Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 61

EXALG610 – EXALG619

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Novembre 2019

EXALG610 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2019.

Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $0 \le p \le n$, on a

$$\sum_{i=0}^{p} C_n^i C_{n-i}^{p-i} = 2^p C_n^p \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_n^i C_{n-i}^{p-i} = 2^p C_n^p = 0.$$

Suggestion . On montrera d'abord que $C_n^i C_{n-i}^{p-i} = C_p^i C_n^p$, pour tous naturels i, p, n tels que $i \le p \le n$.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf

Solution. La formule

$$C_u^k = \frac{u!}{k!\,(u-k)!}$$

permet le développement suivant:

$$C_n^i C_{n-i}^{p-i} = \frac{n!\,(n-i)!}{i!\,(n-i)!\,(p-i)!\,(n-p)!} = \frac{n!\,p!}{i!\,p!\,(p-i)!\,(n-p)!} = \frac{p!\,n!}{i!\,(p-i)!\,p!\,(n-p)!} = C_p^i C_n^p.$$

Ce développement permet de réduire les inégalités à démontrer à:

$$\sum_{i=0}^{p} C_p^i C_n^p = 2^p C_n^p \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i C_n^p = 0,$$

puis, en divisant chaque fois les deux membres par C_n^p, à:

$$\sum_{i=0}^{p} C_p^i = 2^p \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i = 0.$$

Ces dernières égalités s'obtiennent à partir de la formule de Newton:

$$\sum_{i=0}^{p} C_p^i x^i = (1+x)^p,$$

en remplaçant x par 1 pour obtenir l'égalité de gauche, et par -1 pour obtenir celle de droite.

Le 7 novembre 2019

EXALG611 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2019.

On considère l'expression suivante, dans laquelle n est un paramètre entier naturel:

$$\frac{\left(2+i\sqrt{12}\right)^{7}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{n}}$$

On demande sa valeur, sous forme algébrique et sous forme trigonométrique, quand n vaut 16 et quand n vaut 17.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf

Solution. En notant que $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, on voit que le numérateur de la fraction peut s'écrire $(4\,\text{cis}\,[\pi/3])^7$ et le dénominateur peut s'écrire $(2\,\text{cis}\,[-\pi/6])^n$. Le nombre lui-même peut donc s'écrire

$$2^{14-n}\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{3}+\frac{n\pi}{6}\right) = 2^{14-n}\,\text{cis}\left(\frac{(14+n)\pi}{6}\right).$$

Pour $n = 16$, ce nombre peut s'écrire $2^{-2}\text{cis}\,(5\pi) = \dfrac{\text{cis}\,(\pi)}{4} = -\dfrac{1}{4}$.
Pour $n = 17$, ce nombre peut s'écrire:

$$2^{-3}\,\text{cis}\left(\frac{31\pi}{6}\right) = 2^{-3}\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}+i}{16}.$$

Le 7 novembre 2019

EXALG612 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2019.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante, dans laquelle m est un paramètre réel:

$$\frac{1}{x-2}=\frac{2-m}{7x-2x^2-6}$$

Résoudre ensuite l'inéquation associée, obtenue en remplacant le symbole "$=$" par le symbole "$\leq$".

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf

Solution. On observe d'abord que l'équation peut se réécrire en

$$\frac{1}{x-2}=\frac{m-2}{(x-2)(2x-3)}.$$

et que son domaine d'existence est $D=\mathbb{R}\setminus\{3/2,\ 2\}$. Dans ce domaine, l'équation peut se simplifier en $2x-3=m-2$, dont l'unique solution est $x=(m+1)/2$, si cette valeur appartient au domaine D, et donc si $m\notin\{2,3\}$. Pour $m=2$ comme pour $m=3$, l'équation n'admet pas de solution.

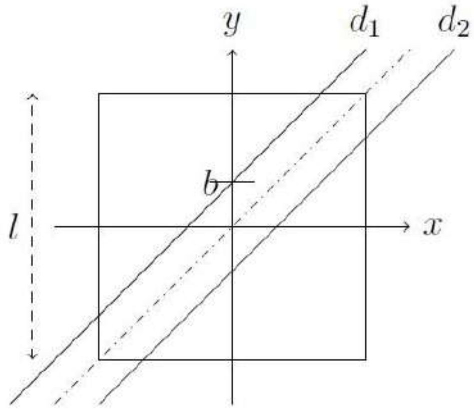
Pour l'inéquation associée, le même domaine d'existence s'applique. Les points $x=3/2$, $x=2$ et $x=(m+1)/2$ déterminent sur la droite réelle des intervalles dans lesquels l'inéquation est ou n'est pas vérifiée. Si S désigne l'ensemble des solutions de l'inéquation, on a les résultats suivants:

- Si $m<2$, alors $S=\left]-\infty:\frac{m+1}{2}\right]\ \cup\ \left]\frac{3}{2}:2\right[$;
- Si $m=2$, alors $S=\left]-\infty:\frac{3}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{3}{2}:2\right[$;
- Si $2<m<3$, alors $S=\left]-\infty:\frac{3}{2}\right[\ \cup\ \left[\frac{m+1}{2}:2\right[$;
- Si $m=3$, alors $S=\left]-\infty:\frac{3}{2}\right[$;
- Si $m>3$, alors $S=\left]-\infty:\frac{3}{2}\right[\ \cup\ \left]2:\frac{m+1}{2}\right]$.

Le 7 novembre 2019

EXALG613 – Polytech, UMons, Mons, 2017, juillet.

Soit un carré de côté *l* centré à l'origine, dans le plan *xy*.
Soient deux droites d_1 et d_2 de pente égale à +1 et situées symétriquement par rapport à la diagonale du carré.
Que doit valoir *b* (ordonnée du point d'intersection entre d_1 et l'axe *y*), afin que d_1 et d_2 divisent le carré en 3 surfaces égales ?



Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

Notons
- A_1 l'aire au-dessus de la droite d_1, d'équation $y = x + b$.
- A_2 l'aire entre les deux droites.
- A_3 l'aire en-dessous de la droite d_2, d'équation $y = x - b$.

Par symétrie, nous avons directement que $A_1 = A_3$.
A_1 est l'aire d'un triangle isocèle rectangle de côté $(l - b)$:

$$A_1 = \frac{1}{2}.(l-b)^2$$

Pour que $A_1 = A_2 = A_3$, il faut que $A_1 = \frac{1}{3}.\text{Aire}_{\text{carré}}$. Il faut donc que

$$\frac{1}{2}.(l-b)^2 = \frac{1}{3}.l^2$$
$$3.\left(l^2 - 2lb + b^2\right) = 2.l^2$$
$$3b^2 - 6bl + l^2 = 0$$

Puisque $\rho = 36.l^2 - 4.3.l^2 = 24.l^2 > 0$, on a deux solutions possibles

$$b_1 = \frac{6l - 2\sqrt{6}l}{6} = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right).l$$
$$b_2 = \frac{6l + 2\sqrt{6}l}{6} = \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right).l$$

Mais évidemment, b doit rester inférieure à l, ce qui serait la valeur du paramètre si d_1 passait par le coin supérieur gauche du carré. On ne retient donc que la première valeur.

$$b = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right).l$$

Le 1/03/2020

EXALG614 – Polytech, UMons, Mons, 2014, juillet.

Résoudre l'inégalité suivante :

$$\log_{f(x)}(3x-1) + \log_{g(x)}\sqrt{3x-1} \le \ln(mx+1)$$

avec m un paramètre réel, et

$$f(x) = e^x,\ g(x) = e^{\frac{x}{4x-2}}$$

Discutez en fonction de m.

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

Les conditions d'existence s'écrivent :

$$\begin{aligned}
&f(x) \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \Rightarrow x \neq 0\\
&g(x) \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \Rightarrow \frac{x}{4x-2} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0\\
&4x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}\\
&3x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}\\
&mx+1 > 0 \Rightarrow x > \frac{-1}{m}
\end{aligned}$$

Nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
&\frac{\ln(3x-1)}{\ln e^x} + \frac{\ln(3x-1)^{\frac{1}{2}}}{\ln e^{\frac{x}{4x-2}}} \le \ln(mx+1)\\
&\frac{1}{x}\ln(3x-1) + \frac{4x-2}{x}\ln(3x-1)^{\frac{1}{2}} \le \ln(mx+1)\\
&\ln(3x-1)^{\frac{1}{x}} + \ln(3x-1)^{\frac{1}{2}\frac{4x-2}{x}} \le \ln(mx+1)\\
&\ln\left[(3x-1)^{\frac{1}{x}}(3x-1)^{\frac{1}{2}\frac{4x-2}{x}}\right] \le \ln(mx+1)\\
&\ln(3x-1)^{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{4x-2}{x}\right)} \le \ln(mx+1)\\
&\ln(3x-1)^2 \le \ln(mx+1)\\
&(3x-1)^2 \le mx+1\\
&9x^2+1-6x \le mx+1\\
&9x^2-(m+6)x \le 0\\
&x(9x-(m+6)) \le 0
\end{aligned}$$

Les racines de $x(9x-(m+6))$ sont $x=0$ et $x=\frac{m+6}{9}$. Dès lors, les solutions de $x(9x-(m+6)) \le 0$ sont données par :

$$\begin{aligned}
&x \in \left[0, \frac{m+6}{9}\right] \text{ si } \frac{m+6}{9} > 0 \text{ c.à.d. si } m > -6\\
&x \in \left[\frac{m+6}{9}, 0\right] \text{ si } \frac{m+6}{9} < 0 \text{ c.à.d. si } m < -6\\
&x = 0 \text{ si } m = -6
\end{aligned}$$

En tenant compte de la quatrième condition d'existence :

$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{m+6}{9}\right] \text{ si } \frac{m+6}{9} > \frac{1}{3} \text{ c.à.d. si } m > -3$$

En appliquant $m > -3$, la dernière condition d'existence, on trouve $x > \frac{1}{3}$ et elle est donc respectée. Si $m \leq -3$, l'inégalité ne possède pas de solution.

Finalement, en prenant aussi en compte la troisième condition, on trouve :

$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \frac{m+6}{9}\right] \text{ si } \frac{m+6}{9} > \frac{1}{2} \text{ c.à.d. si } m > \frac{-3}{2}$$
$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{m+6}{9}\right] \text{ si } \frac{m+6}{9} < \frac{1}{2} \text{ c.à.d. si } m < \frac{-3}{2}$$
$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[\text{ si } \frac{m+6}{9} = \frac{1}{2} \text{ c.à.d. si } m > \frac{-3}{2}$$

En conclusion :

Si $m \leq -3$, il n'y a pas de solution.
Si $m > -\frac{3}{2}$:

$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \frac{m+6}{9}\right]$$

Si $-3 < m < -\frac{3}{2}$:

$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{m+6}{9}\right]$$

Si $m = -\frac{3}{2}$:

$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$$

Le 1/03/2020

EXALG615 – Polytech, UMons, Mons, 2015.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2xy - y^2 - 5y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

En factorisant :

$$\begin{cases} y(2x - y - 5) = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

La première équation donne deux cas :

1. $y = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x = 3$ ou $x = 1$
2. $y \neq 0 \iff \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 2x - 5 = x^2 - 4x + 3 \iff x^2 - 6x + 8 = 0 \iff (x = 4, y = 3) \text{ ou } (x = 2, y = -1) \end{cases}$$

On obtient donc les solutions suivantes

$$\{(1,0); (3,0); (4,3); (2,-1)\}$$

Le 1/03/2020

EXALG616 - Polytech, UMons, Mons, 2015.

Résoudre le système d'équations suivant dans les réels :

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = 2m \\ mx - m^2 y + mz = 2m \\ mx + y - m^2 z = 1 - m \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^2 \end{vmatrix} = m(m-1)(m+1)(1+m^2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2m & -m & m^2 \\ 2m & -m^2 & m \\ 1-m & 1 & -m^2 \end{vmatrix} = m^2(m-1)(m^2+3)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2m & m^2 \\ m & 2m & m \\ m & 1-m & -m^2 \end{vmatrix} = -m(m+1)(m-1)^2$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -m & 2m \\ m & -m^2 & 2m \\ m & 1 & 1-m \end{vmatrix} = 2m(m-1)(1+m^2)$$

Discussion

- $m = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

On tire : $x = 0$ et $y = 1$.
L'ensemble des solutions est $\{(0, 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

- $m = 1$

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

La première équation est redondante. En additionnant les deux suivantes, on tire :

$$x = 1 \qquad \text{et} \qquad z = y + 1.$$

L'ensemble des solutions est $\{(1, \alpha, \alpha + 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

- $m = -1$

$$\begin{cases} x + y + z &= -2 \\ -x - y - z &= -2 \\ -x + y + z &= 2 \end{cases}$$

Les deux premières équations sont incompatibles. Le système n'a donc pas de solution dans ce cas.

- $m \neq 0, 1, -1$

Dans ce cas, la solution unique est :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{m(m^2+3)}{(m+1)(1+m^2)} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1-m}{1+m^2} \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{2}{m+1}.$$

Le 1/03/2020

EXALG617- Polytech, UMons, Mons, 2015.

Soit a un paramètre réel non nul, on vous demande de résoudre et discuter l'équation suivante :

$$(2ay-5).\left[2015\ ((a+2)x+4y-3)^2+1815(x+(a-1)\ y+3)^2\right]=0.$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université [**https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf**](https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf)

Pour le premier facteur :

$$2ay-5=0 \quad => \quad y=\frac{5}{2a}$$

Ce qui donne

$$S=S_1=\left\{\left(x,\frac{5}{2a}\right),x\in\mathbb{R}\right\}$$

Le deuxième facteur fournit un système de deux equations à deux inconnues. En effet, la somme de deux carrés ne peut être nulle que si chacun des deux nombres élevés au carré est nul.

$$\begin{cases}(a+2)\,x+4y=3\\ x+(a-1)\,y=-3\end{cases}$$

Le déterminant vaut $\mathcal{D}=a^2+a-6=(a-2)(a+3)$.

Si $a=2$,

$$\begin{cases}4\,x+4y=3\\ x+y=-3\end{cases}$$

Le système est impossible : $S_2=\phi$, $S=S_1$

Si $a=-3$,

$$\begin{cases}-x+4y=3\\ x-4y=-3\end{cases}$$

Le système est indéterminé : $S_2=\{(4x-3,x)\,,x\in\mathbb{R}\}$, $S=S_1\cup S_2$.

Si $a\neq\{2,-3\}$

$$\begin{cases}(a+2)\,x+4y=3\\ x+(a-1)\,y=-3\end{cases}$$

$S_2=\left\{\left(\frac{3}{a-2},\frac{-3}{a-2}\right)\right\}$, $S=S_1\cup S_2$

Le 1/03/2020

EXALG618 - Polytech, UMons, Mons, 2015.

Etudier dans $\mathbb{R}$ et en fonction du paramètre a le nombre et le signe des racines de l'équation :

$$x^2 - x\sqrt{2} + \ln\ a = 0$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

1) Conditions d'existence : $a > 0$

2) Les racines valent :

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4\ln a}}{2}$$

Les racines sont réelles pour

$$2 - 4\ln a \geq 0 \Rightarrow a \leq \sqrt{e}$$

Donc : $0 < a \leq \sqrt{e}$

3) Infos sur le signe des racines $\Rightarrow$ la somme S et le produit P des racines valent :

$S = \sqrt{2}$

$P = \ln a$

$\Rightarrow P < 0$ pour $x \in]0, 1[$
$\Rightarrow P \geq 0$ pour $x \in [1, \sqrt{e}]$

Il en résulte que :

a) Si $0 < a < 1$: $S > 0$ et $P < 0 \Rightarrow$ 2 racines de signes opposés

b) Si $a = 1$: $S > 0$ et $P = 0 \Rightarrow$ les deux racines valent $x_1 = 0$ et $x_2 = \sqrt{2}$

c) Si $1 < a < \sqrt{e}$: $S > 0$ et $P > 0 \Rightarrow$ 2 racines positives

d) Si $a = \sqrt{e} \Rightarrow$ racines doubles $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Le 1/03/2020

EXALG619 - Polytech, UMons, Mons, 2015.

Discuter du domaine de définition de $f(x)$ en fonction du paramètre k :

$$f(x)=\sqrt{\ln\left(\frac{kx^2+2x+e}{ex+e}\right)}$$

N.B. : e ≈ 2; 7

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

Conditions d'existence :

$$x \neq -1 \quad \text{et} \quad \frac{kx^2+2x+e}{ex+e} \geq 1$$

$\boxed{\text{Si } x > -1}$

$$kx^2+2x+e \geq ex+e$$
$$kx^2+(2-e)\,x \geq 0$$
$$x\,(kx+(2-e)) \geq 0$$

– Si $k > 0$:

	0		$\frac{e-2}{k}$	
+	0	-	0	+

$$\to \operatorname{dom} f =]-1,0] \cup \left[\tfrac{e-2}{k}, \infty\right[$$

– Si $k < 0$:

	$\frac{e-2}{k}$		0	
-	0	+	0	-

$$\to \operatorname{dom} f = [\alpha, 0] \ \text{ avec } \alpha = \max\left(-1, \tfrac{e-2}{k}\right)$$

– Si $k = 0$:

$$x(2-e) \geq 0 \qquad \to \operatorname{dom} f =]-1,0]$$

$\boxed{\text{Si } x < -1}$

$$x\left(kx + (2-e)\right) \leq 0$$

- Si $k > 0$:

	0		$\frac{e-2}{k}$	
$+$	0	-	0	$+$

$$\rightarrow \text{dom} f = \varnothing \ (\text{car } x < -1)$$

- Si $k < 0$:

	$\frac{e-2}{k}$		0	
-	0	$+$	0	-

$$\rightarrow \text{dom} f = \left]-\infty, \beta\right] \ \text{avec } \beta = \min\left(-1, \tfrac{e-2}{k}\right)$$

- Si $k = 0$:

$$x(2-e) \leq 0 \qquad \rightarrow \text{dom} f = \varnothing \ (\text{car } x < -1)$$

Au final :
- $k = 0 \rightarrow \text{dom} f = \left]-1, 0\right]$
- $k > 0 \rightarrow \text{dom} f = \left]-1, 0\right] \cup \left[\frac{e-2}{k}, \infty\right[$
- $k < 0 \rightarrow \text{dom} f = \left]-\infty, \beta\right] \cup \left[\alpha, 0\right]$