Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 46

EXALG460 – EXALG469

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Septembre 2013

EXALG460 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2012.

Résoudre

$$\log_5(2x)-\log_5\left(1+\sqrt{x}\right)\le 1$$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

CE: $2x>0;\quad x\ge 0;\quad 1+\sqrt{x}>0$ Donc $x\in\mathbb{R}_0^+$.

Alors : $\log_5\dfrac{2x}{1+\sqrt{x}}\le 1\Rightarrow 0<\dfrac{2x}{1+\sqrt{x}}\le 5\Rightarrow 0\le 2x\le 5\left(1+\sqrt{x}\right)$ car $1+\sqrt{x}>0$

$\Rightarrow 2x-5\sqrt{x}-5\le 0 \qquad (1)$

On pose $y=\sqrt{x}\Rightarrow p(y)=2y^2-5y-5$ dont les zéros sont $y=\dfrac{5\pm\sqrt{65}}{4}$

D'où le tableau de signes :

y		$\frac{5-\sqrt{65}}{4}$		$\frac{5+\sqrt{65}}{4}$	
$p(y)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi : $p(y)\le 0\Leftrightarrow\dfrac{5-\sqrt{65}}{4}\le y\le\dfrac{5+\sqrt{65}}{4}\Rightarrow\dfrac{5-\sqrt{65}}{4}\le\sqrt{x}\le\dfrac{5+\sqrt{65}}{4}$

La première inégalité est toujours vérifiée puisque $\dfrac{5-\sqrt{65}}{4}$ est négatif. et $\sqrt{x}>0$

$\Rightarrow 0<x\le\left(\dfrac{5+\sqrt{65}}{4}\right)^2\Rightarrow\boxed{0<x<\dfrac{90+10\sqrt{65}}{16}\simeq 10.66}$

Note :(1) peut aussi s'écrire $2x-5\le 5\sqrt{x}$ et on peut songer à élever au carré. Mais attention dans ce cas une discussion s'impose car $a\le b$ n'est pas équivalent à $a^2\le b^2$.
Il faut envisager le cas où $2x-5$ est positif et où il est négatif, etc....

Le 24 octobre 2013

EXALG461 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\sqrt{x^2+6x+8} < \sqrt{x^2+6x+11} - 1$$

$\sqrt{x^2+6x+8} < \sqrt{x^2+6x+11} - 1$

CE : 1) $x^2+6x+8 \geq 0 \Rightarrow x \in \left]\leftarrow,-4\right] \cup \left[-2,\rightarrow\right[$

2) $x^2+6x+11 \geq 0$ Toujours vérifiée car $\Delta < 0$

3) $\sqrt{x^2+6x+11} > 1$ (les deux membres sont positifs) $\Rightarrow x^2+6x+11 > 1$

$\Rightarrow x^2+6x+10 > 0$ Toujours vérifiée car $\Delta < 0$

Les deux membres de l'inéquation étant positifs, on peut élever au carré. On a donc :

$x^2+6x+8 < x^2+6x+11-2\sqrt{x^2+6x+11}+1 \Rightarrow \sqrt{x^2+6x+11} < 2$

Les deux membres sont encore positifs: $x^2+6x+11 < 4 \Rightarrow x^2+6x+7 < 0$

$\Rightarrow x \in \left]-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\right[$

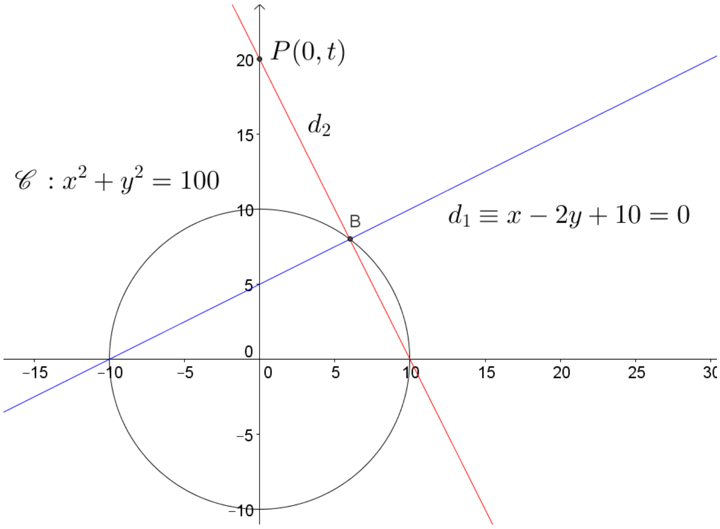
En tenant de la CE, on obtient la solution : $\boxed{x \in \left]-3-\sqrt{2},-4\right] \cup \left[-2,-3+\sqrt{2}\right[}$

Le 24 octobre 2013

EXALG462 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 2.

la droite d_1 d'équation $x-2y+10=0$ rencontre le cercle d'équation $x^2+y^2=100$ au point B dans le premier quadrant. Une droite passant par B, perpendiculaire à la droite d_1 coupe l'axe des y au point P de coordonnées $(0,t)$. Déterminer la valeur de t.

Solution proposée par Fabienne Zoetard



$$B \equiv \begin{cases} x^2+y^2=100 \\ y=\frac{1}{2}x+5 \end{cases} \Rightarrow x^2+\left(\frac{1}{2}x+5\right)^2=10 \Rightarrow ..... \Rightarrow \begin{cases} x=6 \Rightarrow y=8 \Rightarrow B(6,8) \\ x=-10 \text{ A rejeter car } B \in Q1 \end{cases}$$

Pente de $d_2 : m_{d_2} = -\dfrac{1}{m_{d_1}} = -2$ et comme $B \in d_2 \Rightarrow d_2 \equiv y-8=-2(x-6)$

$$\Rightarrow d_2 \equiv y=-2x+20$$

$$\Rightarrow P = d_2 \cap Oy \Rightarrow P(0,20) \Rightarrow \boxed{t=20}$$

Le 24 octobre 2013

EXALG463 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2013.

a) Déterminer les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{pmatrix} \qquad \text{est inversible.}$$

b) Déterminer l'inverse de cette matrice pour $m = -1$.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

a) La matrice est inversible à condition que son déterminant soit différent de zéro.

$$\det \mathcal{A}_m = \begin{vmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-1 & 2 & -1 \\ 0 & m & 2 \\ m-1 & 2m+2 & m+1 \end{vmatrix} \qquad \text{C1} \leftarrow \text{C1} - \text{C3}$$

$$= (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & m & 2 \\ 1 & 2m+2 & m+1 \end{vmatrix}$$

$$= (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & m & 2 \\ 0 & 2m & m+2 \end{vmatrix} \qquad \text{L3} \leftarrow \text{L3} - \text{L1}$$

$$= (m-1)m\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & m+2 \end{vmatrix} \qquad \text{Laplace}$$

$$= (m-1)m(m-2)$$

Par conséquent :

$$\mathcal{A}_m \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det \mathcal{A}_m \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \mathbb{R}\backslash\{0,\ 1,\ 2\}$$

b) Dans le cas où $m = -1$, la matrice devient :

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et selon ce qui précède, son déterminant est égal à

$$\det \mathcal{A}_1 = (-2)(-1)(-3) = -6$$

La matrice adjointe $\text{Adj}\,\mathcal{A}$ est le transposé de la matrice des cofacteurs :

$$\text{Adj}\,\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse est donc :

$$\mathcal{A}_1^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}_1}\text{Adj}\,\mathcal{A}_1 = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Le 4 février 2014

EXALG464 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2013.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel k, le système

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ -x & + & ky & + & 2z & = & 5 \\ 7x & + & 3y & + & (k-5)z & = & 7 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système et, dans chaque cas, intérpréter géométriquement les ensembles de solutions obtenus.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Calcul du déterminant de la matrice des coefficients de ce système :

$$\begin{aligned} \det\mathcal{A} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & k & 2 \\ 7 & 3 & k-5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & k & 2 \\ 5 & 0 & k-6 \end{vmatrix} && \text{L3} \leftarrow \text{L3} - \text{L1} \\ &= 5.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ k & 2 \end{vmatrix} + (k-6).\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & k \end{vmatrix} && \text{Laplace} \\ &= 5(6-k) + (k-6)(2k+3) \\ &= 2(k-6)(k-1) \end{aligned}$$

$$\det\mathcal{A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \in \{1\,,6\}$$

Si $\boldsymbol{k} = \mathbf{1}$, le système devient

$$\begin{cases} 2x + 3y + z & = & 4 \\ -x + y + 2z & = & 5 \\ 7x + 3y - 4z & = & 7 \end{cases} \left| \begin{matrix} \\ 3/2 \\ 1/2 \end{matrix} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 3y + z & = & 4 \\ 2x + 3y + z & = & 11 \end{cases} \qquad \text{Absurde !}$$

Le système est **impossible** avec comme solution $= \emptyset$.

Si $k = 6$, le système devient :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + 6y + 2z = 5 \\ 7x + 3y + z = 7 \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé

$$3E_1 - E_2 = E_3$$

On peut calculer une solution en posant par exemple $z = \alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 - \alpha \\ -x + 6y = 5 - 2\alpha \end{cases} \left| \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 3 \\ 15y = 14 - 5\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3/5 \\ y = (14 - 5\alpha)/15 \end{cases}$$

Une solution est donc

$$S = \left\{ \left(\frac{3}{5}, \frac{14}{15} - \frac{\alpha}{3}, \alpha \right) \| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{1,6\}$, le système est déterminé, et donc cramérien :

$$\det \mathcal{A}_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & k & 2 \\ 7 & 3 & k-5 \end{vmatrix} \overset{L_3-L_1\to L_3}{=} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & k & 2 \\ 3 & 0 & k-6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & k \end{vmatrix} + (k-6)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & k \end{vmatrix}$$

$$= 3(6-k)+(k-6)(4k-15) = 2(k-6)(2k-9)$$

$$\det \mathcal{A}_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & k-5 \end{vmatrix} \overset{C2-C1\to C2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 7 & 0 & k-5 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + (k-5)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -14+(k-5).14 = 14(k-6)$$

$$\det \mathcal{A}_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & k & 5 \\ 7 & 3 & 7 \end{vmatrix} \overset{L3-L1\to L3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & k & 5 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ k & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & k \end{vmatrix}$$

$$= 5(15-4k)+3(2k+3) = 84-14k = -14(k-6)$$

$$x = \frac{\det \mathcal{A}_x}{\det \mathcal{A}} = \frac{2(k-6)(2k-9)}{2(k-6)(k-1)} = \frac{2k-9}{k-1}$$

$$y = \frac{\det \mathcal{A}_y}{\det \mathcal{A}} = \frac{14(k-6)}{2(k-6)(k-1)} = \frac{7}{k-1}$$

$$y = \frac{\det \mathcal{A}_z}{\det \mathcal{A}} = \frac{-14(k-6)}{2(k-6)(k-1)} = -\frac{7}{k-1}$$

La solution est : $S = \left\{ \dfrac{2k-9}{k-1}, \dfrac{7}{k-1}, \dfrac{-7}{k-1} \right\}$

<u>Résumé final</u>

$k=1$	Système impossible. Trois plans n'ayant aucun point en commun	$S=\varnothing$
$k=6$	Système simplement indéterminé. Trois plans ayant en commum une droite passant par le point $A\left(3/5, 14/15, 0\right)$ et de vecteur directeur $u(0,-1,3)$	$S=\left\{\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{14}{15}-\dfrac{\alpha}{3},\alpha\right) \parallel \alpha\in\mathbb{R}\right\}$
$k \in \mathbb{R}\setminus\{1,6\}$	Système déterminé. Trois plans en commun en un seul point.	$S=\left\{\left(\dfrac{2k-9}{k-1},\dfrac{7}{k-1},\dfrac{-7}{k-1}\right)\right\}$

Solution proposée par Dominique Druez

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & k & 2 \\ 7 & 3 & k-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & k & 2 \\ 5 & 0 & k-6 \end{vmatrix} = 2(k-6)(k-1)$ $\det A_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & k & 2 \\ 7 & 3 & k-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & k & 2 \\ 3 & 0 & k-6 \end{vmatrix} = 2(k-6)(2k-9)$ $\det A_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & k-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 7 & 0 & k-5 \end{vmatrix} = 14(k-6)$ $\det A_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & k & 5 \\ 7 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & k & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -14(k-6)$	
$\underline{k=6}$ $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ -x+6y+2z=5 \rightarrow (3)-(2) \rightarrow 5x=3 \rightarrow x=3/5 \\ 7x+3y+z=7 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{6}{5}+3y+z=4 \\ -\frac{3}{5}+6y+2z=5 \\ \frac{21}{5}+3y+z=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3y+z=\frac{14}{5} \\ 6y+2z=\frac{28}{5} \\ 3y+z=\frac{14}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\frac{14}{15}-\alpha \\ z=3\alpha \end{cases}$	$\underline{k=6}$ Droite intersection de 3 plans passant par le point (3/5, 14/5, 0) et de vecteur directeur (0, -1,3)
$\underline{k=1}$ $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ -x+y+2z=5 \\ 7x+3y-4z=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5y+5z=14 \\ -x+y+2z=5 \rightarrow impossible \\ 10y+10z=42 \end{cases}$	$\underline{k=1}$ Trois plans sans intersection
$\underline{k \neq 1, k \neq 6}$ $S=\left\{\left(\frac{2k-9}{k-1}, \frac{7}{k-1}, -\frac{7}{k-1}\right)\right\}$	$\underline{k \neq 1, k \neq 6}$ Un point intersection de 3 plans.

Le 4 février 2014. (Modifié le 2 mai 2014 – Dominique Druez)

EXALG465 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2013.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1+7i),$$

sachant qu'elle admet au moins une solution réelle

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Calcul de la racine réelle

Soit z_1 la racine réelle :

$$z_1 = a + 0.i$$

On la remplace dans l'équation, et on considère ensuite séparément la partie réelle et la partie imaginaire de celle-ci.

Partie réelle : $2a^2 - 5a + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (a-1)(2a-3) = 0$

$\Leftrightarrow a = 1$ ou $a = \frac{3}{2}$

Partie imaginaire : $4a^3 + 6a^2 - 4a - 21 = 0$

On vérifie que $a = 1$ n'est ***pas*** une solution de cette équation,

$a = \frac{3}{2}$ ***est*** bien une solution de cette équation.

Donc :

$$z_1 = \frac{3}{2}$$

Calcul des deux racines complexes

Réduction de degré par la règle de Horner :

	$4i$	$2+6i$	$-5-4i$	$3-21i$
		$6i$	$3+18i$	$-3+21i$
$\frac{3}{2}$	$4i$	$2+12i$	$-2+14i$	0

Donc :

$$\begin{aligned} 4iz^3+2(1+3i)z^2-(5+4i)z+3(1-7i) &= \left(z-\tfrac{3}{2}\right)\left(4iz^2+(2+12i)z+(-2+14i)\right) \\ &= 2i\left(z-\tfrac{3}{2}\right)\left(2z^2+(6-i)z+(7+i)\right) \end{aligned}$$

Les deux racines z_2 et z_3 sont donc les racines de l'équation suivante :

$$2z^2+(6-i)z+(7+i)=0$$

Calcul du discriminant :

$$\Delta=(6-i)^2-8(7+i)=-21-20i$$

Calcul des racines carrées $x+iy$ du discriminant :

$$\begin{cases} x^2-y^2 = -21 \\ 2xy = -20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(x^2-y^2\right)^2 = 441 \\ 4x^2y^2 = 400 \end{cases}$$

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 841$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 29 \\ x^2-y^2 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\pm 5 \end{cases} \text{ et signes opposés}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\pm(2-5i)$$

Les deux racines complexes sont donc :

$$z_{2,3}=\frac{1}{4}\left(-6+i\pm(2-5i)\right)=\begin{cases} z_2=\frac{1}{4}(-4-4i)=-(1+i) \\ z_3=\frac{1}{4}(-8+6i)=-\left(2-\frac{3}{2}i\right) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (1) est :

$$S=\left\{\frac{3}{2}\ ;\ -(1+i)\ ;\ -\left(2-\frac{3}{2}i\right)\right\}$$

Le 4 février 2014

EXALG466 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2013.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} mx & - & my & + & m^2z & = & m \\ x & + & y & - & z & = & m \\ (m-1)x & + & (m^2-1)y & - & (m-1)z & = & m^2-1 \end{cases}$$

Indiquer un résumé de la discussion de ce système et, dans chaque cas, interpréter géométriquement les ensembles de solutions obtenus.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Calcul du déterminant de la matrice des coefficients de ce système :

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A} = \begin{vmatrix} m & -m & m^2 \\ 1 & 1 & -1 \\ m-1 & m^2-1 & -(m-1) \end{vmatrix} &= m(m-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & m+1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= m(m-1)\begin{vmatrix} 0 & -2 & m+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & m & 0 \end{vmatrix} && \begin{matrix} L1 \leftarrow L1 - L2 \\ L3 \leftarrow L3 - L2 \end{matrix} \\ &= -m^2(m-1)\begin{vmatrix} 0 & m+1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} && \text{Laplace} \\ &= m^2(m-1)(m+1) \end{aligned}$$

$$\det \mathcal{A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \in \{-1, 0, 1\}$$

Si $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$, le système devient

$$\begin{cases} 0 & = & 0 \\ x+y-z & = & 0 \\ -x-y+z & = & -1 \end{cases} \begin{vmatrix} \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad 0 = -1 \quad \text{Absurde !}$$

Le système est **impossible** et l'ensemble de ses solutions est vide : $S = \emptyset$

Si $= \mathbf{1}$, le système devient

$$\begin{cases} x-y+z & = & 1 \\ x+y-z & = & 1 \\ 0 & = & 0 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Le système est **simplement indéterminé** et $S = \{(1\,; k\,; k) \| k \in \mathbb{R}\}$

Si $= \mathbf{-1}$, le système devient

$$\begin{cases} -x+y+z & = & -1 \\ x+y-z & = & -1 \\ -2x \quad +2z & = & 0 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = -1 \\ x - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Le système est **simplement indéterminé** et $S = \{(k\,; -1\,; k) \| k \in \mathbb{R}\}$

Si $\in \mathbb{R}\setminus\{\mathbf{-1}\,;\mathbf{0}\,;\mathbf{1}\}$, alors le système est **déterminé**, et donc cramerien :

$$
\begin{aligned}
\det \mathcal{A}_x &= \begin{vmatrix} m & -m & m^2 \\ m & 1 & -1 \\ m^2-1 & m^2-1 & -(m-1) \end{vmatrix} = m(m-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 1 & -1 \\ m+1 & m+1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= m(m-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 1 & -1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{L3} \leftarrow \text{L3} - \text{L2} \\
&= m(m-1)\left(\begin{vmatrix} -1 & m \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - m\begin{vmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{vmatrix}\right) \\
&= m(m-1)\big(1-m-m(-1-m^2)\big) \\
&= m(m-1)(m^3+1) \\
&= m(m-1)(m+1)(m^2-m+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det \mathcal{A}_y &= \begin{vmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m & -1 \\ m-1 & m^2-1 & -(m-1) \end{vmatrix} = m(m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & m+1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{L1} \leftarrow \text{L1} - \text{L2} \\ \text{L3} \leftarrow \text{L3} - \text{L2} \end{matrix} \\
&= m(m-1)\begin{vmatrix} 0 & 1-m & m+1 \\ 1 & m & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -m(m-1)\begin{vmatrix} 1-m & m+1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= m(m-1)(m+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det \mathcal{A}_z &= \begin{vmatrix} m & -m & m \\ 1 & 1 & m \\ m-1 & m^2-1 & m^2-1 \end{vmatrix} = m(m-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{L2} \leftarrow \text{L2} - \text{L1} \\ \text{L3} \leftarrow \text{L3} - \text{L1} \end{matrix} \\
&= m(m-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & m-1 \\ 0 & m+2 & m \end{vmatrix} \\
&= m(m-1)\begin{vmatrix} 2 & m-1 \\ m+2 & m \end{vmatrix} \\
&= m(m-1)(-m^2+m+2) \\
&= -m(m-1)(m+1)(m-2)
\end{aligned}
$$

Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\det \mathcal{A}_x}{\det \mathcal{A}} = \frac{m(m-1)(m+1)(m^2-m+1)}{m^2(m-1)(m+1)} = \frac{m^2-m+1}{m} \\
y &= \frac{\det \mathcal{A}_y}{\det \mathcal{A}} = \frac{m(m-1)(m+1)}{m^2(m-1)(m+1)} = \frac{1}{m} \\
z &= \frac{\det \mathcal{A}_z}{\det \mathcal{A}} = \frac{-m(m-1)(m+1)(m-2)}{m^2(m-1)(m+1)} = \frac{2-m}{m}
\end{aligned}
$$

L'ensemble des solutions est : $S = \left\{\left(\frac{m^2-m+1}{m}\,; \frac{1}{m}\,;\, \frac{2-m}{m}\right)\right\}$

Résumé final :

$m = 0$ Système impossible $S = \emptyset$

Trois plans n'ayant aucun point en commun.

$m = 1$ Système simplement indéterminé $S = \{(1\,; k\,;\, k) \| k \in \mathbb{R}\}$

$m = -1$ Système simplement indéterminé $S = \{(k\,; -1\,;\, k) \| k \in \mathbb{R}\}$

Trois plans ayant en commun une droite passant par le point $\mathrm{A}(0\,,-1\,,0)$ et de vecteur directeur $\boldsymbol{u}(1,0,1)$, donc parallèle au plan $0xz$.

$m \in \mathbb{R}\setminus\{-1\,,\ 0, +1\}$ Système déterminé $S = \left\{\left(\frac{m^2-m+1}{m}\,; \frac{1}{m}\,;\, \frac{2-m}{m}\right)\right\}$

Trois plans ayant en commun un seul point.

EXALG467 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2013.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\quad z^4-(3+8i)z^2-16+12i=0$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Il s'agit d'une équation **bicarrée**. Elle possède 4 racines, réparties en deux couples de racines opposées.

Posons $z^2 = t \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{t}$.

Résolution de l'équation en t :

$$t^2-(3+8i)t-4(4-3i)=0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (3+8i)^2+16(4-3i)\\ &= 9+48i-64+64-48i\\ &= 9\\ \sqrt{\Delta} &= 3\end{aligned}$$

$$t_{1,2}=\frac{1}{2}(3+8i\pm 3)=\begin{cases}t_1=3+4i\\ t_2=\quad 4i\end{cases}$$

Calcul de z_1 et z_2 comme les racines carrées de $t_1 = 3+4i$:

$$z^2=(x+iy)^2=3+4i$$

$$\begin{cases}x^2-y^2 &= 3\\ 2xy &= 4\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x^2-y^2)^2 &= 9\\ 4x^2y^2 &= 16\end{cases}$$

$$(x^2+y^2)^2 = 25$$

$$\begin{cases}x^2+y^2 &= 5\\ x^2-y^2 &= 3\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x^2=4\\ y^2=1\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x=\pm 2\\ y=\pm 1\end{cases} \quad \text{et même signe}$$

$$z_{1,2}=\pm(2+i)$$

Calcul de z_3 et z_4 comme les racines carrées de $t_2 = 4i$:

$$z^2=(x+iy)^2=4i$$

$$\begin{cases}x^2-y^2 &= 0\\ 2xy &= 4\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x^2-y^2)^2 &= 0\\ 4x^2y^2 &= 16\end{cases}$$

$$(x^2+y^2)^2 = 16$$

$$\begin{cases}x^2+y^2 &= 4\\ x^2-y^2 &= 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x^2=2\\ y^2=2\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x=\pm\sqrt{2}\\ y=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

$$z_{3,4}=\pm\sqrt{2}(1-i)$$

L'ensemble des solutions de l'équation est : $\boldsymbol{S=\{2+i\,;\,-(2+i)\,;\,\sqrt{2}(1+i)\,;\,-\sqrt{2}(1+i)\}}$

Solution proposée par Dominique Druez

$z^4 - (3+8i)z^2 - 16 + 12i = 0$ $x^2 - (3+8i)x - 16 + 12i = 0$ $\rho = (3+8i)^2 - 4.1.(-16+12i) = 9 + 48i - 64 + 64 - 48i = 9$ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{3+8i-3}{2} = 4i \\ x_2 = \dfrac{3+8i+3}{2} = 4i+3 \end{cases}$	$Poser\ x = z^2$
• $x_1 = 4i$ $z^2 = (a+bi)^2 = x_1 = 4i$ $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 4 \end{cases} \to \begin{cases} a = \pm b \\ 2ab = 4 \end{cases} \to ab = 2 \to a = b = \pm\sqrt{2}$	$z_1 = \sqrt{2}(1+i)$ $z_2 = -\sqrt{2}(1+i)$
• $x_2 = 4i + 3$ $z^2 = (a+bi)^2 = x_2 = 4i + 3$ $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \end{cases} \to \begin{cases} a = \pm 2 \\ 2ab = 4 \end{cases} \to b = \pm 1\ (même\ signe\ que\ a)$	$z_3 = 2 + i$ $z_4 = -(2+i)$

Le 4 février 2014. Modifié le 2 mai 2014.

EXALG468 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2013.

a) Déterminer les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice

$$\begin{pmatrix} -2-2a & 9a^2+4 & 3a-2 \\ -3a-2 & 2+3a & -2-3a \\ -a^2+3a-2 & 0 & a^2-a-2 \end{pmatrix} \quad \text{est inversible}$$

b) Déterminer l'inverse de cette matrice si $a = 1$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

a) La matrice est inversible à condition que son déterminant soit différent de zéro.

$$\begin{aligned}
\det \mathcal{A} &= \begin{vmatrix} -2-3a & 9a^2+4 & 3a-2 \\ -3a-2 & 2+3a & -2-3a \\ -a^2+3a-2 & 0 & a^2-a-2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -(3a+2) & 9a^2+4 & 3a-2 \\ -(3a+2) & 3a+2 & -(3a+2) \\ -(a-1)(a-2) & 0 & (a+1)(a+2) \end{vmatrix} \\
&= (3a+2)(a-2)\begin{vmatrix} -(3a+2) & 9a^2+4 & 3a-2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -(a-1) & 0 & (a+1) \end{vmatrix} \\
&= (3a+2)(a-2)\begin{vmatrix} -(3a+2) & 9a^2-3a+2 & 6a \\ -1 & 0 & 0 \\ -(a-1) & -(a-1) & 2a \end{vmatrix} \\
&= 2a(3a+2)(a-2)\begin{vmatrix} 9a^2-3a+2 & 3 \\ -(a-1) & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2a(3a+2)(a-2)(9a^2-1) \\
&= 2a(3a+2)(a-2)(3a-1)(3a+1)
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathcal{A} \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det\mathcal{A} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\tfrac{2}{3}\,;\,-\tfrac{1}{3}\,;\,0\,;\,\tfrac{1}{3}\,;\,2\right\}$$

b) Dans le cas où $m = -1$, la matrice devient :

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 13 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et selon ce qui précède, son déterminant est égal à

$$\det\mathcal{A} = (-2)(-1)(-3)(-4)(-2) = -48$$

La matrice adjointe $\operatorname{Adj}\mathcal{A}$ est le transposé de la matrice des cofacteurs :

$$\operatorname{Adj}\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 \\ 0 & -30 & -78 \\ 8 & -6 & -14 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ -6 & -30 & -6 \\ -6 & -78 & -14 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse est donc :

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathcal{A}}\operatorname{Adj}\mathcal{A} = \frac{-1}{48}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ -6 & -30 & -6 \\ -6 & -78 & -14 \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 3 & 15 & 3 \\ 3 & 39 & 7 \end{pmatrix}$$

Le 4 février 2014

EXALG469 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2013.

Soit un polynôme à coefficients réels $P(x) = ax^2 + bx + c$ tel que $c < 0 < a$.

a) Prouver que le discriminant $\Delta_P = b^2 - 4ac$ est strictement positif et que le polynôme admet deux racines réelles u et v telles que $u < 0 < v$.

b) Soit $e = \frac{v}{2}$ et $Q(x) = -x^2 P\left(e + \frac{1}{x}\right) = a'x^2 + b'x + c'$.Etablir $c' < 0 < a'$ et $\Delta_Q = \Delta_P$.

c) Pour quelles valeurs de $e \in \left\{0, \frac{u}{3}, \frac{u+v}{4}, -\frac{b}{10a}, \sqrt{-u}, \sqrt{v}, \sqrt{-uv}\right\}$ le point b) reste-t-il vrai ?

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

Solution. Le point a) est évident: le discriminant $b^2 + 4a|c|$ est la somme d'un terme positif et d'un terme strictement positif; de plus, le produit c/a des racines est strictement négatif.
b). On commence par calculer le polynôme Q, pour n'importe quelle valeur de e. On obtient facilement $a' = -(ae^2 + be + c)$, $b' = -2ae - b$ et $c' = -a$ et on observe que $a' = -P(e)$ est strictement positif si et seulement si e est strictement compris entre les deux racines u et v, ce qui est le cas pour $e = v/2$. On a enfin $\Delta_Q = (2ae + b)^2 - 4a(ae^2 + be + c)$, ce qu'un calcul élémentaire permet de réduire à $b^2 - 4ac$.
c). Le point b) reste vrai pour toute valeur de e strictement comprise entre u et v. C'est toujours le cas pour 0, $\frac{u}{3}$, $\frac{u+v}{4}$ et $-\frac{b}{10a}$ (puisque $-\frac{b}{2a}$ est la moyenne arithmétique des racines). Ce n'est pas toujours vrai pour les trois autres valeurs proposées; un contre-exemple commun est $P'(x) = 6x^2 + x - 1$.

Le 11 février 2014