Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 6

EXALG060 – EXALG069

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG060 – Mons, questions-types 2000-2001.

Un bassin a la forme d'un cône de révolution de hauteur H et de rayon R.
Déterminer la longueur x dont il faut simultanément diminuer et augmenter le rayon pour définir la forme d'un deuxième bassin dont la capacité serait identique au premier.
Discuter le nombre de solutions selon les valeurs de H et de R.

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi HR^2 \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(H-x\right)\left(R+x\right)^2 \quad \text{avec} \quad V_1 = V_2$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{3}\pi HR^2 = \frac{1}{3}\pi\left(H-x\right)\left(R+x\right)^2$$

$$\rightarrow \quad x^3 + \left(2R - H\right)x^2 + \left(R^2 - 2RH\right)x = 0$$

On élimine la solution triviale $x = 0$. Il reste :

$$x^2 + \left(2R - H\right)x + \left(R - 2H\right)R = 0$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{H - 2R \pm \sqrt{\left(2R-H\right)^2 - 4R\left(R-2H\right)}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[H - 2R \pm \sqrt{H\left(4R+H\right)}\right] \quad \text{avec} \quad H\left(4R+H\right) > 0$$

Il y a donc deux solutions, qu'il faut étudier car une solution x n'est acceptable que si $0 < x < H$.

Première racine :

Il faut : $0 < H - 2R + \sqrt{H(4R+H)} < 2H$

Etudions d'abord :

$$0 < H - 2R + \sqrt{H(4R+H)} \quad \rightarrow \quad 2R - H < \sqrt{H(4R+H)}$$

Si $2R - H < 0 \quad \rightarrow \quad R < \dfrac{H}{2}$ l'inéquation est toujours vérifiée.

Si $R \geq \dfrac{H}{2} \quad \rightarrow \quad (2R-H)^2 < H(4R+H) \quad \rightarrow \quad R < 2H$

En résumé, la première racine est > 0, si $R < 2H$

Etudions maintenant :

$$H - 2R + \sqrt{H(4R+H)} < 2H \quad \rightarrow \quad H(4R+H) < H^2 + 4RH + 4R^2$$

Cette inéquation est toujours vérifiée;

Deuxième racine:

Il faut :$0 < H - 2R - \sqrt{H(4R+H)} < 2H$

Etudions d'abord :

$$0 < H - 2R - \sqrt{H(4R+H)} \quad \rightarrow \quad \sqrt{H(4R+H)} < H - 2R$$

Si $H - 2R < 0 \quad \rightarrow \quad R > \dfrac{H}{2}$, l'inéquation n'est jamais vérifiée.

Si $H - 2R > 0 \quad \rightarrow \quad R < \dfrac{H}{2}$, l'néquation devient :

$$H(4R+H) < H^2 - 4HR + 4R^2 \quad \rightarrow \quad R > 2H$$

Les deux conditions sur R étant incompatibles, on déduit que la deuxième racine n'est jamais positive.

Vu le pragraphe précédent, il est inutile d'étudier : $H - 2R - \sqrt{H(4R+H)} < 2H$

Conclusion : Une solution $x = \dfrac{1}{2}\left[H - 2R + \sqrt{H(4R+H)}\right]$ si $R < 2H$

Pas de solution si $R \geq 2H$

EXALG061 – Liège, juillet 2001.

Discuter et résoudre le système.

$$\begin{cases} ax+y+z=a \\ x+ay+az=1 \\ x-y+2z=a \end{cases}$$

où a est un paramètre réel.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=3(a+1)(a-1) \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=3(a+1)(a-1)$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & a-1 & 2 \end{vmatrix}=-(a-1)^2(a+1) \qquad \Delta_z=\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & a-1 \end{vmatrix}=(a-1)^2(a+1)$$

1) Si $a=1$, le système devient:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x-y+2z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-\dfrac{3}{2}z \\ y=\dfrac{z}{2} \end{cases}$$

Sytème simplement indéterminé.

2) Si $a=-1$, le système devient:

$$\begin{cases} -x+y+z=-1 \\ x-y-z=1 \\ x-y+2z=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y=1+z \\ x-y=-1-2z \end{cases} \rightarrow 1+z=-1-2z$$

$$\rightarrow \quad z=-\frac{2}{3} \rightarrow \begin{cases} x-y=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3} \\ x-y=-1+\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \rightarrow x=\frac{1}{3}+y$$

Sytème simplement indéterminé.

3) Si $a\neq 1,\ a\neq -1$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1-a}{3} \\ z=\dfrac{a-1}{3} \end{cases}$$

EXALG062 – Liège, juillet 2001.

Résoudre l'inéquation

$$\sqrt{\frac{x}{x^2-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}} \qquad (x \in \Re)$$

$$\text{CE}: \begin{cases} a)\ 1-x>0 \ \rightarrow \ x<1 \\ b)\ x^2-1 \neq 0 \ \rightarrow \ x \neq -1 \ \ et \ \ x \neq 1 \\ c)\ \dfrac{x}{x^2-1} \geq 0 \ \rightarrow \ \dfrac{x}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \end{cases}$$

Tableau :

		-1		0		1	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
	$-$	$\therefore$	$+$	0	$-$	$\therefore$	$+$

$\rightarrow \ -1 < x \leq 0 \quad \text{et} \quad x > 1$

Conclusion : $\boxed{CE: -1 < x \leq 0}$

L'inéquation devient : $\dfrac{x}{x^2-1} \leq \dfrac{1}{1-x} \ \rightarrow \ \dfrac{x}{x^2-1} - \dfrac{1}{1-x} \leq 0 \ \rightarrow \ \dfrac{2x+1}{x^2-1} \leq 0$

Il reste à étudier le signe de $\dfrac{2x+1}{x^2-1}$

		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+1$	
$2x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{2x+1}{x^2-1}$	$-$	$\therefore$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$\therefore$	$+$

Compte tenu des CE : $\rightarrow \underline{\underline{-\dfrac{1}{2} \leq x \leq 0}}$

Modifié le 22 cotobre 2004 (Jacques LEROY)

EXALG063 – Liège, juillet 2001.

Si z_1, z_2, z_3 désignent les trois racines du polynôme

$$24z^3 - 26z^2 + 9z - 1$$

calculer

$$\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2}$$

Suggestion : identifier le polynôme et sa décomposition en facteurs pour obtenir la somme, le produit et la somme 2 à 2 des racines.

Soit z_1, z_2 *et* z_3 les trois racines

$$\rightarrow\ (z+z_1)(z+z_2)(z+z_3)=0$$

$$\rightarrow\ z^3 + (z_1+z_2+z_3)z^2 + (z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)z + z_1z_2z_3 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} z_1+z_2+z_3 = -\dfrac{26}{24} \\ z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3 = \dfrac{9}{24} \\ z_1z_2z_3 = -\dfrac{1}{24} \end{cases}$$

De la deuxième équation, on tire :

$$(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)^2 = z_1^2z_2^2 + z_1^2z_3^2 + z_2^2z_3^2 + 2\left(z_1^2z_2z_3 + z_1z_2^2z_3 + z_1z_2z_3^2\right) = \left(\frac{9}{24}\right)^2$$

$$\rightarrow\ z_1^2z_2^2 + z_1^2z_3^2 + z_2^2z_3^2 + 2\,z_1z_2z_3\,(z_1+z_2+z_3) = \left(\frac{9}{24}\right)^2$$

$$\rightarrow\ z_1^2z_2^2 + z_1^2z_3^2 + z_2^2z_3^2 + 2\left(-\frac{1}{24}\right)\left(-\frac{26}{24}\right) = \left(\frac{9}{24}\right)^2$$

$$\rightarrow\ z_1^2z_2^2 + z_1^2z_3^2 + z_2^2z_3^2 = \frac{29}{24^2}$$

Le polynôme à calculer : $\dfrac{1}{z_1^2} + \dfrac{1}{z_2^2} + \dfrac{1}{z_3^2}$ s'écrit:

$$\frac{z_1^2z_2^2 + z_1^2z_3^2 + z_2^2z_3^2}{z_1^2z_2^2z_3^2} = \frac{\dfrac{29}{24^2}}{\left(-\dfrac{1}{24}\right)^2} = 29$$

EXALG064 – Liège, septembre 2001

Pour quelles valeurs réelles de m le trinôme

$$m\,x^2+2mx+1$$

possède-t-il deux racines distinctes dans l'intervalle] –2, 0 [

Pour avoir deux racines distinctes, il faut : $m^2-m>0$ avec $m\neq 0$.

C'est-à-dire : $m<0$ et $m>1$

Les racines sont données par : $x=\dfrac{-m\pm\sqrt{m^2-m}}{m}=-1\pm\sqrt{1-\dfrac{1}{m}}$

Donc,

$$\begin{cases}-1-\sqrt{1-\dfrac{1}{m}}>-2\\[2ex] -1+\sqrt{1-\dfrac{1}{m}}<0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\sqrt{1-\dfrac{1}{m}}<1\\[2ex] \sqrt{1-\dfrac{1}{m}}<1\end{cases}$$

Les deux conditions se ramènent donc à une seule.

$$\sqrt{1-\frac{1}{m}}<1\ \rightarrow\ 1-\frac{1}{m}<1\ \rightarrow\ -\frac{1}{m}<0\ \rightarrow\ m>0$$

Compte tenu des conditions de départ : $\boxed{m>1}$

Modifié le 14 janvier (Sabine Bouzette)

EXALG065 – Liège, septembre 2001

Déterminer les formes algébrique et trigonométrique des racines cubiques de (-i).

$$-i = \cos 270 + i \sin 270$$

$$\sqrt[3]{-i} = \cos(90 + k120) + i \sin(90 + k120)$$

	Forme trigonométrique	Forme algébrique
$k = 0$	$\cos 90 + i \sin 90$	i
$k = 1$	$\cos 210 + i \sin 210$	$-\frac{\sqrt{3} + i}{2}$
$k = 2$	$\cos 330 + i \sin 330$	$\frac{\sqrt{3} - i}{2}$

EXALG066 – Liège, septembre 2001

Résoudre l'inéquation :

$$\frac{1}{x(x-1)} \le \frac{1}{\sqrt{x(x+9)}} \qquad (x \in \Re)$$

CE :

$a)\ x \ne 0 \ \ et \ \ x \ne 1$

$b)\ x \ne 0 \ \ et \ \ x \ne -9$

$x(x+9) > 0 \ \rightarrow \ x < -9 \ \ et \ \ x > 0$

Conclusion : $x < -9 \ \ et \ \ x > 0\ ;\ \ x \ne 1$

Si $x(x-1) > 0 \ \rightarrow \ x < 0 \ \ et \ \ x > 1$

L'inéquation s'écrit :

$\sqrt{x(x+9)} \le x(x-1) \ \rightarrow \ x(x+9) \le x^2(x-1)^2$

$\rightarrow x(x-3)(x^2+x+3) \ge 0$

Comme le trosième facteur est toujours positif $\rightarrow \ x \le 0 \ \ et \ x \ge 3$

Compte tenu des CE : $x \le -9 \ \ et \ \ x \ge 3$

Si $x(x-1) < 0 \ \rightarrow \ 0 < x < 1 \quad (1)$

L'inéquation s'écrit :

$x(x-3)(x^2+x+3) \le 0$

Comme le deuxième facteur est toujours positif $\rightarrow 0 \le x \le 3$

Compte tenu de la condition (1) : $0 < x < 1$

Solution :

$\leftarrow; -9 [\ \ \cup \ \ ]0;1[\ \ \cup \ \ [3; \rightarrow$

ou bien : $\{x \in \Re \mid x < -9;\ 0 < x < 1;\ x \ge 3\}$

EXALG067 –Exemple

Résoudre l'inéquation :

$$\left|2-2x\right|<\left|x^2-1\right| \quad \left(x\in\Re\right)$$

$$\text{a)}\begin{cases}2-2x>0 & \rightarrow\ x<1\\ x^2-1>0 & \rightarrow\ x<-1\ \ et\ \ x>1\end{cases} \quad \rightarrow\ x<-1$$

L'inéquation devient : $2-2x<x^2-1\ \rightarrow\ x^2+2x-3>0\ \rightarrow\ \left(x+3\right)\left(x-1\right)>0$

Donc : $x<-3$

$$b)\begin{cases}2-2x>0 & \rightarrow\ x<1\\ x^2-1<0 & \rightarrow -1<x<1\end{cases} \quad \rightarrow\ -1<x<1$$

L'inéquation devient : $2-2x<-x^2+1\rightarrow x^2-2x+1<0\rightarrow\left(x-1\right)^2<0$

Ce qui n'est jamais vérifié $\rightarrow$ L'inéquation est impossible

$$c)\begin{cases}2-2x<0 & \rightarrow\ x>1\\ x^2-1>0 & \rightarrow x<-1\ \ et\ \ x>1\end{cases} \quad \rightarrow\ x>1$$

L'inéquation devient : $-2+2x<x^2+1\ \rightarrow\ \left(x-1\right)^2>0$ Toujours vérifié

Donc : $x>1$

$$d)\begin{cases}2-2x<0 & \rightarrow\ x>1\\ x^2-1<0 & \rightarrow -1<x<1\end{cases} \quad \rightarrow\ impossible$$

Conclusion : $\boxed{\leftarrow;-3\left[\ \ \bigcup\ \right]1;\rightarrow}$

ou bien : $\boxed{\left\{x\in\Re\mid x<-3;\ \ x>1\right\}}$

EXALG068 – POLYTECH, Umons, Mons, entre 1995 et 1998

EPL, UCL, LLN, septembre 2002

EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2019

Déterminer $m \in \mathbb{R}$ pour que

$$-1 < \frac{x^2 - mx + 1}{3x^2 + 3x + 3} < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Comme $x^2 + x + 1$ est toujours positif, on obtient le système

$$\begin{cases} -3x^2 - 3x - 3 < x^2 - mx + 1 \\ 3x^2 + 3x + 3 > x^2 - mx + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 + (3-m)x + 4 > 0 & (1) \\ 2x^2 + (3+m)x + 2 > 0 & (2) \end{cases}$$

Considérons les fonctions définies par les premiers membres.

Soit la fonction $f(x) = 4x^2 + (3-m)x + 4$

Comme le coefficient de x^2 est positif, $f(x)$ sera strictement positive pour tout x si le delta $m^2 - 6m - 55$ est négatif :

$\Rightarrow m^2 - 6m - 55 > 0$ trinôme dont les racines sont :

$$\Rightarrow \; m = +3 \pm \sqrt{9+55} = \begin{cases} m_1 = 11 \\ m_2 = -5 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ La condition : } -5 < m < 11$$

Soit la fonction $g(x) = 2x^2 + (3+m)x + 2$

Comme le coefficient de x^2 est positif, $g(x)$ sera strictement positive pour tout x si le delta $m^2 + 6m - 7$ est négatif :

$\Rightarrow m^2 + 6m - 7 < 0$ trinôme dont les racines sont :

$$\Rightarrow \; m = +3 \pm \sqrt{9+7} = \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -7 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ La condition : } -7 < m < 1$$

Conclusion:

En combinant les deux conditions : $\boxed{-5 < m < 1}$

Modifié le 18 octobre 2004. Modifié le 28 mai 2004. Modifié le 1 novembre 2019.

EXALG069 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998

Pour quelles valeurs des paramètres réels a et b le système suivant admet-il une solution unique ? Quelle est cette solution ?

$$\begin{cases} ax + 2y = 2a - 2 & (1) \\ ax - y = a + 1 & (2) \\ 3ax + 3by = ab - 1 & (3) \\ 9bx - 6ay = 11 + 2a^2 & (4) \end{cases}$$

Nous sommes confrontés à un système de 4 équations en les deux inconnues x et y .
Pour beaucoup de valeurs des paramètres ce système sera sans doute impossible.
Pour certaines valeurs des paramètres, il pourrait être indéterminé. Il aura une solution unique si deux des 4 équations sont redondantes avec les deux autres.

Il existe des méthodes systématiques pour résoudre de tels systèmes.
Nous exposons ici une méthode élémentaire qui comporte les étapes suivantes.

1) Résoudre le système formé par les équation (1) et (2).
Discuter en fonction des valeurs de a et b.

2) Discuter la compatibilité des solutions trouvées avec les équations (3) et (4).

3) Conclure en présentant les solutions (x, y) vérifiant les 4 équations pour certaines valeurs des paramètres a et b.

$$(1)-(2) \quad : \quad 3y \quad = \quad a-3 \quad \to \quad y=\frac{a}{3}-1$$

$$(2) \qquad : \quad ax \quad = \quad y+a+1=\frac{4a}{3}$$

Donc si $a \neq 0$, $\quad x=\frac{4}{3}$

<u>Cas $a=0$, $y=-1$</u>

$$(3): \quad -3b \quad = \quad -1 \quad \to \quad b=\frac{1}{3}$$

$$(4): \quad 3x \quad = \quad 11 \quad \to \quad x=\frac{11}{3}$$

Par conséquent, si $a=0$ et $b=\frac{1}{3}$, il existe une solution unique $\begin{cases} x=\frac{11}{3} \\ y=-1 \end{cases}$

<u>Cas $a \neq 0$, $x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{a}{3}-1$</u>

$$(3): \quad 4a+3b\left(\frac{a}{3}-1\right) \quad = \quad ab-1 \quad \to \quad 4a-3b=-1 \qquad (5)$$

$$(4): \quad 12b-6a\left(\frac{a}{3}-1\right) \quad = \quad 11+2a^2 \quad \to \quad 4a^2-6a-12b=-11 \quad (6)$$

De (5), on tire $3b=4a+1$; En remplaçant dans (6), on a l'équation

$$4a^2-22a+7=0. \quad \to \quad \begin{cases} a_1=\frac{11-\sqrt{93}}{4} \\ a_1=\frac{11+\sqrt{93}}{4} \end{cases}$$

Donc, lorsque a prend une des deux valeurs a_1 ou a_2 et pour $b=\frac{4}{3}a+\frac{1}{3}$,

On a la solution unique : $\begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=\frac{a}{3}-1 \end{cases}$

<u>Conclusion</u> Une solution existe et est unique pour trois couples de valeurs des paramètres a et b.