Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 58

EXALG580 – EXALG589

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Septembre 2018

EXALG580 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2018.

On considère le polynôme

$$x^3+(7-4i)x^2+(9-16i)x-9-12i$$

(a) Montrer que ce polyôme admet une racine réelle.

(b) En déduire les autres racines complexes de ce polynôme.

Solution proposée par Fabienne Decuyper

$P(x)=x^3+(7-4i)x^2+(9-16i)x-9-12i$

$P(x)$ admet une solution réelle "a" $\Leftrightarrow P(a)=0$

$P(a)=0 \Leftrightarrow a^3+(7-4i)a^2+(9-16i)a-9-12i=0$

$\Leftrightarrow a^3+7a^2+9a-9-4a^2i-16ai-12i=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3+7a^2+9a-9=0 \\ -4a^2-16a-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3+7a^2+9a-9=0 \\ a^2+4a+3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3+7a^2+9a-9=0 \\ (a+1)(a+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3+7a^2+9a-9=0 & (1) \\ a=-1 \text{ ou } a=-3 & (2) \end{cases}$$

(2) dans (1):

$(-1)^2+7(-1)^2+9(-1)-9\neq 0$ mais $(-3)^2+7(-3)^2+9(-3)-9=0$

Donc $P(x)$ admet une racine réelle : -3

Solution proposée par Jacques Collot

Le coefficient du x^3 est 1. On sait que la racine réelle doit être un diviseur du terme indépendant. C'est donc ± 1 ou ± 3. En remplaçant dans le polynôme, on constate que celui-ci s'annule pour $x=-3$.

Appliquons Horner :
$$\begin{array}{c|c:ccc|c} & 1 & 7-4i & 9-16i & & -9-12i \\ \hline -3 & & -3 & -12+12i & & +9+12i \\ \hline & 1 & 4-4i & -3-4i & & 0 \end{array}$$

Il nous reste alors à résoudre : $x^2+4(1-i)x-3-4i=0$

Comme le coefficient du x est pair, on calcule $\Delta' = (2-2i)^2-(-3-4i)=3-4i$ (Note 1)

Cherchons la racine carrée de ce Δ': $\begin{cases} a^2-b^2=3 \Rightarrow |a|>|b| \\ 2ab=-4 \Rightarrow a \text{ et } b \text{ sont de signes contraires} \end{cases}$ (Note 2)

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=3 \\ a^2+b^2=\sqrt{3^2+4^2}=5 \end{cases}$$

Ce qui donne : $\begin{cases} 2a^2=8 \Rightarrow a=\pm 2 \\ 2b^2=2 \Rightarrow b=\pm 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3-4i}=2-i$

Les deux racines complexes sont : $x=\dfrac{-(2-2i)\pm(2-i)}{1}=\begin{cases} -4+3i \\ i \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{S=\{-3,-4+3i,i\}}$

Note 1 : Si dans une équation du second degré le coefficient du x est pair, il est plus simple de procéder comme suit. Soit $ax^2+2b'x+c=0$.

On définit $\Delta'=b'^2-ac$. Si le $\Delta'>0$, les solutions sont alors : $x_{1,2}=\dfrac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$

Note 2 : Soit à calculer $a+bi$, la racine carrée du nombre complexe $x+yi$.

On a $(a+bi)^2=x+yi \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=x \\ 2ab=y \end{cases}$. On met ces deux équations au carré et on les additionne $\Rightarrow a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2=x^2+y^2 \Rightarrow a^2+b^2=\sqrt{x^2+y^2}$.

On a alors $\begin{cases} a^2-b^2=x \\ a^2+b^2=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2=x+\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow a=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} \\ 2b^2=\sqrt{x^2+y^2}-x \Rightarrow b=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}} \end{cases}$

Le 13 septembre 2018. Modifié le 23 juin 2019 (Jean Perbal). Modifié le 25 aout 2019 (Lucie Cuvelliez). Modifié el 22 février 2020 (Fabienne Decuyper).

EXALG581 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2018.

Déterminer en discutant en fonction du paramètre réel m, le nombre et le signe des racines réelles du polynôme $x^2+2(2m+1)x+(2m^2+5m+2)$.

Le coefficient du x étant pair, on calcule le $\Delta'=(2m+1)^2-(2m^2+5m+2)=2m^2-m-1$.
Les racines du Δ' sont -1/2 et 1. Pour avoir des racines réelles, il faut donc avoir $m\leq -1/2$ ou $1\leq m$.

D'autre part, si S désigne la somme des racines et P le produit des racines, on a

$$\begin{cases} 2(2m+1)=-S & S=0 \text{ si } m=-1/2 \\ 2m^2+5m+2=P & P=0 \text{ si } m=-2 \text{ ou } -1/2 \end{cases}$$

Le tableau de signe est alors :

		-2		-0.5		1	
$2(2m+1)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2m^2+5m+2$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
S	$+$	$+$	$+$	0	/	$-$	$-$
P	$+$	0	$-$	0	/	$+$	$+$

Conclusion

$m<-2$	2 racines distinctes positives	$0>x_2>x_1$
$m=-2$	1 racine nulle, 1 racine positive.	$x_2=0,\ x_1>0$
$-2<m<-1/2$	2 racines distinctes de signe opposé	$x_1>0$ et $x_2<0$ avec $\lvert x_1\rvert>\lvert x_2\rvert$
$m=-1/2$	1 racine double nulle	$x_1=x_2=0$
$-1/2<m<1$	Pas de racine réelle	/
$m=1$	1 racine double négative	$x_1=x_2=-3<0$
$m>1$	2 racines distinctes négatives	$x_2<x_1<0$

Le 20 octobre 2017

EXALG582 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2018.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x+\frac{1}{2}}$$

CE : $\begin{cases} 1)\ x \geq -3 \\ 2)\ x \geq 1 \\ 3)\ x \geq -1/2 \\ 4)\ \sqrt{x+3} > \sqrt{x-1} \text{ tjr vérifié} \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$

On élève au carré :

$$x+3-2\sqrt{(x+3)(x-1)}+x-1=x+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad x+\frac{3}{2}=2\sqrt{(x+3)(x-1)}$$

Cette équation n'engendre pas de condition supplémentaire.

On peut élever une nouvelle fois au carré :

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=4(x+3)(x-1)$$

$$\Rightarrow \qquad x^2+5x-\frac{57}{4}=0$$

Les racines sont $\begin{cases} x=-\frac{19}{6} \text{ à rejeter} \\ \boxed{x=\frac{3}{2}} \end{cases}$

Le 20 octobre 2017

EXALG583 – EPL, UCL, LLN, juillet 2018, série 1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante, discutant en fonction du paramètre réel $a \geq 0$:

$$|x^2 - 4x| > |x^2 - 4x + a|$$

(Expliquez soigneusement votre raisonnement).

Solution proposée par Marc Decoux

$$\left(|x^2 - 4x|\right)^2 > \left(|x^2 - 4x + 4|\right)^2$$

Le sens de l'inégalité ne change pas car les deux membres sont positifs.

$$\Rightarrow (x^2 - 4x)^2 > (x^2 - 4x)^2 + a^2 + 2a(x^2 - 4x) \Rightarrow 0 > a^2 + 2a(x^2 - 4x)$$

<u>1er cas : $a = 0$</u>

L'inégalité devient : $0 > 0$, ce qui est impossible $\Rightarrow S = \varnothing$

<u>2éme cas : $a \neq 0$</u>

$$a^2 + 2a(x^2 - 4x) < 0 \Rightarrow 2x^2 - 8x + a < 0$$

Equation du second dégré dont le ρ vaut $8(8 - a)$

D'où le tableau de signe :

a	0		8	
ρ	/	$+$	0	$-$

<u>(1) $0 < a < 8\,;\rho > 0$</u>

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{8 - a}}{4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{4 - \sqrt{2(8 - a)}}{2} \\ x_2 = \dfrac{4 + \sqrt{2(8 - a)}}{2} \end{cases}$$

x		x_1		x_2	
$2x^2 - 8x + a$	$+$	0	$-$	0	$+$

On déduit : $S = \left] \dfrac{4 - \sqrt{2(8 - a)}}{2}, \dfrac{4 + \sqrt{2(8 - a)}}{2} \right[$

<u>(2) $a = 8\,;\rho = 0$</u> : $2x^2 - 8x + a < 0 \Rightarrow (x - 2)^2 < 0$. Impossible $\Rightarrow S = \varnothing$

<u>(3) $a > 8\,;\rho < 0$</u> : alors $2x^2 - 8x + a > 0$. Impossible $\Rightarrow S = \varnothing$

<u>Conclusions</u> :

$a = 0$	$S = \varnothing$
$0 < a < 8$	$S = \left] \dfrac{4 - \sqrt{2(8 - a)}}{2}, \dfrac{4 + \sqrt{2(8 - a)}}{2} \right[$
$a \geq 8$	$S = \varnothing$

Solution proposée par Jacques Collot

Notons $f(x) = x^2 - 4x$, $f'(x) = |f(x|$ et $g(x) = x^2 - 4x + a$

- $f(x) = x^2 - 4x$ est une parabole de racines 0 et 4, et de sommet $(2,-4)$.

  Son tableau de signes est

x		0		4	
$f(x)$	+	0	−	0	+

- $f'(x) = |x^2 - 4x|$ est donc une parabole égale à $-f(x)$ si $0 < x < 4$
- $g(x) = x^2 - 4x + a$ est la parabole $f(x)$ translatée vers le haut d'une longueur a.

Si $a = 0$, $f(x) = g(x)$, et l'inéquation ne peut être satisfaite.

Si $a = 8$, $f'(x)$ est $g(x)$ sont tangents en $(2,4)$. Par conséquent, si $a \geq 8$, l'inéquation ne peut être satisfaite (car $g(x) \geq f'(x)$)

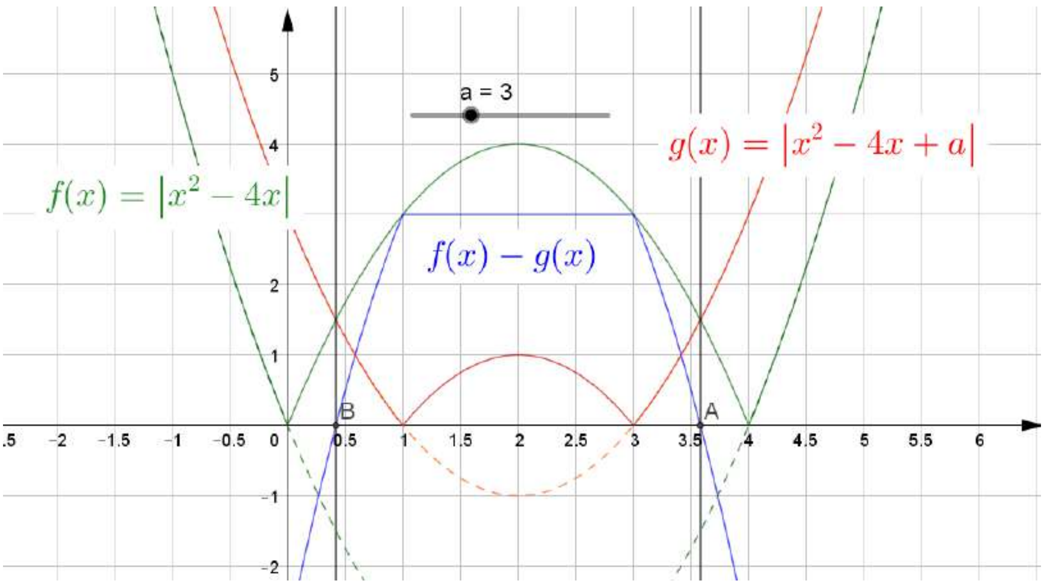
Si $0 < a < 8$, l'inéquation devient :

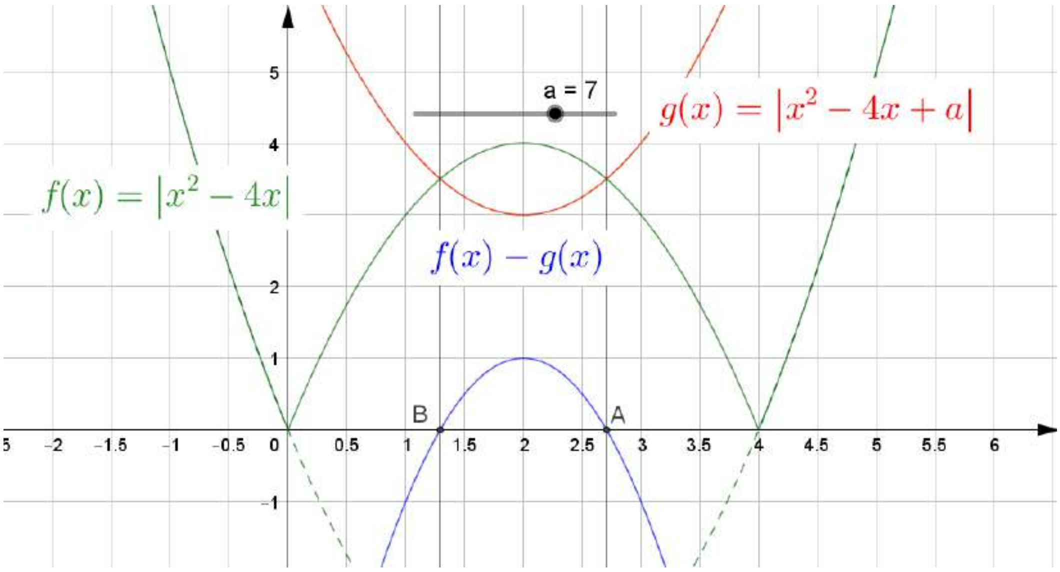
$$-x^2 + 4x > x^2 - 4x + a \Rightarrow 2x^2 - 8x + a < 0$$

Les racines sont : $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-2a}}{2}$

Conclusion :

$$\boxed{\frac{4-\sqrt{16-2a}}{2} < x < \frac{4+\sqrt{16-2a}}{2} \quad \text{avec} \quad 0 < a < 8}$$





Le 20 septembre 2018

EXALG584 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2018.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\begin{cases}(m+1)x + y + z = m+1\\ x + (m+1)y + z = m+3\\ x + y + (m+1)z = -2m-4\end{cases}$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

Utilisons la méthode de Cramer :

$$\Delta = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1\\ 1 & m+1 & 1\\ 1 & 1 & m+1\end{vmatrix} \overset{L_1=L_1+L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix} m+3 & m+3 & m+3\\ 1 & m+1 & 1\\ 1 & 1 & m+1\end{vmatrix} = (m+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & m+1 & 1\\ 1 & 1 & m+1\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{L_2=L_2-L_1\\ L_3=L_3-L_1}}{=} (m+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & m & 0\\ 0 & 0 & m+1\end{vmatrix} = m^2(m+3)$$

De même on calcule :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1\\ m+3 & m+1 & 1\\ -2m-4 & 1 & m+1\end{vmatrix} = \ldots = m(m+3)(m+1)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m+1 & m+1 & 1\\ 1 & m+3 & 1\\ 1 & -2m-4 & m+1\end{vmatrix} = \ldots = m(m+3)^2$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & m+1\\ 1 & m+1 & m+3\\ 1 & 1 & -2m-4\end{vmatrix} = \ldots = -2m(m+2)(m+3)$$

<u>1er cas : $m=0$.</u> Le système devient $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+y+z=3\\ x+y+z=-4\end{cases}$. Système impossible.

<u>2ème cas : $m=-3$.</u> Le système devient

$$\begin{cases}-2x+y+z=-2\\ x-2y+z=0\\ x+y-2z=2\end{cases} \overset{\substack{L_1=L_1+2L_3\\ L_2=L_2-L_1}}{\rightarrow} \begin{cases}3y-3z=2\\ -3y+3z=-2\\ x+y-2z=2\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=\lambda+4/3\\ y=\lambda+2/3\\ z=\lambda\end{cases}$$

Système simplement indéterminé.

Pour les autres valeurs de *m*, le système admet une solution définie par :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{m+1}{m} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{m+3}{m} \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = -\dfrac{2(m+2)}{m} \end{cases}$$

<u>Résumé</u>

$m = 0$ Système impossible

$m = 3$ $S = \{(\lambda + 4/3; \lambda + 2/3; \lambda)\}$

$m \neq 0; 3$ $S = \left\{\left(\dfrac{m+1}{m}; \dfrac{m+3}{m}; -\dfrac{2(m+2)}{m}\right)\right\}$

Le 21 septembre 2018

EXALG585 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2018.

Déterminer toutes les valeurs possibles du paramètre a pour qu'une des racines du polynôme $x^2-4(a-1)x-20$ soit la somme des carrés des racines du polynôme x^2+2x-a.

Soient x_1 et x_2 les racines de $P(x)=x^2+2x-a$.

On sait que $x_1+x_2=-2$ (Le coefficient en x est l'opposé de la somme des racines)

$\Rightarrow x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=4 \Rightarrow x_1^2-2a+x_2^2=4$ (Le terme indépendant est le produit des racines)

$\Rightarrow x_1^2+x_2^2=2(2+a)$

Soient $x_1^{'}$ et $x_2^{'}$ les racines de $Q(x)=x^2-4(a-1)x-20$.

$x_1^{'},x_2^{'}=2(a-1)\pm\sqrt{4(a-1)^2+20}.$

On doit donc avoir :

$2(a-1)\pm2\sqrt{(a-1)^2+5}=2(2+a)\Rightarrow\sqrt{(a-1)^2+5}=3\Rightarrow a^2-2a-3=0$

$\Rightarrow(a+1)(a-3)=0$

Si $a=-1\Rightarrow\left(x_1^{'};x_2^{'}\right)=(-10,2)$ et $\left(x_1;x_2\right)=(-1,-1)$. On vérifie $2=(-1)^2+(-1)^2$

Si $a=3\Rightarrow\left(x_1^{'};x_2^{'}\right)=(-2,10)$ et $\left(x_1;x_2\right)=(-3,1)$. On vérifie $10=(-3)^2+(1)^2$

Le 21 septembre 2018

EXALG586 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2018.

Soit le système d'équations :

$$\begin{cases} mx\log_{10}100+8y\log_2\sqrt[4]{2}=-3\log_5\sqrt[3]{5^2} \\ x+ma^{\log_a y}+\log_{10}50=\log_{10}5 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de m qui rendent le système

1. Impossible
2. Indéterminé

Solution proposée par Fabienne Zoetard

Le système se ré-écrit de façon plus simple :

$$\begin{cases} mx+y=-1 \\ x+my=-1 \end{cases}$$

<u>Méthode du déterminant</u>

$$\Delta=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}=0\Rightarrow m^2-1=0$$

Si $m=1$: le système est simplement indéterminé : $\begin{cases} x=-\lambda-1 \\ y=\lambda \end{cases}$

Si $m=-1$: le système est impossible.

<u>Méthode par substitution</u>

$$\begin{cases} mx+y=-1 \\ x+my=-1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y\left(-m^2+1\right)=m-1 \\ x=-my-1 \end{cases}$$

Si $m=1$: $\begin{cases} 0y=0 \\ x=-y-1 \end{cases}$ le système est simplement indéterminé.

Si $m=-1$: $\begin{cases} 0y=-2 \\ x=y-1 \end{cases}$ le système est impossible.

Le 7 septembre 2018

EXALG587 - POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2018.

Déterminer toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ telles que

$$\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)\left(x^2-2\right)+24=0$$

Si on développe l'équation, on arrive à une équation du sixième degré.

Ce qui ne semble pas être une bonne option.

Ramenons l'équation à une équation du troisième dégré en posant :

$$x^2-4=t \Rightarrow \begin{cases} x^2-9=t-5 \\ x^2-2=t+2 \end{cases}$$

L'équation devient :

$$t\left(t-5\right)\left(t+2\right)+24=0 \Rightarrow t^3-3t^2-10t+24=0 \qquad (1)$$

Les diviseurs de 24 sont : $div\left(24\right)=\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm8;\pm12;\pm24$

En essayant ces différentes valeurs, on trouve facilement que l'équation (1) s'annule pour $t=-3, t=2$ et $t=4$.

On peut le vérifier en utilisant la méthode de Horner.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -10 & 24 \\ \hline 2 & & 2 & -2 & -24 \\ & 1 & -1 & -12 & 0 \\ -3 & & -3 & +12 & \\ & 1 & -4 & 0 & \end{array} \Rightarrow \left(t-2\right)\left(t+3\right)\left(t-4\right)=0$$

Par conséquent : $\begin{cases} t=2 \Rightarrow x^2=6 \Rightarrow x=\pm\sqrt{6} \\ t=-3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm1 \\ t=4 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow x=\pm2\sqrt{2} \end{cases}$

Conclusion : $S=\left\{\pm1,\pm2\sqrt{2};\pm\sqrt{6}\right\}$

Le 7 septembre 2018

EXALG588 – EPL, UCL, LLN, juillet 2018 série 1.

(1) Déterminer les conditions d'existence de l'inéquation suivante :

$$\frac{x-\sqrt{\frac{x+1}{2}}}{\ln\sqrt{5-x^2}} < e^x$$

Réponse :

(2) Une urne contient 10 jetons possédant une valeur différentes allant de 1 à 10 par pas de 1. Quelle est la probabilité d'atteindre une valeur totale de 8 en tirant au hasard 3 jetons? Donner le résultat sous forme de nombres entiers.

Réponse :

(3) Pour tout nombre complexe $z = x+iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on note $\overline{z} = x-iy$, son complexe conjugué et $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, sa norme. Trouvez tous les nombres complexes z tels que $(z-\overline{z})^2 = |z|^2$.

Réponse :

(4) Trouvez les deux valeurs réelles de a telles que $\log_a 2 = \log_2 a^4$.

Réponse :

(5) Calculez le produit matriciel $A \cdot B$ de matrices réelles A et B suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Réponse :

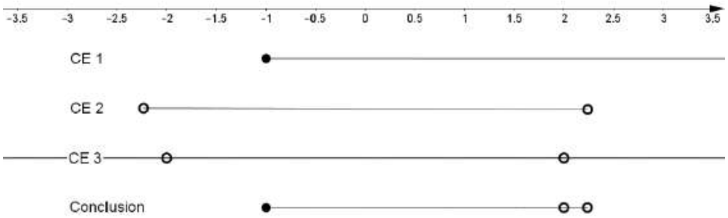
Solution proposée par Marc Decoux

(1) CE1 : $\dfrac{x+1}{2} \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

CE2 : $5 - x^2 > 0 \quad \begin{array}{ccccc} & -\sqrt{5} & & +\sqrt{5} & \\ \hline - & 0 & + & 0 & - \end{array} \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$

CE3 : $\ln\left(\sqrt{5-x^2}\right) \neq 0 \Rightarrow 5 - x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 2$

Conclusion : $x \in \left[-1, \sqrt{5}\right[\setminus \{2\}$



(2) Il n'y a que deux combinaisons qui donnent 8 : $1+2+5$ et $1+3+4$.

Le nombre de possibilités de tirer 3 cartes parmi 10 est C_{10}^3 (tirage sans remise).

$$\Rightarrow P(X=8) = \frac{2}{C_{10}^3} = \frac{2}{\dfrac{10!}{3!7!}} = \frac{2\times 3\times 2}{10\times 9\times 8} = \frac{1}{60}$$

(3) $\left(z - \bar{z}\right)^2 = |z|^2 \Rightarrow \left(x + iy - x + iy\right)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \left(2iy\right)^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow -5y^2 = x^2 \Rightarrow x = y = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{z = 0}$

(4) $\log_a 2 = \log_2 a^4 \qquad$ CE : $a > 0$ et $a \neq 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_2 a} = 4\log_2 a \Rightarrow \left(\log_2 a\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 a = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow a = 2^{-1/2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} \\ \log_2 a = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow a = 2^{1/2} = \boxed{\sqrt{2}} \end{cases}$$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$

EXALG589 – EPL, UCL, LLN, juillet 2018 série 1.

Le 8 juillet, Laurent et Bruno ont eu la chance d'assister au match de la demi-fiale de la Coupe du monde ente l'Allemagne et le Brésil.
Au moment où les entrées dans le stade ont débuté, à 15h30, on leur a annoncé qu'il y avait 53 000 personne devant eux.
la première heure, le rythme des entrées dans le stade était très soutenu mais il a ralenti pendant la seconde heure. Ainsi en 15h30 et 17h30, seules 10 000 personnes sont parvenues à entrer, ce qui représentait k fois le nombre des entrées de la première heure. Pendant la troisième heure, les entréesse sont ralenties encore par rapport à la deuxième heure avec le même facteur k. Toutefois, le stade était tout juste rempli pour le début du match, à 18h30, alors que nos deux amis étaient installés dans le stade depuis juste une heure soit 17h30.
Au terme de la première mi-temps; le score était de 5-0 pour l'Allemagne, si bien qu'une partie des supporters brésiliens ont décidés de quitter le stade.
A la fin du match, le score était de 7-1 et les supportes restés durant la seconde mi-temps se sont mis à sortir du stade à un rythme initialement élevé, mais décroissant rapidement. On a ainsi observé que 8000 supporters avaient quitté le stade le premier quart d'heure, mais qu'après qhaque quart d'heure écoulé ce vommbre était multiplié par un facteur 0.84. Trois heures après la fin du match, il restait 6 000 supporters allemands fêtant la victoire dans le stade, forçant les services de sécurité à intervenir.
Nous voulons savoir :

– Combien de spectateurs ont assisté au match?

– Que vaut le facteur k ?

– Cambien de spectateurs brésiliens ont quitté le stade lors de la mi temps?

(Expliquer soignuesement votre raisonnement).
Note : mettez ce problème en équation(s), justifiez toutes vos réponses et arrondissez le nombre de spectateurs à l'unité la plus proche dans vos réponses finales.

Solution proposée par Marc Decoux

$\boxed{\text{Entrée des supporters}}$

Heure	Nombre	
1er	N_1	
2éme	$N_2 = 1000 = kN_2 \quad (k < 1 \text{ car } N_2 < N_1)$	(1)
3éme	$N_3 = kN_2 = 1000k$ (Parmi eux : laurent et Bruno)	(2)

<u>Calcul de *k*</u>

A 17h30, Laurent et Bruno entrent. Dès lors, 53 000 supporters sont entrés, avant eux, durant la 1er et 2éme heure.

$$\left.\begin{array}{l} N_1 + N_2 = 53000 \\ N_2 = 1000 \end{array}\right\} \Rightarrow N_1 = 43000 \qquad (3)$$

$$(1) \text{ et } (2) : 10000 = k.43000 \Rightarrow \boxed{k = \frac{10}{43}} \qquad (4)$$

<u>Calcul de *N*</u>

$$(2) \text{ et } (4) : N_3 = \frac{10}{43} \times 10000 \simeq 2325.58 \simeq 2326 \qquad (5)$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 53000 + 2326 = \boxed{55326 \text{ supporters}}$$

Sortie des supporters

<u>A la fin de la 1er mi-temps</u> : $B =$ nombre de brésiliens sortants.

<u>A la fin du match</u> :

Quart d'heure	$N°$	Nombre de sortants	
3 heures = 12 quarts d'heure	1	8000	Progression géométrique de raison 0.84
	2	8000.084	
	3	$8000.0.84^2$	
	...		
	12	8000.084^{11}	
		Total : S	

S est la somme de 12 termes consécutifs d'une progression géométrique de raison 0.84 :

$$S = 1\text{er terme}.\frac{1-(\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1-\ \text{raison}} = 8000.\frac{1-0.84^{12}}{1-084}$$

$$\simeq\ 43829.48 \simeq 43829$$

<u>Calcul de B</u>

Après 3 heures, il reste 6000 supporters.

$$N - B - S = 6000$$

$$\Rightarrow \qquad B = N - S - 6000 = 55326 - 43829 - 6000 = \boxed{5497}$$

5497 brésiliens sont sortis à la mi-temps.