Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 62

EXALG620 – EXALG629

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Mars 2020

EXALG620 – Polytech, UMons, Mons, 2015.

Soit $P(x)$, le polynôme ax^2+bx-4. Le reste de la division de ce polynôme par $(x-1)$ vaut 12. Sachant que ce polynôme est divisible par $(x+2)$, calculez a, b et les racines de $P(x)$.

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

Puisque le reste de la division de $P(x)$ par $(x-1)$ vaut 12, on peut écrire :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)\,Q(x)+12 && (1)\\ P(1) &= 12 && (2)\\ a+b-4 &= 12 && (3)\\ a+b &= 16 && (4) \end{aligned}$$

$P(x)$ étant divisible par $(x+2)$, on a :

$$\begin{aligned} P(-2) &= 0 && (5)\\ 4a-2b-4 &= 0 && (6)\\ 2a-b &= 2 && (7) \end{aligned}$$

En additionnant (4) et (7), on obtient :

$$\begin{aligned} 3a &= 18\\ a &= 6 \end{aligned}$$

On déduit alors que $b = 10$.

La première racine $x = -2$ est donnée dans l'énoncé. La division du polynôme $P(x)$ par $(x+2)$ donne $(6x-2)$. La seconde racine est donc $x = \frac{1}{3}$.

Le 1/03/2020

EXALG621 – Polytech, UMons, Mons, 2016.

Déterminez les deux côtés (x, y) de l'angle droit d'un triangle rectangle dont on connait le périmètre $2p$ et l'aire a^2.

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

Le périmètre (en utilisant Pythagore) et l'aire d'un triangle rectangle s'expriment par :

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2p \tag{9}$$

$$\frac{x\,y}{2} = a^2 \tag{10}$$

Le développement de (1), en utilisant l'équation (2), donne :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2p - x - y)^2 && (11)\\ &= 4p^2 - 4px - 4py + 2xy + x^2 + y^2 && (12)\\ &= 4p^2 - 4px - 4py + 4a^2 + x^2 + y^2 && (13) \end{aligned}$$

ce qui mène à :

$$4p^2 - 4px - 4py + 4a^2 = 0 \tag{14}$$

$$x + y = \frac{a^2 + p^2}{p} \tag{15}$$

On peut résoudre le système d'équations de 2 manières.

Méthode 1

Les équations (2) et (7) correspondent au produit $\mathcal{P}$ et à la somme $\mathcal{S}$ des 2 cotés x et y

$$\mathcal{S} = x + y = \frac{a^2 + p^2}{p} \tag{16}$$

$$\mathcal{P} = x\,y = 2\,a^2 \tag{17}$$

On en déduit que x et y sont les solutions de l'équation

$$r^2 - \mathcal{S}r + \mathcal{P} = 0 \tag{18}$$

Il vient donc :

$$\rightarrow x, y = r_{1,2} = \frac{\frac{a^2+p^2}{p} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2+p^2}{p}\right)^2 - 8a^2}}{2} \tag{19}$$

Méthode 2

En injectant (2) dans (7), on obtient une équation en x :

$$x + \frac{2a^2}{x} = \frac{a^2 + p^2}{p} \tag{20}$$

$$x^2 - \frac{a^2 + p^2}{p} x + 2a^2 = 0 \qquad (x \neq 0) \tag{21}$$

On en déduit deux valeurs possibles pour x :

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{\frac{a^2+p^2}{p} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2+p^2}{p}\right)^2 - 8a^2}}{2} \tag{22}$$

En utilisant (7), on obtient les 2 valeurs de y correspondantes :

$$\rightarrow y_{1,2} = \frac{a^2 + p^2}{p} - x_{1,2} = \frac{\frac{a^2+p^2}{p} \mp \sqrt{\left(\frac{a^2+p^2}{p}\right)^2 - 8a^2}}{2} = x_{2,1} \tag{23}$$

On observe que les deux couples de solution $(x_1, y_1)\,[= (x1, x2)]$ et $(x_2, y_2)\,[= (x2, x1)]$ sont identiques. La valeur des côtés x et y correspondent donc aux expressions x_1 et x_2 donnés par (14).

Discussion et commentaires

a) Il existe une solution au problème si

$$\left(\frac{a^2 + p^2}{p}\right)^2 \geq 8a^2 \tag{24}$$

On vérifie également que les valeurs obtenues pour les longueurs x et y sont bien positives.

b) On observe que $x{=}y$ (triangle rectangle isocèle) si

$$\left(\frac{a^2 + p^2}{p}\right)^2 = 8a^2 \tag{25}$$

c) On peut vérifier l'exactitude des équations (11) et (14) avec, par exemple, $x = 3$ et $y = 4$.

$\rightarrow$Dans ce cas, $z = 5$, $2p = 3 + 4 + 5 = 12$ et $a^2 = 3.4/2 = 6$.

EXALG622 – Polytech, UMons, Mons, 2016.

En fonction du paramètre a, résoudre l'inéquation suivante

$$\frac{\sqrt{x^3(x-1)}}{x} \leq a$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

Les conditions d'existence sont les suivantes : $x^3(x-1) \geq 0$ et $x \neq 0$.

		0		1	
x^3	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	-
$x^3(x-1)$	+	0	-	0	+

Ce qui donne finalement : $x < 0$ ou $x \geq 1$.

Cas $\boxed{x < 0}$

Comme $\frac{\sqrt{x^3\ (x-1)}}{x} < 0$, l'inéquation est toujours vérifiée si $a \geq 0$.

Si $a < 0$, nous avons que $-\frac{\sqrt{x^3\ (x-1)}}{x} \geq -a$ avec les deux termes de l'inéquation strictement positifs. En élevant ces termes au carré, nous obtenons la condition suivante : $x^2 - x - a^2 \geq 0$.

Ce qui implique : $x \leq \frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}$ ou $x \geq \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$
Comme $x < 0$, nous avons que $x \in]-\infty, \frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}]$.
Cas $\boxed{x \geq 1}$

Comme $\frac{\sqrt{x^3\ (x-1)}}{x} \geq 0$, l'inéquation n'est jamais vérifiée si $a < 0$.

Si $a \geq 0$, nous avons que $\frac{\sqrt{x^3\ (x-1)}}{x} \leq a$ avec les deux termes de l'inéquation positifs. En élevant ces termes au carré, nous obtenons la condition suivante : $x^2 - x - a^2 \leq 0$.

Ce qui implique : $\frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$
Comme $x \geq 1$, nous avons que $1 \leq x \leq \frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}]$.

En conclusion :
$a \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty, 0[\cup [1, \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}]$

$a < 0 \Rightarrow x \in]-\infty, \frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}]$

Le 1/03/2020

EXALG623 – Polytech, UMons, Mons, 2016.

Soit une usine d'embouteillage d'eau plate et d'eau gazeuse, où 84 palettes de bouteilles d'eau d'un litre sont produites par jour. L'usine dispose de deux chaînes d'embouteillage, une pour l'eau plate (chaîne 1) et l'autre pour l'eau gazeuse (chaîne 2).
Les vitesses de production des deux chaînes sont différentes mais constantes au cours du temps et ces dernières fonctionnent durant le même laps de temps.
On vous demande de déterminer le nombre de palettes d'eau plate et d'eau gazeuse sortantes sachant que si les chaînes d'embouteillage étaient « inversées », il faudrait 1/3 de temps en plus pour embouteiller l'eau gazeuse et 1/4 de temps en moins pour embouteiller l'eau plate.

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

Soient :
- n_A : le nombre de palettes d'eau plate produites par jour
- n_B : le nombre de palettes d'eau gazeuse produites par jour
- v_1 : la vitesse d'embouteillage de la chaîne 1
- v_2 : la vitesse d'embouteillage de la chaîne 2

On a :

$$n_A + n_B = 84 \tag{1}$$

On peut écrire :

$$\frac{n_A}{v_2} = \frac{3}{4}t \tag{2}$$

$$\frac{n_B}{v_1} = \frac{4}{3}t \tag{3}$$

De plus, les temps de fonctionnement t sont égaux :

$$t = \frac{n_A}{v_1} = \frac{n_B}{v_2} \tag{4}$$

De (1), on tire :

$$n_B = 84 - n_A \tag{5}$$

En remplaçant (5) dans (4), on a :

$$\frac{n_A}{v_1} = \frac{84 - n_A}{v_2} \tag{6}$$

On remplace v_1 et v_2 par leur expression dans (6) :

$$\frac{n_A}{\frac{(84-n_A)}{\frac{4}{3}t}} = \frac{(84 - n_A)}{\frac{(n_A)}{\frac{3}{4}t}} \tag{7}$$

Comme $n_A > 0$, une seule racine est possible :

$$\begin{aligned} n_A =& \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ =& \frac{(-2 \times 9 \times 84) + (24 \times 84)}{14} \\ =& 36 \end{aligned}$$

- $n_A = 36$ palettes d'eau plate embouteillées par jour
- $b_B = 48$ palettes d'eau gazeuse embouteillées par jour

Le 1/03/2020

EXALG624 – Polytech, UMons, Mons, 2016.

Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{x^2}{\left(x+1-\sqrt{x+1}\right)^2}<\frac{x^2+3x+18}{(x+1)^2}$$

Suggestion : dans la résolution, poser $y=\sqrt{x+1}$

Nous reprenons la solution proposée par l'université **https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf**

Conditions d'existence :

- $x+1>0 \to x>-1$
- $x+1\neq 0 \to x\neq -1$
- $x+1-\sqrt{x+1}\neq 0 \Leftrightarrow x^2+x\neq 0 \to x\neq 0$ et $x\neq -1$

On a donc : $x\in\,]-1,0[\,\cup\,]0,\infty[$

Posons $y=\sqrt{x+1}$. Nous déduisons $x=y^2-1$ et l'inéquation s'écrit :

$$\frac{(y^2-1)^2}{(y^2-y)^2}<\frac{(y^2-1)^2+3(y^2-1)+18}{y^4}$$

avec $y\in\,]0,1[\,\cup\,]1,\infty[$

$$\begin{aligned}\frac{(y+1)^2}{y^2}&<\frac{y^4+y^2+16}{y^4}\\(y+1)^2y^2&<y^4+y^2+16\\2y^3&<16\end{aligned}$$

Vu le domaine de y, $2y^3<16$ est satisfaite avec $y<2$. Autrement dit, on a :

$y\in\,]0,1[\,\cup\,]1,2[$ et $x\in\,]-1,0[\,\cup\,]0,3[$.

Le 1/03/2020

EXALG625 – Polytech, UMons, Mons, 2016.

Résoudre l'équation suivante :

$$|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

5 cas sont à considérer :

Cas 1 : $x \leq -1$

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x+1) + x - 3(x-1) + 2(x-2) - (x+2) \\ &= -2x - 4 \end{aligned}$$

La racine est $x = -2$ qui répond à la condition $x \leq -1$

Cas 2 : $-1 \leq x \leq 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1) + x - 3(x-1) + 2(x-2) - (x+2) \\ &= -2 \end{aligned}$$

Il n'y a pas de solution.

Cas 3 : $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1) - x - 3(x-1) + 2(x-2) - (x+2) \\ &= -2x - 2 \end{aligned}$$

La racine est $x = -1$ qui ne peut être acceptée étant donné la condition $0 \leq x \leq 1$.

Cas 4 : $1 \leq x \leq 2$

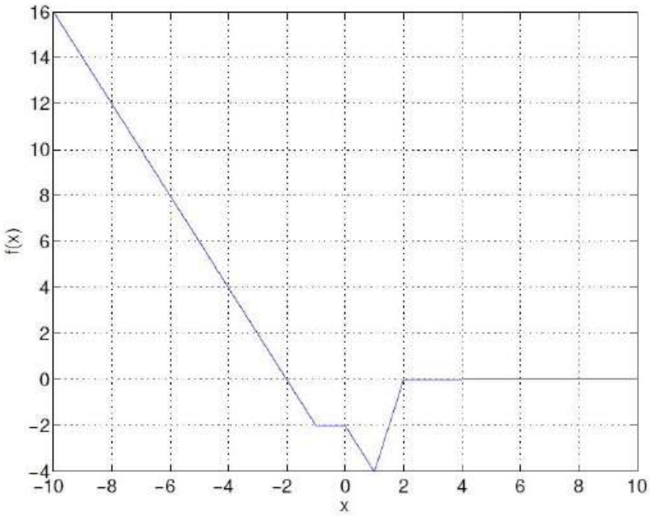
$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1) - x + 3(x-1) + 2(x-2) - (x+2) \\ &= 4x - 8 \end{aligned}$$

La racine est $x = 2$ qui répond à la condition $1 \leq x \leq 2$.

Cas 5 : $x \geq 2$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1) - x + 3(x-1) - 2(x-2) - (x+2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'équation admet une infinité de solutions pour $x \geq 2$.



EXALG626 - Polytech, UMons, Mons, 2017, juillet.

Sans calculer le déterminant, identifier $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 3 & a(a-1) & 6 \\ 4 & 15 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

Si le déterminant est nul, c'est que l'une de ses colonnes peut s'exprimer à partir des autres. Par exemple, on peut considérer que la colonne 2 s'exprime comme la somme pondérée des colonnes 1 et 3. On a donc que

$$\begin{aligned} 2.x + 5.y &= 9 \\ 3.x + 6.y &= a(a-1) \\ 4.x + 7.y &= 15 \end{aligned}$$

Si on somme les lignes 1 et 3, on obtient

$$6.x + 12.y = 24 \quad \Longleftrightarrow \quad 3.x + 6.y = 12$$

En comparant avec la ligne 2, on peut donc dire que $a(a-1) = 12$. En résolvant l'équation du second degré en a, on obtient $a = -3$ ou $a = 4$.

Le 1/03/2020

EXALG627- Polytech, UMons, Mons, 2017, juillet.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante

$$\log_{1/2}\left(2x-13+\frac{15}{x}\right)<1+\log_{1/2}\left(2\left(x-15\right)\right)$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

Les conditions d'existence sont

1. pour le membre de gauche, $2x-13+\frac{15}{x}>0$, autrement dit $(x-5)(x-\frac{3}{2})>0$, donc $x<\frac{3}{2}$ ou $x>5$,
2. pour le membre de droite, $x>15$,

L'intersection de ces conditions donne $x>15$.
L'inégalité peut s'écrire

$$\log_{1/2}\left(2x-13+\frac{15}{x}\right)<\log_{1/2}(\frac{1}{2})+\log_{1/2}\left(2(x-15)\right),$$

ou encore

$$\log_{1/2}\left(2x-13+\frac{15}{x}\right)<\log_{1/2}\left(\frac{1}{2}2(x-15)\right).$$

Puisque $\log_{1/2}a=\frac{\ln a}{\ln \frac{1}{2}}$, et que $\ln(1/2)<0$, cela équivaut à

$$\ln\left(2x-13+\frac{15}{x}\right)>\ln(x-15).$$

On en déduit que

$$2x-13+\frac{15}{x}>x-15$$

ce qui implique $x^2+2x+15>0$, qui est toujours vérifié.
Au final on trouve donc $x\in\,]15,+\infty[$.

Le 1/03/2020

EXALG628 - Polytech, UMons, Mons, 2017, juillet.

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

---

Le 1/03/2020

EXALG629 - Polytech, UMons, Mons, 2015.

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

---

Le 1/03/2020