

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Algèbre

## ALG 43

**EXALG430 – EXALG439**

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot  
Benoit Baudalet – Steve Tumson  
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans  
Fabienne Zoetard

Novembre 2012

## EXALG430 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 2012.

Soit  $a$  un réel non nul et  $P(x)$  un polynôme sur  $\mathbb{R}$  tel que le reste de la division de  $P(x)$  par  $2x+1$  est  $a$  et le reste de la division de  $P(x)$  par  $ax+1$  est  $2$ .

Peut-on déterminer le reste de la division de  $P(x)$  par  $(2x+1)(ax+1)$ ?

Si oui, quel est il?

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université :**

<http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes>

Si  $a = 2$ , on sait seulement que le reste de la division de  $P(x)$  par  $2x+1$  est  $2$ , ce qui ne permet pas de déterminer le reste de la division de  $P(x)$  par  $(2x+1)^2$ .

Si  $a \neq 2$  (et  $a \neq 0$ ), il reste des polynômes  $Q(x)$  et  $R(x)$  tels que

$$P(x) = (2x+1)Q(x) + a \text{ et } P(x) = (ax+1)R(x) + 2$$

On entiere que  $P\left(-\frac{1}{2}\right) = a$  et  $P\left(-\frac{1}{a}\right) = 2$ . Il existe aussi un polynôme  $S(x)$  et deux réels  $b$  et  $c$  tel que

$$P(x) = (2x+1)(ax+1)S(x) + b(x) + c$$

On a en particulier  $P\left(-\frac{1}{2}\right) = a = -\frac{b}{2} + c$  et  $P\left(-\frac{1}{a}\right) = 2 = -\frac{b}{a} + c$ , d'où on tire

facilement  $b = -2a$  et  $c = 0$ , le reste de la division de  $P(x)$  par  $(2x+1)(ax+1)$  est donc le polynôme  $-2ax$

---

Le 28 novembre 2012

## EXALG431 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 2012.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation

$$\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1$$

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université :**

<http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes>

La condition d'existence est  $3x^2 + 5x + 2 \geq 0$ , c'est-à-dire, puisque les racines du trinôme sont  $-1$  et  $-\frac{2}{3}$ ,  $x \notin \left] -1; -\frac{2}{3} \right[$ . Si cette condition est respectée, l'inéquation se récrit en

$$\sqrt{3x^2 + 5x + 7} > 1 + \sqrt{3x^2 + 5x + 2}$$

ou encore, en élevant les deux membres positifs au carré et en réarrangeant les termes

$$4 > 2\sqrt{3x^2 + 5x + 2} \text{ ou encore } 4 > 3x^2 + 5x + 2$$

ce qui signifie  $x \in \left] -2, \frac{1}{3} \right[$ ; en tenant compte de la condition d'existence, on a

$$x \in \left] -2, -1 \right] \cup \left[ -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right[$$

---

Le 12 septembre 2012

## EXALG432 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :

$$\ln(x^3 + 2x^2 - 8x) \leq 1 + \ln(x + 4)$$

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université :**

[http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff\\_academiques/serv\\_gest\\_etudes/admission\\_foms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx](http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admission_foms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx)

Conditions d'existence :

$$x^3 + 2x^2 - 8x = x(x-2)(x-4) > 0 \Rightarrow -4 < x < 0 \text{ ou } x > 2$$

$$x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4$$

En effet, l'étude du signe de  $x^3 + 2x^2 - 8x = x(x-2)(x-4)$  donne :

		-4	0	2			
$x$	-	-	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	0	+
$x+4$	-	0	+	+	+	+	+
	-	0	+	0	-	0	+

On a successivement en transformant l'inégalité de départ :

$$\ln(x(x-2)(x+4)) \leq \ln(e(x+4))$$

Comme le logarithme est une fonction croissante, on a:

$$x(x-2)(x+4) \leq e(x+4)$$

On peut diviser les deux membres par  $(x+4)$  puisque  $x+4 > 0$ . D'où:

$$x(x-2) \leq e \Rightarrow x^2 - 2x - e \leq 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{1+e} \leq x \leq 1 + \sqrt{1+e}$$

Tenant compte des conditions d'existence et du fait que  $e \sim 2.7$  donc

$\sqrt{1+e} \sim 2$ , la solution est donc :

$$S = \left[ 1 - \sqrt{1+e}, 0 \right] \cup \left[ 2, 1 + \sqrt{1+e} \right]$$

## EXALG433 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Trois grues déchargent un navire. Si les trois grues travaillent ensemble, le navire est déchargé en 6 jours. Si la première et la seconde grue travaillent ensemble, le navire est déchargé en 12 jours. Si la première travaille seule pendant 10 jours, le déchargement peut être terminé en 2 jours supplémentaires pendant lesquels la première et la troisième travaillent ensemble. Déterminer le nombre de jours nécessaires à chaque grue pour effectuer seule le déchargement. La formulation du problème sera facilitée par l'usage des notations suivantes :  $Q_T$  désignera la quantité totale à décharger et  $Q_i$  la quantité journalière déchargée par la grue  $i$ .

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université :**

[http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff\\_academiques/serv\\_gest\\_etudes/admission\\_fmms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx](http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admission_fmms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx)

Le problème se formule comme suit :

$$(Q_1 + Q_2 + Q_3)6 = Q_T \quad (1)$$

$$(Q_1 + Q_2)12 = Q_T \quad (2)$$

$$10Q_1 + 2(Q_1 + Q_3) = Q_T \quad (3)$$

Des équations (1) et (2), on déduit que  $Q_3 = \frac{Q_T}{12}$ . En substituant cette valeur dans (3),

On trouve que  $Q_1 = \frac{5Q_T}{72}$ . En injectant la valeur de  $Q_1$  dans l'équation (2), on obtient

$Q_2 = \frac{Q_T}{72}$ . La grue 1 effectue donc le déchargement en 14.4 jours, la grue 2 en 72 jours et la grue 3 en 12 jours.

---

Le 12 décembre 2012

## EXALG434 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Une portion de 100 g de pâtes contient 100 kcal, 5 g de protides (protéines) et coûte 0.2 Euros; une portion de 100 g de maïs contient 300 kcal, 10 g de protides et coûte 0.4 Euros, une portion de 100 g de thon (en boîte) contient 200 kcal, 25 g de protides et coûte 0.6 Euros. Déterminer les quantités  $x$ ,  $y$  et  $z$  de ces trois types d'aliments qui vous permettent de confectionner un repas contenant 800 kcal et 50 g de protides, et dont le coût soit le plus bas possible.

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université :**

[http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff\\_academiques/serv\\_gest\\_etudes/admission\\_fpm/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx](http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admission_fpm/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx)

Le problème se formule comme suit :

$$100x + 300y + 200z = 800$$

$$5x + 10y + 25z = 50$$

$$0.2x + 0.4y + 0.6z = m$$

où  $m$  (le prix du repas) est un paramètre et  $x, y, z$  représentent le nombre de portions de 100 g des différents aliments.

Le déterminant de la matrice du système

$$\Delta = \begin{vmatrix} 100 & 300 & 200 \\ 5 & 10 & 25 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 200$$

Le système possède donc une solution unique :

$$x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 800 & 300 & 200 \\ 50 & 10 & 25 \\ m & 0.4 & 0.6 \end{vmatrix} = \frac{100}{200} \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 10 & 2 & 5 \\ 5m & 2 & 3 \end{vmatrix} = 27.5m - 41$$

$$y = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 100 & 800 & 200 \\ 5 & 50 & 25 \\ 0.2 & m & 0.6 \end{vmatrix} = \frac{100}{200} \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 1 & 10 & 5 \\ 1 & 5m & 3 \end{vmatrix} = 13 - 7.5m$$

$$z = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 100 & 300 & 800 \\ 5 & 10 & 50 \\ 0.2 & 0.4 & m \end{vmatrix} = \frac{100}{200} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & 5m \end{vmatrix} = 5 - 2.5m$$

En résumé on a donc

$$x = 27.5m - 41 \geq 0 \quad \Rightarrow m \geq \frac{41}{27.5} \approx 1.49$$

$$y = 13 - 7.5m \geq 0 \quad \Rightarrow m \leq \frac{13}{7.5} \approx 1.73$$

$$z = 5 - 2.5m \geq 0 \quad \Rightarrow m \leq 2$$

On prend le plus petit  $m$  compatible avec ces contraintes :  $m \approx 1.49$ .

On en déduit que le repas ne contient pas de pâtes, mais contient environ 182.5 g de maïs ( $y = 1.825$ ) et 127.5 g de thons ( $z = 1.275$ )

## EXALG435 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Soit le système d'équations algébriques linéaires suivant :

$$\begin{cases} -x - 2y - 3z = 3 - a \\ 2x + y + az = b \\ 5x + 4y + bz = 5 - a \end{cases}$$

Déterminez pour quelles valeurs des paramètres  $a$  et  $b$ , ce système possède une infinité de solutions.

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université :**

[http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff\\_academiques/serv\\_gest\\_etudes/admissionfpms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx](http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admissionfpms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx)

De la première équation, on tire la valeur de  $x$  et on la substitue dans les deux autres, équations, ce qui donne :

$$\begin{cases} -x - 2y - 3z = 3 - a \\ -3y + (a - 6)z = 6 + b - 2a \\ -6y + (b - 15)z = 20 - 6a \end{cases}$$

De la seconde équation, on tire la valeur de  $y$  et on la substitue dans la dernière équation, ce qui donne :

$$\begin{cases} -x - 2y - 3z = 3 - a \\ -3y + (a - 6)z = 6 + b - 2a \\ (b - 2a - 3)z = 8 - 2a - 2b \end{cases}$$

Pour que le système possède une infinité de solutions, il faut et il suffit que tous les coefficients de la dernière ligne soient nuls. Ainsi, on a que  $a$  et  $b$  doivent satisfaire le système d'équations

$$\begin{cases} 2a - b = -3 \\ a + b = 4 \end{cases}$$

Et donc,  $a = \frac{1}{3}$  et  $b = \frac{11}{3}$

Le système est simplement indéterminé et sa solution est

$$S = \left\{ \left( \frac{7}{9}k + \frac{10}{3}, -\frac{17}{9}k - 3, k \right) \in \mathbb{R} \right\}$$

## EXALG436 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Déterminer les valeurs réelles de l'inconnue  $x$  qui satisfont l'inégalité suivante :

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$$

**Nous reprenons la solution proposée par l'université :**

[http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff\\_academiques/serv\\_gest\\_etudes/admission\\_fmms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx](http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admission_fmms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx)

- Conditions d'existence: il faut que tous les radicands soient positifs ou nuls

$$x+6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -6$$

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

$$2x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$$

$$\text{Domaine : } \left[ \frac{5}{2}, +\infty \right[$$

- Première résolution

$$\begin{aligned} \sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} &> \sqrt{2x-5} && \text{les deux membres sont positifs} \\ (x+6) - 2\sqrt{x+6}\sqrt{x+1} + (x+1) &> 2x-5 && \text{en élevant au carré} \\ -2\sqrt{x+6}\sqrt{x+1} &> -12 \\ \sqrt{x+6}\sqrt{x+1} &< 6 \\ (x+6)(x+1) &< 36 && \text{en élevant au carré} \\ x^2 + 7x - 30 &< 0 \\ (x+10)(x-3) &< 0 \end{aligned}$$

L'inégalité est satisfaite pour  $x \in ]-10, 3[$ . En prenant l'intersection avec le domaine, on

obtient  $x \in \left[ \frac{15}{3}, 3 \right[$ .

- Autre résolution

$$\begin{aligned} \sqrt{x+6} &> \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \\ x+6 &> x+1 + 2\sqrt{x+1}\sqrt{2x-5} + 2x-5 && \text{en élevant au carré} \\ 10-2x &> 2\sqrt{x+1}\sqrt{2x-5} \\ 5-x &> \sqrt{x+1}\sqrt{2x-5} && \text{on impose } 5-x > 0 \\ 25-10+x^2 &> 2x^2-3x-5 && \text{en élevant au carré} \\ x^2+7x-30 &< 0 \\ (x+10)(x-3) &< 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des valeurs de  $x$  qui satisfont l'inégalité, la condition  $x < 5$  et appartient

au domaine, est  $\left[ \frac{5}{2}, 3 \right[$



## EXALG437 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Factoriser le polynôme du second degré :

$$P(z) = z^2 - (5-i)z + 8-i$$

Considérez la variable  $z$  comme un nombre complexes  $z \in \mathbb{C}$

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université :**

[http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff\\_academiques/serv\\_gest\\_etudes/admission\\_fms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx](http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admission_fms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx)

$$P(z) = z^2 - (5-i)z + 8-i$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (i-5)^2 - 5(8-i) = -8-6i$$

Pour calculer la racine de  $\Delta$ , on peut procéder par identification

$$\sqrt{-8-6i} = a+bi \Rightarrow -8-6i = (a+b)^2 + i.2ab - b^2$$

où  $a$  et  $b$  sont réels.

Les deux membres de la dernière égalité doivent avoir des parties réelles identiques.

Il doit en aller de même pour les parties imaginaires. Ainsi

$$-8 = a^2 - b^2 \quad \text{et} \quad -6 = 2ab$$

Ce qui donne, en remplaçant  $a$  dans la première équation par  $\frac{-3}{b}$

$$b^4 - 5b^2 - 9 = 0 \quad \text{et} \quad ab = -3$$

L'équation bi-carré en  $b$  donne comme valeurs possibles pour  $b$  :  $\pm 3$  et  $\pm i$ .

Seules les valeurs réelles sont admissibles, et donc  $b = \pm 3$  et  $a = \mp 1$

Ainsi  $\sqrt{\Delta}$  peut valoir  $-1+3i$  ou  $1-3i$ . Quand aux racines du polyôme  $P(z)$ , elles valent

$$z_{1,2} = \frac{5-i \pm (1-3i)}{2} = \begin{cases} 3-2i \\ 2+i \end{cases}$$

On retrouve les mêmes racines en utilisant l'autre valeur de  $\sqrt{\Delta}$ .

Ainsi donc, le polynôme se factorise en:

$$P(z) = (z-3+2i)(z-2-i)$$

---

Le 12 septembre 2012

## EXALG438 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Résoudre :

$$\log_3 \sqrt[3]{x+2} = \log_{27} (x-2) + \frac{1}{3}$$

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université :**

[http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff\\_academiques/serv\\_gest\\_etudes/admission\\_fmms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx](http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admission_fmms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx)

Le domaine de définition de l'expression est  $x \in ]2, \infty[$

Le premier membre de l'équation peut s'écrire :

$$\log_3 \sqrt[3]{x+2} = \frac{1}{3} \log_3 (x+2) = \frac{1}{3} \frac{\ln(x+2)}{\ln 3}$$

Le second membre de l'équation peut s'écrire :

$$\log_{27} (x-2) + \frac{1}{3} = \frac{\ln(x-2)}{\ln 27} + \frac{1}{3} = \frac{\ln(x-2)}{3 \ln 3} + \frac{1}{3}$$

L'équation devient :

$$\frac{1}{3} \frac{\ln(x+2)}{\ln 3} = \frac{\ln(x-2)}{3 \ln 3} + \frac{1}{3}$$

$$\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \ln 3$$

En prenant l'exponentielle des deux membres :

$$\frac{x+2}{x-2} = 3 \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

---

Le 12 décembre 2012

# EXALG439 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2012.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

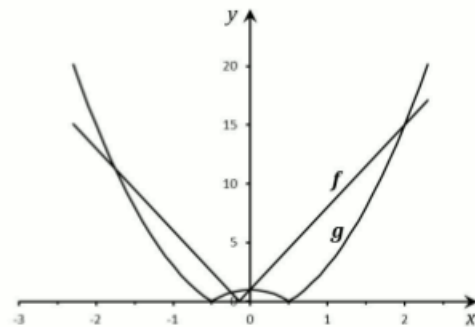
$$|7x+1| > |1-4x^2|$$

## Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Les deux fonctions à comparer peuvent s'écrire comme suit :

$$f(x) = |7x + 1| = \begin{cases} -7x - 1 & \text{si } x \leq -\frac{1}{7} \\ +7x + 1 & \text{si } x \geq -\frac{1}{7} \end{cases}$$

$$g(x) = |1 - 4x^2| = \begin{cases} 4x^2 - 1 & \text{si } x \leq -\frac{1}{2} \\ 1 - 4x^2 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq +\frac{1}{2} \\ 4x^2 - 1 & \text{si } x \geq +\frac{1}{2} \end{cases}$$



Il faut donc considérer l'inéquation dans quatre intervalles.

(1)  $x \leq -\frac{1}{2}$  :

$$\begin{aligned} \text{L'inéquation devient : } -7x - 1 > 4x^2 - 1 & \Leftrightarrow 4x^2 + 7x < 0 \\ & \Leftrightarrow x(4x + 7) < 0 \end{aligned}$$

Une 1<sup>e</sup> partie de la solution est donc :

$$S_1 = \left] -\frac{7}{4}; 0 \right[ \cap \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right] = \left] -\frac{7}{4}; -\frac{1}{2} \right]$$

(2)  $-\frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{7}$  :

$$\begin{aligned} \text{L'inéquation devient : } -7x - 1 > 1 - 4x^2 & \Leftrightarrow 4x^2 - 7x - 2 > 0 \\ & \Leftrightarrow (4x + 1)(x - 2) > 0 \end{aligned}$$

Une 2<sup>e</sup> partie de la solution est donc :

$$S_2 = \left( -\infty; -\frac{1}{4} \right[ \cup \left] 2; +\infty \right) \cap \left[ -\frac{1}{2}; -\frac{1}{7} \right] = \left[ -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4} \right[$$

(3)  $-\frac{1}{7} \leq x \leq +\frac{1}{2}$  :

$$\begin{aligned} \text{L'inéquation devient : } 7x + 1 > 1 - 4x^2 & \Leftrightarrow 4x^2 + 7x > 0 \\ & \Leftrightarrow x(4x + 7) > 0 \end{aligned}$$

Une 3<sup>e</sup> partie de la solution est donc :

$$S_3 = \left( -\infty; -\frac{7}{4} \right[ \cup \left] 0; +\infty \right) \cap \left[ -\frac{1}{7}; +\frac{1}{2} \right] = \left] 0; +\frac{1}{2} \right]$$

(4)  $x \geq \frac{1}{2}$  :

$$\begin{aligned} \text{L'inéquation devient : } +7x + 1 > 4x^2 - 1 & \Leftrightarrow 4x^2 - 7x - 2 < 0 \\ & \Leftrightarrow (4x + 1)(x - 2) < 0 \end{aligned}$$

La 4<sup>e</sup> partie de la solution est donc :

$$S_4 = \left] -\frac{1}{4}; +2 \right[ \cap \left[ +\frac{1}{2}; +\infty \right[ = \left[ +\frac{1}{2}; +2 \right[$$

La solution de l'inéquation est l'union des quatre solutions partielles :

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \left] -\frac{7}{4}; -\frac{1}{4} \right[ \cup \left] 0; +2 \right[$$

Le 28 mars 2013