Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 60

EXALG600 – EXALG609

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Octobre 2019

EXALG600 – EPL, UCL, LLN, juillet 2019 série 2.

Soit $p \in \mathbb{R}$. Discutez et résolvez dans les nombres complexes l'équation

$$(z+2i)^4 + p\left(x^2+4\right) = 0$$

où i est l'unité imaginaire telle que $i^2 = -1$.

Donnez les solutions sous la forme $a+bi$.

(Expliquez soigneusement cotre raisonnement)

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans

On a $z^2 + 4 = (z+2i)(z-2i)$.

L'équation peut s'écrire : $(z+2i)^2\left[(z+2i)^2 + p(z-2i)^2\right] = 0$

1) $z + 2i = 0 \Rightarrow S_1 = \{-2i\}$

2) Développons $(z+2i)^2 + p(z-2i)^2$,

$$z^4 + 4zi - 4 + p\left(z^2 - 4zi - 4\right) = 0$$

$$(p+1)z^2 + 4i(1-p)z - 4(1+p) = 0$$

2.1) Si $p+1=0$, alors l'équation devient : $8iz = 0 \Rightarrow z = 0$

2.2) Si $p+1 \neq 0$

$$\Delta' = \left[2i(1-p)\right]^2 + 4(1+p)^2 = 16p$$

- Si $p<0$ alors $z = \dfrac{-2i(1-p) \pm 4i\sqrt{-p}}{p+1}$
- Si $p>0$ alors $z = \dfrac{-2i(1-p) \pm 4\sqrt{p}}{p+1}$
- Si $p=0$ alors $z = -2i$

<u>Conclusion</u>

$p=-1$	alors	$S = \{-2i, 0\}$
$p=0$	alors	$S = \{-2i\}$
$p<0$ et $p \neq -1$	alors	$S = \left\{-2i, \dfrac{-2i(1-p) \pm 4i\sqrt{-p}}{p+1}\right\}$
$p>0$	alors	$S = \left\{-2i, \dfrac{-2i(1-p) \pm 4\sqrt{p}}{p+1}\right\}$

Le 7 septembre 2019

EXALG601 – EPL, UCL, LLN, septembre 2019.

Une entreprise de plafonnage emploie trois ouvriers (Laurent, Pierre-Yves et Bruno), dont les horaires et les cadences sont différents. Ainsi, Laurent a l'habitude de démarrer sa journée à 8h et s'y tient coûte que coûte. Bruno qui doit déposer ses enfants à l'école le matin n'arrive qu'à 9h.

Pierre-Yves travaille plus lentement que Laurent mais de manière consciencieuse. Il ne fait que 3 m^2 de plafonnage sur le temps qu'il faut à Laurent pour faire 4 m^2. Bruno qui est un peu moins perfectionniste, réalise quant à lui 4.5 m^2 sur la même durée.

Laurent aime prendre une petite pause pour manger à midi, qu'il adapte selon le travail à faire. Pierre-Yves, un peu moins flexible, prend d'office une demi-heure à midi pour téléphoner à sa mamy. Bruno mange en travaillant.

Aujourd'hui, Laurent, Pierre-Yves et Bruno vont jouer un match important avec leur équipe de mini-foot. Il est impératif qu'ils arrêtent leur travail à 16h pile.

Pour s'assurer qu'il plafonne tous une même surface, déterminez la durée de pause que peut s'octroyer Laurent et l'heure à laquelle Pierre-Yves doit arriver.

(Expliquer soigneusement votre raisonnement)

Note : mettez ce problème en équation (s), justifier toutes vos réponses et arrondissez à l'unité la plus proche des réponse finale.

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans

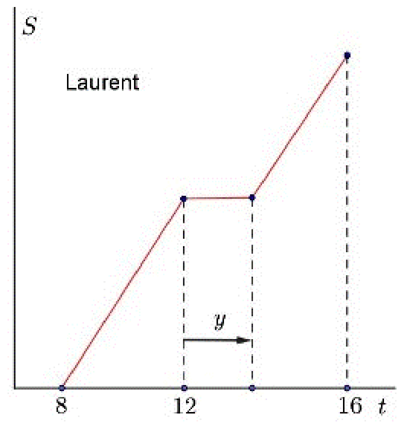
Soit α, la vitesse de plafonnage (un certain nombre de m^2 donné par heure).

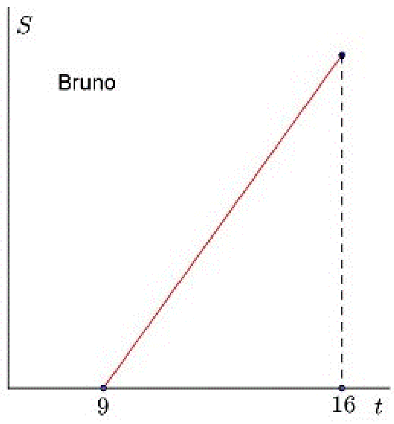
On a alors

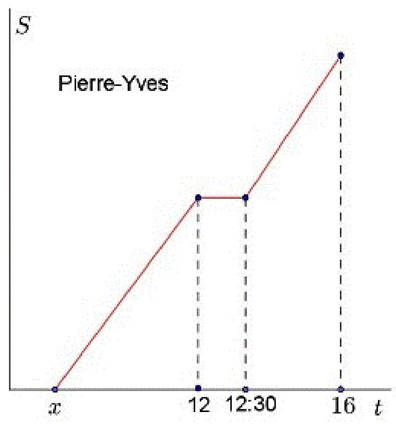
	Vitesse	Surface plafonnée	
Laurent	4α	$(16-8-y)\times 4\alpha$	(1)
Bruno	$\frac{9}{2}\alpha$	$7\times\frac{9}{2}\alpha$	(2)
Pierre-Yves	3α	$\left(16-x-\frac{1}{2}\right)\times 3\alpha$	(3)

$$(1)=(2)\Rightarrow(8-y)=\frac{63}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{8}\text{ h}$$

$$(3)=(2)\Rightarrow 3\left(16-x-\frac{1}{2}\right)=\frac{63}{2}\Rightarrow x=5\text{ h}$$







Le 7 septembre 2019

EXALG602 - EPL, UCL, LLN, septembre 2019.

1) Déterminez les conditions d'existence de l'équation suivante.

$$\frac{\exp\left(x^2-3\right)}{x+\pi}=\ln\left(\frac{-1}{x-1}\right)$$

Réponse : $\boxed{}$

2) On jette une paire de dés équilibrés, l'un étant de couleur bleue et l'autre de couleur rouge. Avec quelle probabilité la valeur du résultat du dé de couleur rouge est-elle plus grande que celle du dé de couleur bleue.

3) Soit $z \in \mathbb{C}$. Représentez dans le plan complexe les racines de z^4+4.

Réponse : $\boxed{}$

4) Calculez la somme de 7 premiers termes d'un progression géométrique de raison 2 ayant comme terme initial 42.

Réponse : $\boxed{}$

5) Calculez le quotient et le reste de la division de x^4-2x^2+1 par $x+2$.

Quotient : $\boxed{}$ Reste : $\boxed{}$

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans

1) $x \in \left]-\infty,1\right[\setminus \{-\pi\}$

2)

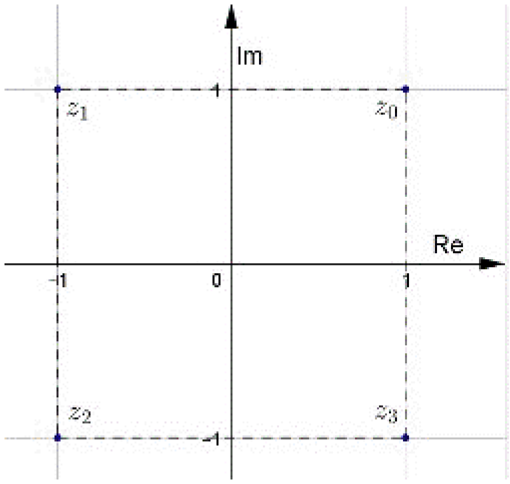
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1	1
3	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0

$$\Rightarrow p(R>B)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

3) $-4=4\operatorname{cis}\pi \Rightarrow z=\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi+2k\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4} &&= 1+i\\
z_1 &= \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4} &&= -1+i\\
z_2 &= \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4} &&= -1-i\\
z_3 &= \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4} &&= 1-i
\end{aligned}$$

.



4) $S_n = u_0 \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 42 \dfrac{2^7 - 1}{2 - 1} = 5334$

5) Horner

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ \hline -2 & & -2 & 4 & -4 & 8 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & -4 & 9 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} Q = x^3 - 2x^2 + 2x - 4 \\ R = 9 \end{cases}$$

EXALG603 - EPL, UCL, LLN, septembre 2019.

Résolvez dans les réels l'inéquation suivante

$$1-\frac{\ln(x+1)}{\ln(2x+1)}>\frac{\ln(4-x)}{\ln(2x+1)}$$

(Expliquez soigneusement votre raisonnement)

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans

$$\text{CE : }\begin{cases} x+1>0 & x>-1 \\ 2x+1>0 & x>-\frac{1}{2} \\ 2x+1\neq 1 & x\neq 0 \\ 4-x>0 & x<4 \end{cases} \Rightarrow x\in\left]-\frac{1}{2},4\right[\setminus\{0\}$$

L'équation s'écrit :

$$\frac{\ln(4-x)}{\ln(2x+1)}+\frac{\ln(x+1)}{\ln(2x+1)}<\frac{\ln(2x+1)}{\ln(2x+1)}$$

$\underline{\text{1er cas : } \ln(2x+1)>0\Rightarrow 0>x>4}$

$$\ln(4-x)(x+1)<\ln(2x+1)\Rightarrow(4-x)(x+1)<2x+1\Rightarrow -x^2+x+3<0$$

$$\Delta=13\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{-2}\quad\Rightarrow \text{TS : }\begin{array}{c|ccccccc} x & & 0 & & \frac{1+\sqrt{13}}{2} & & 4 & \\ \hline p(x) & / & / & + & 0 & - & / & / \end{array}$$

$$\Rightarrow S_1=\left]\frac{1+\sqrt{13}}{2},4\right[$$

$\underline{\text{2ème cas : } \ln(2x+1)<0\Rightarrow \frac{-1}{2}>x>0}$

$$\ln(4-x)(x+1)>\ln(2x+1)\Rightarrow(4-x)(x+1)>2x+1\Rightarrow -x^2+x+3>0$$

$$\text{TS : }\begin{array}{c|ccccccc} x & \frac{1-\sqrt{13}}{2} & & -\frac{1}{2} & & 0 & & \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ \hline p(x) & / & / & / & + & / & / & / \end{array}$$

$$\Rightarrow S_2=\left]-\frac{1}{2},0\right[$$

<u>Conclusion</u>

$$S=S_1\cup S_2=\left]-\frac{1}{2},0\right[\cup\left]\frac{1+\sqrt{13}}{2},4\right[$$

Le 7 septembre 2019

EXALG604 - EPL, UCL, LLN, septembre 2019.

Cette année, 200 étudiants ont présenté l'examen d'entrée d'algèbre à la première session de juillet. La tâche de correction s'annonce importante. Laurent et Bruno, vos chers interrogateurs, se partagent donc le paquet de copies sans faire attention à le séparer en deux parts égales.

Au bout de trois heures de correction, Laurent pose son stylo et annonce à Bruno qu'il a terminé. Conscient qu'il a sans doute eu moins de copies à corriger, Laurent prend alors la moitié de celles restant à Bruno. Laurent met 50 minutes pour corriger ce second paquet, tandis qu'il en faut 75 à Bruno.

Une fois l'encodage des points terminés, Laurent et Bruno discutent du travail effectué et de leur efficacité à corriger les copies d'examen, mais ils n'arrivent pas à tomber d'accord. Soyez l'arbitre de ce débat et déterminez combien de copies Laurent avait reçu en début de correction, ainsi que les cadences de correction de chacun.

(Expliquer soigneusement cotre raisonnement)

Note : mettez ce problème en équation (s), justifier vos réponses et arrondissez à l'unité la plus proche dans vos réponses finales

---

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans

Soit

x le nombre de copies de Laurent

$200-x$ le nombre de copies de Bruno

Après $3\text{h}=180'$, Laurent a corrigé x copies

Bruno a corrigé y copies

Il reste $(200-x-y)$ copies.

Après 50' Laurent a corrigé $\left(100-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)$ copies

Après 75' Bruno a corrigé $\left(100-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)$ copies

En termes de cadences, on a alors

$$\begin{cases} L: \dfrac{x}{180}=\dfrac{100-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}}{50} & (1) \\ B: \dfrac{y}{180}=\dfrac{100-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}}{75} & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(1)}{(2)} \Rightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{75}{50}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow y=\dfrac{2}{3}x \\ (1) \Rightarrow \dfrac{x}{18}=\dfrac{100-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}}{5} & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow x=\frac{18}{5}\left(100-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)=\frac{18}{5}\left(100-\frac{x}{2}-\frac{x}{3}\right)=\frac{18}{5}\left(100-\frac{5}{6}x\right)=360-3x$$

$$\Rightarrow 4x=360 \Rightarrow x=90 \Rightarrow y=60$$

<u>Conclusion</u>

Au départ, Laurent a reçu 90 copies et Bruno 110 copies

Les cadences sont pour Laurent : 90 copies en 180' $\Rightarrow$ <u>1 copie en 2'</u>

Bruno : 60 copies en 180' $\Rightarrow$ <u>1 copie en 3'</u>

<u>Vérification</u>

Après 3h : L : $100-45-30=25$ copies en 50'

B : 25 copies en 75'

Le 7 septembre 2019

EXALG605 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2019.

a) Déterminer $m \in \mathbb{R}$ pour que le polynôme

$$(2m-1)x^2+2(m-1)+3m$$

admette 2 racines réelles dont la somme des carrés est égale à 4.

Remarque : il ne suffit pas de "deviner" une (ou plusieurs) valeur(s) de *m*. On attend un raisonnement qui montre qu'il n'y a pas d'autre(s) valeur(s) que celle(s) trouvée(s).

b) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que les équations

$$2x^2+ax+2=0 \qquad \text{et} \qquad x^2+x+\frac{a}{2}=0$$

aient une solution réelle commune.

---

a) On demande 2 racines réelles, donc le Δ' doit être ≥ 0:

$$\Delta' = b'^2 - ac = (m-1)^2 - 3m(2m-1) = -5m^2+x+1 \geq 0$$

$$\Rightarrow 5m^2-x-1 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{1-\sqrt{21}}{10} \simeq -0.3583 \\ m_2 = \dfrac{1+\sqrt{21}}{10} \simeq 0.5583 \end{cases} \Rightarrow m \in \left[\frac{1-\sqrt{21}}{10}, \frac{1+\sqrt{21}}{10}\right] \quad (1)$$

D'autre par les racines de l'équation sont telles que

$$x_1^2+x_2^1=4 \Rightarrow x_1^2+2x_1x_2+x_2^1=4+2x_1x_2 \Rightarrow (x_1+x_2)^2=4+2x_1x_2$$

or $x_1+x_2=-\dfrac{2(m-1)}{2m-1}$ et $x_1x_2=\dfrac{3m}{2m-1}$

On remplace : $\left(-\dfrac{2(m-1)}{2m-1}\right)^2 = 4+2\dfrac{3m}{2m-1} \Rightarrow 4(m-1)^2-4(2m-1)^2-6m(2m-1)=0$

Ce qui donne après simplification :

$$-24m^2+14m=0 \Rightarrow -2m(12m-7)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{m=0} \\ m=\dfrac{7}{12} \simeq 0.5833 \quad \text{(à rejeter vu (1))} \end{cases}$$

Si $m=0$, l'équation devient $-x^2-2x=0 \Rightarrow -x(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-2 \end{cases}$

Et on a bien $x_1^2+x_2^2=(-2)^2+0=4$

$b)$ Les racines sont rélles donc :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x^2+ax+2=0 \Rightarrow \Delta=a^2-16\geq 0 \Rightarrow a\leq -4 \text{ ou } a\geq 4 \\ x^2+x+\dfrac{a}{2}=0 \quad \Rightarrow \Delta=1-2a\geq 0 \quad \Rightarrow a\leq \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow a\leq -4$$

Soustrayons les équations membres à membres :

$$(a-2)x=a-2 \Rightarrow x=1$$

Les deux polynômes doivent donc être divisibles par $x-1$

eq1	2	a	2
1		2	$a+2$
	2	$a+2$	$a+4$

eq2	1	1	$\dfrac{a}{2}$
1		1	2
	1	2	$\dfrac{a+4}{2}$

Par conséquent : $\boxed{a=-4}$

Vérification

Les deux équations deviennent : $\left\{\begin{array}{l} 2x^2-4x+2=0 \Rightarrow 2(x-1)^2 \\ x^2+x-2=0 \Rightarrow (x-1)(x+2) \end{array}\right.$

Le 7 novembre 2019

EXALG606 - EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2019.

Résoudre en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$, le système suivant :

$$\begin{cases} x & - & ay & + & a^2 z & = & a \\ ax & - & a^2 y & + & az & = & 1 \\ ax & + & y & - & a^3 z & = & -1 \end{cases}$$

Utilisons la méthode de Cramer.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a & -a^2 & a \\ a & 1 & -a^3 \end{vmatrix} = \ldots = a(a-1)(a+1)(a^2+1)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a & -a & a^2 \\ 1 & -a^2 & a \\ -1 & 1 & -a^3 \end{vmatrix} = \ldots = a^2(a-1)^2(a+1)^2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a & -1 & -a^3 \end{vmatrix} = \ldots = a(a-1)^2(a+1)^2$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ a & -a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = \ldots = (a-1)(a+1)(a^2+1)$$

Si $x \neq 0, -1$ ou 1, alors le système admet comme solution :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2(a-1)^2(a+1)^2}{a(a-1)(a+1)(a^2+1)} = \dfrac{a(a-1)(a+1)}{a^2+1} \\ y = \dfrac{a(a-1)^2(a+1)^2}{a(a-1)(a+1)(a^2+1)} = \dfrac{(a-1)(a+1)}{a^2+1} \\ z = \dfrac{(a-1)(a+1)(a^2+1)}{a(a-1)(a+1)(a^2+1)} = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

Regardons maintenant les valeurs particulières de a.

1) $a = 0$: Le système devient $\begin{cases} x = 0 \\ 0 = 1 \quad \text{Impossible} \\ y = 1 \end{cases}$

2) $a = 1$: Le système devient $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z - 1 \end{cases}$ Simple indétermination.

3) $a = -1$: Le système devient $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ -x - y - z = 1 \\ -x + y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z - 1 \end{cases}$ Simple indétermination

Le 7 novembre 2019

EXALG607- EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2019.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$3\frac{x}{2}-1>-\sqrt{\frac{x^2}{2}-3\frac{x}{2}+5}$$

L'équation peut s'écrire

$$\sqrt{\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+5}>1-\frac{3x}{2}$$

Le radicant est toujours strictement positif car son $\Delta<0$.

L'inéquation est toujours vérifiée si $1-\frac{3x}{2}\leq 0 \Rightarrow x\geq\frac{2}{3}$ $\qquad (1)$

Si $x<\frac{2}{3}$ alors les deux membres de l'inégalité sont postifs et on peut donc élever au carré.

$\Rightarrow \frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+5>1-3x+\frac{9x^2}{4}\Rightarrow 2x^2-6x+20>4-12x+9x^2$

$\Rightarrow -7x^2+6x+16>0$. Les racines sont $x=-\frac{8}{7}$ et $x=2$

Ce qui implique $x\in\left]-\frac{8}{7},2\right[$, mais en tenant compte de la condition (1), on déduit

finalement $\boxed{x\in\left]-\frac{8}{7},+\infty\right[}$

Le 7 novembre 2019

EXALG608 - EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2019.

a) Déterminer toutes les valeurs de $p, q \in \mathbb{R}$ pour que le polynôme

$$x^2 + px + q$$

admette 2 racines réelles distinctes telles que chacune de ces racines augmentée de 1 soit solution de l'équation

$$x^2 - p^2x + pq = 0$$

b) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que le polynôme

$$ax^2 - 15x + 4a$$

admette deux racines réelles non nulles r_1 et r_2 telles que

$$\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{r_2} = -\frac{33}{4}$$

---

a) Les racines sont rélles et disctinctes : $\begin{cases} x^2 + px + q = 0 & \Rightarrow p^2 - 4q > 0 & (1) \\ x^2 - p^2x + pq = 0 & \Rightarrow p^4 - 4pq > 0 & (2) \end{cases}$

Soit x_1 et x_2 les racines du premier polynôme. On a $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1x_2 = q \end{cases}$

Donc les racines du deuxième polynôme sont $x_1 + 1$ et $x_2 + 1$.

Et on a $\begin{cases} x_1 + 1 + x_2 + 1 = p^2 & \Rightarrow -p + 2 = p^2 \Rightarrow \begin{cases} p = -2 \\ p = 1 \end{cases} \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) = pq & \Rightarrow x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = pq \Rightarrow q - p + 1 = pq & (3) \end{cases}$

Si $p = -2$, l'équation (3) donne $q = -1$ et si $p = 1$ alors $q = 0$.

On a donc deux couples (p, q) qui satisfont les conditions (1) et (2):

$$\boxed{(-2, -1) \text{ et } (1, 0)}$$

Vérification

1) $(-2, -1) \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 & \Rightarrow x_1 = 1 - \sqrt{2} \text{ et } x_2 = 1 + \sqrt{2} \\ x^2 - 4x + 2 = 0 & \Rightarrow x_1' = 2 - \sqrt{2} \text{ et } x_2' = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$

2) $(1, 0) \quad \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \text{ et } x_2 = +1 \\ x^2 - x = 0 & \Rightarrow x_1' = 0 \text{ et } x_2' = 1 \end{cases}$

b) L'équation est $4x^2 - 15x + 4a = 0$ et soient r_1 et r_2 les racines. On a $\begin{cases} r_1 + r_2 = \dfrac{15}{4} \\ r_1 r_2 = a \end{cases}$

On doit vérifier : $\dfrac{r_2}{r_1} + \dfrac{r_1}{r_2} = -\dfrac{33}{4} \Rightarrow r_2^2 + r_1^2 = -\dfrac{33}{4} r_1 r_2 \Rightarrow r_2^2 + 2r_1 r_2 + r_1^2 = -\dfrac{33}{4} r_1 r_2 + 2r_1 r_2$

$\Rightarrow (r_1 + r_2)^2 = -\dfrac{25}{4} r_1 r_2 \Rightarrow \left(\dfrac{15}{4}\right)^2 = -\dfrac{25a}{4} \Rightarrow \boxed{a = -\dfrac{1}{4}}$

Vérification

L'équation est $4x^2 - 15x - 9 = 0 \Rightarrow r_1 = 3\dfrac{5 - \sqrt{41}}{8}$ et $r_2 = 3\dfrac{5 + \sqrt{41}}{8}$

$$\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{r_2} = \frac{3\dfrac{5+\sqrt{41}}{8}}{3\dfrac{5-\sqrt{41}}{8}} + \frac{3\dfrac{5-\sqrt{41}}{8}}{3\dfrac{5+\sqrt{41}}{8}} = \frac{5+\sqrt{41}}{5-\sqrt{41}} + \frac{5-\sqrt{41}}{5+\sqrt{41}} = \frac{\left(5+\sqrt{41}\right)^2 + \left(5-\sqrt{41}\right)^2}{25-41} = \frac{132}{-13} = -\frac{33}{4}$$

Le 7 novembre 2019

EXALG609 - EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2019.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3+\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2+\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)+1=0$$

b) Déterminer $\alpha \in \mathbb{C}$ pour que l'équation

$$z^2-\alpha(1-i)z+2\alpha-2i=0$$

admette 2 solutions complexes conjuguées. Calculer ces solutions.

La question a) a déjà été posée en Polytech en juillet 2003

Posons $t=\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) \to t^3+t^2+t+1=0 \to (t+1)(t^2+1)=0$

$\underline{1)\ t=-1} \to \frac{z-2i}{z+2i}=-1 \to z-2i=-z-2i \to z=0$

$\underline{2)\ t=i} \to \frac{z-2i}{z+2i}=i \to z-2i=iz-2 \to (1-i)z=2(i-1) \to z=-2$

$\underline{3)\ t=-i} \to \frac{z-2i}{z+2i}=-i \to z-2i=-iz+2 \to (1+i)z=2(i+1) \to z=2$

b) Soit $\alpha=\beta+\gamma i$ le nombre cherché et $a+bi$ et $a-bi$ les deux racines conjuguées.

L'équation s'écrit $\left[z-(a+bi)\right]\left[z-(a-bi)\right]=z^2-2az+a^2+b^2=0$

Donc $\begin{cases}2a=\alpha(1-i)\\ a^2+b^2=2\alpha-2i\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a=(\beta+\gamma i)(1-i)\\ a^2+b^2=2(\beta+\gamma i)-2i\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a=\beta+\gamma+(-\beta+\gamma)i\\ a^2+b^2=2\beta+2(\gamma-1)i\end{cases}$

Ce qui permet d'écrire : $\begin{cases}2a=\beta+\gamma\\ -\beta+\gamma=0\\ a^2+b^2=2\beta\\ \gamma-1=0\end{cases} \Rightarrow a=b=\beta=\gamma=1 \Rightarrow \boxed{\alpha=1+i}$

Vérification :

Si $\alpha=1+i$, l'équation devient $x^2-2x+2=0$ dont les racines sont $1-i$ et $1+i$

Le 7 novembre 2019