Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 52

EXALG520 – EXALG529

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Janvier 2016

EXALG520 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2015.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel *m*, le système

$$\begin{cases} mx + (1-m)y + (1-m)z = m^2 \\ mx + (1+m)y + (1+m)z = m-m^2 \\ x + y + z = 1-m \end{cases}$$

Le système s'écrit aussi : $\begin{cases} x + y + z = 1-m \\ mx + (1-m)y + (1-m)z = m^2 \\ mx + (1+m)y + (1+m)z = m-m^2 \end{cases}$

$$\xrightarrow[L_2=L_3-mL_1]{L_2=L_2-mL_1} \begin{cases} x + y + z = 1-m \\ (1-2m)y + (1-2m)z = 2m^2-m \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Ce système n'est possible que si : $2m^2-m=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

<u>1er cas : $m=0$</u>

Le système devient :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Système simplement indéterminé : } \begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$$

<u>2ème cas : $m=\dfrac{1}{2}$</u>

Le système devient :

$$\begin{cases} x + y + z = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}z = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}xy + \dfrac{3}{2}z = \dfrac{1}{2}0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=\dfrac{1}{2} \\ x+3y+3z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Système simplement indéterminé : $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$

Le 23 février 2016.

EXALG521 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2015.

a) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & e^{-k} & e^{-2k} \\ e^{k} & -e & e^{k} \\ e^{2k} & e^{-k} & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible?

b) Calculer la matrice inverse de A_k pour $k = \ln 2$. (La réponse finale étant une matrice simplifiée au maximum et ne contenant aucun exposant).

Solution proposée par Hugues Vermeiren :

1. Développons le déterminant de A_k, directement, selon la première colonne:

$$\begin{aligned} \det(A_k) &= 1 \cdot (-e-1) - e^{k} \cdot \left(e^{-k} - e^{-3k}\right) + e^{2k} \cdot \left(1 + e^{1-2k}\right) \\ &= e^{2k} + e^{-2k} - 2 \\ &= \left(e^{k} - e^{-k}\right)^2 \end{aligned}$$

$\det(A_k) = 0 \iff e^{k} = e^{-k} \iff k = 0$
La matrice A_k est inversible si et seulement si k est non nul.

2. Calculons les éléments de l'inverse de la matrice $A_{\ln 2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & -e & 2 \\ 4 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Méthode de Gauss:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = x' \\ 2x - ey + 2z = y' \\ 4x + \frac{1}{2}y + z = z' \end{cases}$$ Exprimons les x, y, z linéairement en fonction des x', y', z'.

$L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ et $L_2 \longleftarrow \frac{1}{2} L_2 + e\, L_1$ fournissent:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = x' \\ (1+e)\,x + \left(1 + \frac{1}{4}e\right) z = \frac{1}{2}y' + e\,x' \\ 3 + \frac{3}{4}z = z' - x' \end{cases}$$

$L_3 \longrightarrow (1+e)L_3 - 3L_2$ donne le système triangulaire (échelonné):

$$\left\{\begin{array}{rcccrcr} x & + & \frac{1}{2}\,y & + & \frac{1}{4}\,z & = & x' \\ (1+e)\,x & & & + & (1+\frac{1}{4}\,e)\,z & = & \frac{1}{2}\,y' + e\,x' \\ & & & - & \frac{9}{4}\,z & = & (-4e-1)\,x' - \frac{3}{2}\,y' + (1+e)\,z' \end{array}\right.$$

De là:

- $z = \dfrac{4}{9}\,(4e+1)\,x' + \dfrac{2}{3}\,y' - \dfrac{4}{9}\,(1+e)\,z'$
- $(1+e)\,x = \dfrac{1}{2}\,y' + e\,x' - \dfrac{4+e}{4}\left(\dfrac{4}{9}\,(4e+1)\,x' + \dfrac{2}{3}\,y' - \dfrac{4}{9}\,(1+e)\,z'\right)$

  Avec un peu de courage et de patience...

  $x = -\dfrac{4}{9}\,(1+e)\,x' - \dfrac{1}{6}\,y' + \dfrac{4+e}{9}\,z'$
- $y = 2\,x' - 2\,x - \dfrac{1}{2}\,z$

  $= 2x' - 2\left(-\dfrac{4}{9}\,(1+e)\,x' - \dfrac{1}{6}\,y' + \dfrac{4+e}{9}\,z'\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{9}\,(4e+1)\,x' + \dfrac{2}{3}\,y' - \dfrac{4}{9}\,(1+e)\,z'\right)$

  Ce qui se simplifie en :

  $y = \dfrac{8}{3}\,x' - \dfrac{2}{3}\,z'$

La matrice inverse de $A_{\ln 2}$ est finalement:

$$A_{\ln 2}^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{9}(1+e) & -\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{9}(4+e) \\ \dfrac{8}{3} & 0 & -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{4}{9}(1+4e) & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{4}{9}(1+e) \end{pmatrix}$$

Le 3 février 2016.

EXALG522 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2015.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-1}\leq x$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf

Solution. L'inéquation se récrit en

$$\sqrt{(x-1)(x+1)} \ \leq\ x-|x-2|\,,$$

d'où la condition d'existence $x \in\ ]-\infty:-1]\ \cup\ [1:+\infty[$. Le membre de droite est positif seulement dans l'intervalle $[1:+\infty[$, qui contiendra donc toutes les solutions éventuelles de l'inéquation. Dans cet intervalle, on peut élever au carré, ce qui donne

$$x^2-1\ \leq\ x^2-2x|x-2|+x^2-4x+4\,,$$

c'est-à-dire

$$0\ \leq\ x^2-2x(|x-2|+2)+5\,.$$

Dans l'intervalle $[1:2]$, on a $|x-2|=2-x$, ce qui permet une nouvelle simplification en

$$0\ \leq\ 3x^2-8x+5$$

et puis en

$$0\ \leq\ (3x-5)(x-1)\,.$$

Le membre de droite est positif dans l'ensemble $\{1\}\cup[5/3:2]$, qui sera inclus dans l'ensemble des solutions.
Dans l'intervalle $[2:+\infty[$, on a $|x-2|=2-x$, ce qui permet une simplification en

$$0\ \leq\ -x^2+5\,,$$

Le membre de droite est positif dans le sous-intervalle $[2:\sqrt{5}]$.
En conclusion, l'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est l'ensemble $\{1\}\cup[5/3:\sqrt{5}]$.

Le 10 septembre 2015.

EXALG523 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2015.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^8 - 2z^4 \cos a + 1 = 0$$

dans laquelle a est un paramètre réel.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf

Solution. On pose d'abord $Z = z^4$; l'équation

$$Z^2 - 2Z\cos a + 1 = 0$$

admet les deux solutions complexes conjuguées $\cos a \pm i \sin a$, que l'on écrit aussi $\operatorname{cis}(\pm a)$. Les huit solutions de l'équation initiale sont les racines quatrièmes de ces nombres, c'est-à-dire

$$\operatorname{cis} \frac{\pm a + 2k\pi}{4} : k = 0, 1, 2, 3\,.$$

Le 10 septembre 2015.

EXALG524 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2015.

Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} ax + y - z = -1 \\ -x + ay + z = -1 \\ ax + ay + z = a \end{cases}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf

Le déterminant du système vaut $a^2+2a+1=(a+1)^2$; il s'annule pour $a=-1$. Dans ce cas, le système se récrit en

$$\begin{cases} -x+y-z = -1 \\ -x-y+z = -1 \\ -x-y+z = -1 \end{cases}$$

Des deux premières équations on déduit par addition $x = 1$ et par soustraction on déduit $y = z$; le système est simplement indéterminé et le triplet solution est $x=1, y=\lambda, z=-\lambda$.
Si $a \neq -1$, on a une solution unique, qui est $x=1, y=-1, z=a$.

Le 6 octobre 2015.

EXALG525 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2015.

On donne les matrices réelles

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & 3d\end{pmatrix}$$

où a,b,c et d sont des nombres réels, avec $d>c>0$

On demande de déterminer a,b,c et d sachant que

$$BA^{-1}X=C,\ 9a^2d^2-6abcd=36 \text{ et que } 2\log_2 c+\log_2 d=4$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf

Solution. On obtient successivement

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ BA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix},\ BA^{-1}X=\begin{pmatrix}a & b\\ 2a & 2b\end{pmatrix},$$

d'où on tire $a=1$ et $b=3$, puis $9d^2+9c^2-18cd=36$, ce qui se réduit à $|d-c|=2$ et enfin à $d=c+2$. On a en plus $2\log_2 c+\log_2 d=\log_2 c^2d=4$; $c^2d=2^4=16$, d'où $c=2$ et $d=4$.

Le 10 octobre 2015.

EXALG526 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 1.

Soit $i \in \mathbb{C}$ l'unité imaginaire (satisfaisant $i^2 = -1$). Résolvez l'équation suivante dans laquelle $z \in \mathbb{C}$:

$$\left(\frac{z+i}{z-1}\right)^4 = 1$$

Représentez toutes les solutions graphiquement dans un même plan complexe.
(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Nicole Berckmans :

$$\left(\frac{z+i}{z-1}\right)^4 = \operatorname{cis}(2k\pi) \qquad k \in \mathbb{C} \quad CE : z \neq i$$

$$\frac{z+i}{z-1} = \operatorname{cis}\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(a)\ k=0 \qquad \frac{z+i}{z-1} = 1 \ \Rightarrow z+i = z-i \qquad \text{Impossible}$$

$$(b)\ k=1 \qquad \frac{z+i}{z-1} = i \ \Rightarrow z+i = iz-i \qquad \Rightarrow z = -\frac{2i}{1-i} = 1-i$$

$$(c)\ k=2 \qquad \frac{z+i}{z-1} = -1 \Rightarrow z+i = -z+1 \qquad \Rightarrow z = \frac{1-i}{2}$$

$$(d)\ k=3 \qquad \frac{z+i}{z-1} = -i \Rightarrow z+i = -iz+i \qquad \Rightarrow z = 0$$

<u>Conclusion</u> : On obtient donc trois points alignés. $\boxed{\left\{1-i, \frac{1-i}{2}, 0\right\}}$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx :

CE : $z \neq 1$

Méthode 1

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z+i}{z-1}\right)^4 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (z+i)^4 = (z-1)^4 \\
&\Leftrightarrow \quad z^4 + 4iz^3 - 6z^2 - 4iz + 1 = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 4(1+i)z^3 - 12z^2 + 4(1-i)z = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 4z\big((1+i)z^2 - 3z + (1-i)\big) = 0 \\
&\Rightarrow \quad z_1 = 0
\end{aligned}$$

et z_2 et z_3 sont les solutions de $(1+i)z^2 - 3z + (1-i) = 0$

$\Delta = 9 - 4(1+i)(1-i) = 1 \qquad \sqrt{\Delta} = 1$

$$z_{2,3} = \frac{1}{2(1+i)}(3 \pm 1) = \begin{cases} z_2 = \dfrac{2}{1+i} = 1-i \\ z_3 = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{S = \left\{0\,, 1-i\,, \frac{1-i}{2}\right\}}$$

Méthode 2

$$\begin{aligned}
\text{Posons } Z = \frac{z+i}{z-1} \quad &\Leftrightarrow \quad (z-1)Z = z+i \\
&\Leftrightarrow \quad (Z-1)z = Z+i \quad \text{avec } Z \neq 1 \text{ sinon } 0 = i \text{ (absurde)} \\
&\Leftrightarrow \quad z = \frac{Z+i}{Z-1}
\end{aligned}$$

$Z^4 = 1 = \operatorname{cis} 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$Z_k = \operatorname{cis} k\dfrac{\pi}{2}$

$Z_0 = 1$ à rejeter

$Z_1 = i \Rightarrow z_1 = \dfrac{i+i}{i-1} = 1-i$

$Z_2 = -1 \Rightarrow z_2 = \dfrac{-1+i}{-1-1} = \dfrac{1-i}{2}$

$Z_3 = -i \Rightarrow z_3 = \dfrac{-i+i}{-i-1} = 0$

$$\boldsymbol{S = \left\{0\,, 1-i\,, \frac{1-i}{2}\right\}}$$

Solution proposée par Jacques Collot :

On a $z \neq 1$

$$\left(\frac{z+i}{z-1}\right)^4 = 1 \Rightarrow (z+i)^4 - (z-1)^4 = 0 \Rightarrow \left[(z+i)^2 - (z-1)^2\right]\left[(z+i)^2 + (z-1)^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow (z+i-z+1)(z+i+z-1)\left(z^2+2iz-1+z^2-2z+1\right) = 0$$

$$\Rightarrow (i+1)(2z+i-1)\left[2z^2+2(i-1)z\right] = 0 \Rightarrow 2z(2z+i-1)(z+i-1) = 0$$

Conclusion : $\boxed{\left\{0, \frac{1-i}{2}, 1-i\right\}}$

Le 25 octobre 2016.

EXALG527 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 1.

Trouvez tous les polynômes à coefficients réels $P(x)=\mathbb{R}|x|$ de degré au plus 4 satisfaisant simultanément les deux conditions suivantes :

(1) 1 est racine double de $P(x)$

(2) $P(x)=P(1-x)$

Solution proposée par Nicole Berckmans :

(1) $P(x)=(x-1)^2(ax^2+bx+c)$

(2) $\forall x: P(x)=P(1-x)$ en particulier pour $x=1: P(1)=P(0)=0$ donc $c=0$

$$\text{et } \begin{cases} P(x)=(x-1)^2 x(ax+b) & (1) \\ P(1-x)=(1-x-1)^2(1-x)\left[a(1-x)+b\right]=x^2(1-x)(-ax+a+b) & (2) \end{cases}$$

(1) et (2) par la méthode des coefficients indéterminés, on trouve

coef x^4 : $a=a$

x^3 : $-2a=-2a$

x^2 : $-2b=-b \Rightarrow b=0$

Conclusion : $\boxed{P(x)=ax^2(x-1)^2}$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx :

La première condition signifie que $P(x)$ est divisible par $(x-1)^2$, qui est donc un facteur de $P(x)$. La deuxième condition implique alors que x^2 est un autre facteur de $P(x)$.

Etant donné que le degré de $P(x)$ ne dépasse pas 4, la forme générale du polynôme est alors :

$$P(x) = ax^2(x-1)^2 \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

Le 25 octobre 2016.

EXALG528 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 1.

Résoudre, dans les nombres réels, l'équation

$$2(\log x)-1=\log\left(x-\frac{25}{10}\right)$$

où log est le logarithme en base 10.

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Nicole Berckmans :

$$\text{CE :}\quad \begin{cases} x>0 \\ x>\dfrac{25}{10}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\log\frac{x^2}{x-\frac{25}{10}}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{x-\frac{25}{10}}=1 \Rightarrow x^2-10x+25=0 \Rightarrow (x-5)^2=0 \Rightarrow \boxed{x=5}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx :

CE : $\quad x>2{,}5$

$$\begin{aligned} 2(\log x)-1=\log\left(x-\frac{25}{10}\right) &\Leftrightarrow \log x^2-\log 10=\log\left(x-\frac{25}{10}\right) \\ &\Leftrightarrow \log\frac{x^2}{10}=\log\frac{10x-25}{10} \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{10}=\frac{10x-25}{10} \\ &\Leftrightarrow x^2-10x+25=0 \\ &\Leftrightarrow (x-5)^2=0 \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{x=5} \end{aligned}$$

Le 25 octobre 2016.

EXALG529 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 1.

Sur de longues distances, la transmission de courant électrique continu à très haute tension (HVDC) occasionne des pertes de puissance nettement moins élevées que par les lignes à courant alternatif. La plus longue liaison électrique HVDC en service en 2016 est située au Brésil, du Rio Madeira à Araquara. Elle mesure 2400 km et dispose d'une puissance initiale de 7100 MW. La puissance à l'arrivée est de 6606 MW.

(a) Estimez le pourcentage de perte de puissance par 100 km (en supposant que le pourcentage de perte est uniforme sur toute la longueur du parcours).

(b) D'autres lignes HVDC sont à l'étude, pour lesquelles la perte de puissance par 100 km sera identique à celle de la ligne de Rio Madeira à Araquara. On souhaite limiter la perte de puissance électrique à 5% sur ces lignes. Déterminez, à 100 km près, la longueur maximale d'une ligne pour laquelle la perte de puissance reste inférieure à 5%.

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Catherine Leroy :

(a) Soit i la perte de puissance par 100 km en %

$$7100\left(1-\frac{i}{100}\right)^{24}=6606 \Rightarrow \left(1-\frac{i}{100}\right)=\left(\frac{6606}{7100}\right)^{\frac{1}{24}} \Rightarrow i=0.3\ \%$$

0.3 % de perte sur chaque tranche de 100 km et 6.96 % sur 2400 km

car $6606=0.9304\times 7100$

(b) Soit p la puissance initiale en MW et donc $0.95p$ la puissance finale en MW.

Soit n le nombre de tranches de 100 km : $p\left(1-\frac{i}{100}\right)^{n}\geq 0.95p$

$$\Rightarrow 0.997^{n}\geq 0.95 \Rightarrow n\leq\frac{\log 0.95}{\log 0.997}=\frac{\ln 0.95}{\ln 0.997}=17.07\Rightarrow n=17$$

La longueur recherchée à 100 km près vaut 1700 km

Le 25 octobre 2016.