

Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 5

EXALG050 – EXALG059

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG050 – FSA, ULB, Bruxelles, juillet 1992.

Simplifier

$$(\log_a x)^2 - \log_a ax \cdot \log_a \frac{x}{a}$$

$$\begin{aligned}(\log_a x)^2 - \log_a ax \cdot \log_a \frac{x}{a} &= (\log_a x)^2 - (\log_a a + \log_a x)(\log_a x - \log_a a) \\ &= (\log_a x)^2 - (1 + \log_a x)(1 - \log_a a) = (\log_a x)^2 - (\log_a x)^2 + 1 = 1\end{aligned}$$

EXALG051 – Espace Math 66.

Résoudre

$$2^{x+1} + 2^{x+3} = 2^{1-x} + 2^{2-x}$$

$$2^{x+1} + 2^{x+3} = 2^{1-x} + 2^{2-x}$$

$$2^{x+1} + 2^{x+3} = 2^{1-x} + 2^{2-x}$$

$$2 \cdot 2^x + 2^3 \cdot 2^x = 2 \cdot 2^{-x} + 2^2 \cdot 2^{-x}$$

$$2^x + 2^2 \cdot 2^x = 2^{-x} + 2 \cdot 2^{-x}$$

$$5 \cdot 2^x = 3 \cdot 2^{-x}$$

$$2^{2x} = \frac{3}{5}$$

$$x = \frac{1}{2} \frac{\ln \frac{3}{5}}{\ln 2}$$

$$x = -0.3685$$

EXALG052 – Exemple.

Résoudre

$$\begin{cases} \log_3(3x + 8y + 27) = 3 \\ \log_2\left(2x + 5y + \frac{29}{8}\right) = -3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \log_3(3x + 8y + 27) = 3 \\ \log_2\left(2x + 5y + \frac{29}{8}\right) = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log_3(3x + 8y + 27) = \log_3 27 \\ \log_2\left(2x + 5y + \frac{29}{8}\right) = \log_2 2^{-3} \end{cases} \\ & \rightarrow \begin{cases} 3x + 8y + 27 = 27 \\ 2x + 5y + \frac{29}{8} = \frac{1}{8} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 8y = 0 \\ 2x + 5y = -\frac{7}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -28 \\ y = \frac{21}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

EXALG053 – Espace Math 66.

Résoudre :

$$\log_3 9^{\frac{3}{2}} \log_9 (2x-6)^{\frac{1}{3}} = \frac{9}{2} \log_{27} (x-2) - \log_3 2$$

$$\log_3 9^{\frac{3}{2}} \log_9 (2x-6)^{\frac{1}{3}} = \frac{9}{2} \log_{27} (x-2) - \log_3 2$$

CE: $x > 3$

$$\frac{3}{2} \frac{1}{3} \underbrace{\log_3 3^2}_{=2} \underbrace{\log_9 (2x-6)}_{=\frac{1}{2} \log_3 (2x-6)} = \frac{9}{2} \underbrace{\log_{27} (x-2)}_{=\frac{1}{3} \log_3 (x-2)} - \log_3 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_3 (2x-6) = \frac{3}{2} \log_3 (x-2) - \log_3 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x-6) + 2 \log_3 2 = 3 \log_3 (x-2)$$

$$\Leftrightarrow 4(2x-6) = (x-2)^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 4x + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 2x - 4) = 0 \quad (\text{Par Horner})$$

Solutions :

$x = 4$	et	$x = 1 + \sqrt{5}$
---------	----	--------------------

 ($1 - \sqrt{5}$ à rejeter)

EXALG054 – Polyetch, UMons, questions-types 2000-2001.

L'équation suivante :

$$\log_{x+2} 8a = 1 + \log_2 \frac{a+8}{x+2}$$

admet la racine $x = 2$. Calculer a , puis résoudre.

CE: 1) $8a > 0 \rightarrow a > 0$

2) $\frac{a+8}{x+2} > 0$

2 est solution : $\rightarrow \log_4 8a = 1 + \log_2 \frac{a+8}{4}$

$\rightarrow \log_2 \sqrt{8a} - \log_2 \frac{a+8}{4} = 1 \rightarrow \log_2 \frac{4\sqrt{8a}}{a+8} = 1 \rightarrow \frac{4\sqrt{8a}}{a+8} = 2$

$4\sqrt{2a} = a+8 \rightarrow a^2 - 16a + 64 = 0 \rightarrow \boxed{a=8}$

Résolution:

$$\log_{x+2} 64 = 1 + \log_2 \frac{16}{x+2} \rightarrow \frac{\log_2 64}{\log_2 (x+2)} = 1 + \log_2 \frac{16}{x+2}$$

$$\rightarrow \frac{6}{\log_2 (x+2)} = 1 + 4 - \log_2 (x+2) \rightarrow 6 = 5 \log_2 (x+2) - \log_2^2 (x+2)$$

$$\rightarrow \log_2^2 (x+2) - 5 \log_2 (x+2) + 6 = 0 \rightarrow (\log_2 (x+2) - 3)(\log_2 (x+2) - 2) = 0$$

1) $\log_2 (x+2) - 3 = 0 \rightarrow x+2 = 8 \rightarrow \boxed{x=6}$

2) $\log_2 (x+2) - 2 = 0 \rightarrow x+2 = 4 \rightarrow \boxed{x=2}$

Les deux solutions vérifient les CE.

EXALG055 – Polytech, UMon, questions-types 2000-2001.

Résoudre

$$\begin{cases} \log_x e + \log_y e = \frac{7}{3} \\ \log_e xy = \frac{7}{2} \end{cases}$$

CE: 1) $x > 0$

2) $y > 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln y} = \frac{7}{3} \\ \ln xy = \frac{7}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ln y + \ln x = \frac{7}{3} \ln x \ln y \\ \ln xy = \frac{7}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ln xy = \frac{7}{3} \ln x \ln y \\ \ln xy = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\ln x \ln y = \frac{3}{2} \rightarrow \ln x + \frac{3}{2 \ln x} = \frac{7}{2} \rightarrow 2 \ln^2 x - 7 \ln x + 3 = 0$$

$$\rightarrow \ln x_1 = 3 \quad \text{et} \quad \ln x_2 = \frac{1}{2}$$

$$1) \ln x = 3 \rightarrow \boxed{x = e^3} \rightarrow \ln y = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{y = \sqrt{e}}$$

$$2) \ln x = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{x = \sqrt{e}} \rightarrow \ln y = 3 \rightarrow \boxed{y = e^3}$$

EXALG056 – Polytech, UMon, questions-types 2000-2001.

Résoudre l'équation suivante en x :

$$\sqrt{e^{-x} - 3} + \sqrt{e^{-x}} = a$$

et discuter le nombre de solutions selon la valeur du paramètre a .

$$CE : 1) e^{-x} - 3 \geq 0 \rightarrow e^{-x} \geq 3 \rightarrow x \leq -\ln 3$$

$$2) a \geq 0$$

Creusons un petit peu ces conditions d'existence :

Remarquons que le premier membre de l'équation définit une fonction en x qui est décroissante si x croît. Donc comme le maximum de x est $-\ln 3$.

En remplaçant x par cette valeur, on trouve : $a = \sqrt{3}$

En d'autres termes, on obtient une CE plus restrictive sur a : $a \geq \sqrt{3}$

Résolvons maintenant l'équation :

$$e^{-x} - 3 = (a - \sqrt{e^{-x}})^2 = a^2 - 2a\sqrt{e^{-x}} + e^{-x}$$

$$\rightarrow 2a\sqrt{e^{-x}} = a^2 + 3 \rightarrow \sqrt{e^{-x}} = \frac{a^2 + 3}{2a} \rightarrow e^{-x} = \left(\frac{a^2 + 3}{2a}\right)^2$$

$$\rightarrow x = -2 \ln \frac{a^2 + 3}{2a}$$

$$\text{Reprenons la CE 1 : } \rightarrow x = -2 \ln \frac{a^2 + 3}{2a} \leq -\ln 3 \rightarrow \ln \frac{a^2 + 3}{2a} \geq \ln \sqrt{3}$$

$$\rightarrow a^2 + 3 \geq 2\sqrt{3} a \rightarrow (a - \sqrt{3})^2 \geq 0 \rightarrow \text{Ce qui est toujours vérifié.}$$

On arrive à une condition moins restrictive sur a !!!!!

Conclusion :

$$\text{Si } a \geq \sqrt{3} \text{ , une solution } x = -2 \ln \frac{a^2 + 3}{2a}$$

$$\text{Si } a < \sqrt{3} \text{ , pas de solution}$$

EXALG057 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre l'équation :

$$\log_2(x+1) + \log_4 x < 1$$

CE : 1) $x > 0$

Donc :

$$\log_2(x+1) + \log_2 x \log_4 2 < 1 \rightarrow \log_2(x+1) + \frac{1}{2} \log_2 x < 1$$

$$\rightarrow \log_2 x^{\frac{1}{2}}(x+1) < 1 \rightarrow \log_2 x^{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_2 2$$

$$\rightarrow x^{\frac{1}{2}}(x+1) < 2 \rightarrow x(x+1)^2 < 4 \rightarrow x^3 + 2x^2 + x - 4 < 0$$

$$\rightarrow (x-1)(x^2 + 3x + 4) < 0$$

Or le Δ de $x^2 + 3x + 4$ est négatif, d'où la solution : $\boxed{0 < x < 1}$

EXALG058 – Polytech, Umons, Mons, 1992.

Calculer la n-ième puissance de :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution proposée par Hugues Vermeiren

1. Méthode de récurrence

On calcule à la main les premières puissances de M , on devine ce qui se passe et on essaie une récurrence...
On trouve successivement :

$$M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 21 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 36 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \\ 55 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les éléments a_{21} et a_{32} semblent être de la forme $2n$

Les éléments a_{31} semblent constituer la suite : $u_n = \{3, 10, 21, 36, 55, \dots\}$ dont les différences successives sont $\Delta_n = \{7, 11, 15, 19, \dots\} = \{3 + 4n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Les termes de u_n sont donc (sans doute!) les sommes partielles de la suite Δ_n , qui est arithmétique de raison 4, soit :

$$u_n = n \cdot \frac{\Delta_n + \Delta_{n-1}}{2} = n \cdot \frac{3 + [3 + 4(n-1)]}{2} = n(2n + 1).$$

Supposons donc que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ n(2n+1) & 2n & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$M^{n+1} = M^n \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ n(2n+1) & 2n & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n+2 & 1 & 0 \\ 2n^2+5n+3 & 2n+2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme $2n^2 + 5n + 3 = (n+1)[2(n+1) + 1]$, l'hypothèse de récurrence est vérifiée.

2. Binôme de Newton et matrice nilpotente

On décompose M en une somme de deux matrices 3×3 qui commutent et on applique le binôme de Newton.
(Si les matrices A et B ne commutent pas, on n'a même pas $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.)

Si $M = A + B$, si A et B commutent et si les puissances de A et de B s'expriment simplement, la méthode peut fonctionner.

Un bon choix pour B est la matrice identité I : elle commute avec toutes les autres.

$$M = A + I \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $I^n = I$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A partir de l'exposant 3, toutes les puissances de A sont nulles!

Une matrice dont une des puissances est nulle est une matrice **nilpotente**.

Comme A et I commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton:

$$M^n = (A + I)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k \cdot I^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k$$

Les coefficients $\binom{n}{k}$ se notent aussi C_n^k .

Mais $A^k = 0$ pour $k \geq 3$, donc:

$$M^n = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} A^k = \binom{n}{0} A^0 + \binom{n}{1} A^1 + \binom{n}{2} A^2 = I + n \cdot A + \frac{n(n-1)}{2} \cdot A^2$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2n & 0 & 0 \\ 3n & 2n & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ n(2n+1) & 2n & 0 \end{pmatrix}.$$

Note de Jacques COLLOT

Pour trouver l'expression de l'élément a_{31} , on peut utiliser la méthode de Newton des différences divisées. (Voir ci-après quelques exemples qui expliquent la méthode).

n	$P(n)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3
1	3			
		7		
2	10		2	
		11		0
3	21		2	
		15		0
4	36		2	
		19		
5	55			

$\Rightarrow P(n) = 3 + 7(x-1) + 2(x-1)(x-2) + 0(x-1)(x-2)(x-3) = x(2x+1)$

Exemple 1

Trouver un polynôme $P(x)$ qui pour $x = 2, 3, 4, 5$ prend les valeurs $3, 2, -1, -6$

x	$P(x)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3
2	3			
		$\frac{2-3}{3-2} = -1$		
3	2		$\frac{-1-(-3)}{4-2} = -1$	
		$\frac{-1-2}{4-3} = -3$		$\frac{-1-(-1)}{5-2} = 0$
4	-1		$\frac{-5-(-3)}{5-3} = -1$	
		$\frac{-6-(-1)}{5-4} = -5$		
5	-6			

$$\Rightarrow P(x) = 3 - 1(x-2) - 1(x-2)(x-3) + 0(x-2)(x-3)(x-4) = x^2 + 4x + 1$$

Exemple 2

$x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow P(x) = \{1, 3, 6, 12, 23, 41\}$

x	$P(x)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
0	1				
		$\frac{3-1}{1-0} = 2$			
1	3		$\frac{3-2}{2-0} = \frac{1}{2}$		
		$\frac{6-3}{2-1} = 3$		$\frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{3-0} = \frac{1}{3}$	
2	6		$\frac{6-3}{3-1} = \frac{3}{2}$		0
		$\frac{12-6}{3-2} = 6$		$\frac{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{4-1} = \frac{1}{3}$	
3	12		$\frac{11-6}{4-2} = \frac{5}{2}$		0
		$\frac{23-12}{4-3} = 11$		$\frac{\frac{9}{2} - \frac{5}{2}}{4-2} = \frac{1}{3}$	
4	23		$\frac{18-11}{5-3} = \frac{9}{2}$		
		$\frac{41-23}{5-4} = 18$			
5	41				

$$\begin{aligned}\Rightarrow P(x) &= 1 + 2(x-0) + \frac{1}{2}(x-0)(x-1) + \frac{1}{3}(x-0)(x-1)(x-2) + 0(x-0)(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{6}x + 1\end{aligned}$$

Exemple 3

$$x = \{-1, 0, 2, 6, 8\} \Rightarrow P(x) = \{0, -4, -6, -322, -828\}$$

x	$P(x)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
-1	0				
		$\frac{-4-0}{0-(-1)} = -4$			
0	-4		$\frac{-1-(-4)}{2-(-1)} = 1$		
		$\frac{-6-(-4)}{2-0} = -1$		$\frac{-13-1}{6-(-1)} = -2$	
2	-6		$\frac{-79-(-1)}{6-0} = -13$		0
		$\frac{-322-(-6)}{6-2} = -79$		$\frac{-29-(-13)}{8-0} = -2$	
6	-322		$\frac{-253-(-79)}{8-2} = -29$		
		$\frac{-828-(-322)}{8-6} = -253$			
8	-828				

$$P(x) = 0 - 4(x - (-1)) + 1(x - (-1))(x - 0) - 2(x - (-1))(x - 0)(x - 2) + 0(x - (-1))(x - 0)(x - 2)(x - 6)$$

$$= -2x^3 + 3x^2 + x - 4$$

Modifié le 1 août 2005. (Steve Tumson). Modifié le 3 novembre 05 (Severy). Modifié le 22 février 2016 (Hugues Vermeiren)

EXALG059 – EPB, ULB, Bruxelles

Déterminer A de telle façon que

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

En vertu de la règle de multiplication des matrices, on détermine que A est composé de 3 lignes et de 2 colonnes. $([m.n] \cdot [n.p] = [m.p])$

Méthode 1

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$, en effectuant la multiplication et après identification,

on obtient les deux systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} -a_1 + 2a_2 = 3 \\ a_1 + 2a_2 + a_3 = 8 \\ -2a_1 + a_2 + 2a_3 = 6 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -b_1 + 2b_2 = 4 \\ b_1 + 2b_2 + b_3 = 5 \\ -2b_1 + b_2 + 2b_3 = 6 \end{cases}$$

dont la résolution donne la solution : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Méthode 2

$$\text{On a : } \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Il suffit donc de calculer l'inverse de la matrice carrée.

Après calcul, on obtient :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne finalement :

$$A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Modifié le 27 octobre 2017