0 \quad\Rightarrow\quad b=\pm 1$$

$P(x)=(x^2+x-2)^2$ ou $(-x^2-x+2)^2$

$\boxed{P(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4}$

Le 3 septembre 2012