Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 9

EXALG090 – EXALG091

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG090 – Bruxelles, juillet 2002.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter en fonction du paramètre réel a l'inéquation

$$\frac{2x}{a-2}+x<\frac{a-2}{2}$$

$$\frac{2x}{a-2}+x<\frac{a-2}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{a}{a-2}x<\frac{a-2}{2}$$

1) $\dfrac{a}{a-2}>0 \quad \rightarrow \quad a<0 \ ; \ \ a>2$

$\rightarrow \ \boxed{x<\dfrac{(a-2)^2}{2a}}$

2) $\dfrac{a}{a-2}<0 \quad \rightarrow \quad 0<a<2$

$\rightarrow \ \boxed{x>\dfrac{(a-2)^2}{2a}}$

EXALG091 – Bruxelles, juillet 2002.

Résoudre dans ℝ³ et discuter en fonction du paramètre réel a le système

$$\begin{cases} ax + y + \sqrt{2}z = 1 \\ x + ay + \sqrt{2}z = a^2 \\ \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & a & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(a-3) \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ a^2 & a & \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & a^2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1)(a-2) \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(a-1)(2a^2-a+1)$$

1) $a=1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x+y+\sqrt{2}z=1 \\ x+y+\sqrt{2}z=1 \\ \sqrt{2}x+\sqrt{2}y+z=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=-y \\ z=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

2) $a=3 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 3x+y+\sqrt{2}z=1 \\ x+3y+\sqrt{2}z=9 \\ \sqrt{2}x+\sqrt{2}y+z=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \rightarrow$ Impossible

3) Dans les autres cas : $\begin{cases} x=\dfrac{a+1}{a-3} \\ y=\dfrac{(a+1)(a-2)}{a-3} \\ z=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{2a^2-a+1}{a-3} \end{cases}$

EXALG092 – Louvain – Juillet 2000, série 1.

Soit *m* un paramètre réel. Discuter et résoudre, dans les nombres réels, le système d'équations que voici.

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=1\\ \sqrt{xy}=m-x-y\end{cases}$$

Conditions d'existence : $x\geq 0 \quad ; \quad y\geq 0 \quad ; \quad m\geq x+y$

Soit : $r=\sqrt{x}$ et $s=\sqrt{y}$. On a $r\geq 0$; $s\geq 0$

$$\to \begin{cases}r+s=1 \to s=1-r\\ rs=m-r^2-s^2\end{cases}$$

La deuxième équation devient : $r(1-r)=m-r^2-(1-r)^2$

$\to r^2-r-(m-1)=0$

Ce qui donne les solutions, avec la condition $m\geq \frac{3}{4}$

$$\begin{cases}r_1=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{4m-3}\right)\\ s_1=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{4m-3}\right)\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}r_2=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{4m-3}\right)\\ s_2=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{4m-3}\right)\end{cases}$$

Les solutions sont donc symétriques, ce que laissait prévoir la forme du système de départ. On se contente donc d'étudier r_1 et s_1.

$r_1 \to x=\frac{1}{2}\left(2m-1+\sqrt{4m-3}\right)$

$s_1 \to y=\frac{1}{2}\left(2m-1-\sqrt{4m-3}\right)$

Vérifions les conditions d'existence :

1) $x\geq 0 \to 2m-1\geq -\sqrt{4m-3}$ Toujours vérifié

2) $y\geq 0 \to 2m-1\geq \sqrt{4m-3} \to (m-1)^2\geq 0$ Toujours vérifié.

3) $m\geq x+y \to m\geq \frac{1}{2}\left(2m-1+\sqrt{4m-3}+2m-1-\sqrt{4m-3}\right)$

$\geq 2m-1$

$\to m\leq 1$

Conclusions : Racines réelles si $\frac{3}{4}\leq m\leq 1$

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}\left(2m-1+\sqrt{4m-3}\right)\\ y_1=\frac{1}{2}\left(2m-1-\sqrt{4m-3}\right)\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}x_2=\frac{1}{2}\left(2m-1-\sqrt{4m-3}\right)\\ y_2=\frac{1}{2}\left(2m-1+\sqrt{4m-3}\right)\end{cases}$$

EXALG093 – Louvain – Juillet 2000, série 1.

Déterminer le polynôme *P(x)* du troisième degré (ayant trois racines, réelles ou complexes) tels que

1) le coefficient de x^3 dans *P(x)* vaut 1
2) la somme des racines de *P(x)* vaut –3
3) la somme des carrés des racines de *P(x)* vaut 7
4) le produit des racines de *P(x)* vaut 5

Ensuite, déterminer toutes les raines réelles ou complexes de *P(x)*.

Le polynôme peut s'écrire :

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$
$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1\ x_2\ x_3$$

On en déduit le système : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 7 \\ x_1\ x_2\ x_3 = 5 \end{cases}$

Or : $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

$\rightarrow\ (-3)^2 = 7 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\ \rightarrow\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1$

Finalement : $P(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$

On voit immédiatement que 1 est solution donc :

Horner :

n	3	2	1	0
	1	3	1	–5
1		1	4	5
	1	4	5	0

$\rightarrow P(x) = (x-1)(x^2 + 4x + 5)$

Le facteur du second degré se résoud facilement:

$\rightarrow \boxed{P(x) = (x-1)(x+2-i)(x+2+i)}$

Modifié le 23 août 2009 (Johnny GERARD)

EXALG094 – Louvain – Juillet 2000, série 1.

Résoudre dans les réels l'équation :

$$\log\left(\log x\right)+\log\left(\log x^2-1\right)=1$$

où log représente le logarithme dans la base 10.

$$\text{CE : }\begin{cases}\log x>0 \;\rightarrow\; x>1\\ \log x^2-1>0 \;\rightarrow\; \log x>\dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; x>3.1622\end{cases}$$

L'équation devient :

$$\log\left[\log x\left(\log x^2-1\right)\right]=1$$

$$\rightarrow \log x\left(\log x^2-1\right)=10$$

$$\rightarrow 2\log^2 x-\log x-10=0$$

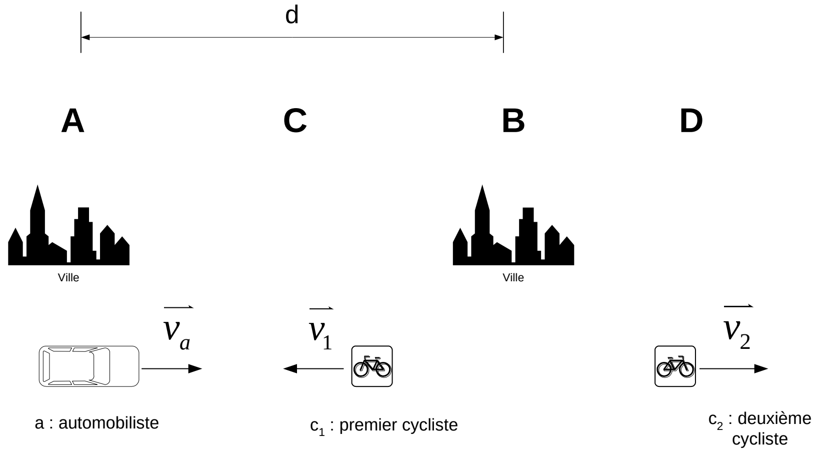
$$\rightarrow \begin{cases}\log x=2.5 \;\rightarrow\; x=316.23\\ \log x=-2 \;\rightarrow\; x=0.01 \quad \text{à rejeter.}\end{cases}$$

EXALG095 – Louvain – Juillet 2000, série 1.

Deux villes *A* et *B* sont distantes de *d* km. A un instant donné, un automobiliste quitte la ville A dans la direction de la ville B à la vitesse constante v_a et deux cyclistes quittent la ville *B*, le premier dans la direction de la ville *A* et le second dans l'autre direction. Leurs vitesses sont aussi considérées comme constantes et valent respectivement v_1 et v_2.

Le premier cycliste rencontre l'automobiliste au point *C* (entre *A* et *B*) et le second est rattrapé par cet automobiliste au point *D* (au delà de *B*). Déterminer les distances parcourues par l'automobiliste depuis son départ jusqu'aux deux points de rencontre.

On vous demande de mettre ce problème en équation, ensuite de le résoudre analytiquement, et enfin de calculer la valeur numérique de ces distances si d = 40 km,
v_a = 60 km/h, v_1 = 10 km/h, v_2=15 km/h.



a) Détermination du point C

Vitesse relative de a par rapport à $c_1 : \overrightarrow{v_{a1}} = \overrightarrow{v_a} + \overrightarrow{v_1}$

Le couple (a, c_1) parcourt la distance d en un temps : $t_{a1} = \dfrac{d}{\left|\overrightarrow{v_{a1}}\right|} = \dfrac{d}{\left|\overrightarrow{v_a}\right| + \left|\overrightarrow{v_1}\right|}$

La voiture parcourt pendant ce temps la distance AC

$$\rightarrow \; AC = \frac{\left|\overrightarrow{v_a}\right| d}{\left|\overrightarrow{v_a}\right| + \left|\overrightarrow{v_1}\right|} = \frac{60 \times 40}{60 + 10} = 34.285 \text{ km}$$

B) Détermination du point D

$AD = d + BD$

Soit t le temps mis pour l'automobiliste pour aller de A en D

(C'est aussi le temps que met le second cycliste pour aller de B en D)

$$t = \frac{AD}{\left|\overrightarrow{v_a}\right|} \quad \text{et} \quad t = \frac{BD}{\left|\overrightarrow{v_2}\right|} \quad \rightarrow \; \left|\overrightarrow{v_a}\right| t = d + \left|\overrightarrow{v_2}\right| t \; \rightarrow \; t = \frac{d}{\left|\overrightarrow{v_a}\right| - \left|\overrightarrow{v_2}\right|}$$

$$\rightarrow AD = \frac{\left|\overrightarrow{v_a}\right| d}{\left|\overrightarrow{v_a}\right| - \left|\overrightarrow{v_2}\right|} = \frac{60 \times 40}{60 - 15} = 53.333 \text{ km}$$

EXALG096 – Louvain – Juillet 2000, série 2.

Résoudre dans les nombres réels, l'inéquation que voici :

$$2^{\frac{x+2}{2}} - \sqrt{2^{x+1}-7} > 1 + 2^{\frac{x}{2}}$$

CE : $2^{x+1} \geq 7 \;\rightarrow\; x+1 \geq \dfrac{\ln 7}{\ln 2} \;\rightarrow\; x \geq 1.807$

$$2^{\frac{x+2}{2}} - \sqrt{2^{x+1}-7} > 1 + 2^{\frac{x}{2}} \;\rightarrow\; 2.2^{\frac{x}{2}} - 1 - 2^{\frac{x}{2}} > \sqrt{2^{x+1}-7}$$

$$\rightarrow\; 2^{\frac{x}{2}} - 1 > \sqrt{2^{x+1}-7} \;\rightarrow\; 2^{x} - 2.2^{\frac{x}{2}} + 1 > 2^{x+1} - 7$$

$$\rightarrow\; 2.2^{x} - 7 - 2^{x} + 2.2^{\frac{x}{2}} - 1 < 0 \;\rightarrow\; 2^{x} + 2.2^{\frac{x}{2}} - 8 < 0$$

$$\rightarrow\; \left(2^{\frac{x}{2}} - 2\right)\left(2^{\frac{x}{2}} + 4\right) < 0$$

Ce qui sera vérifié si : $-4 < 2^{\frac{x}{2}} < 2$

1) $2^{\frac{x}{2}} < 2 \;\rightarrow\; \dfrac{x}{2} < 1 \;\rightarrow\; x < 2$

2) $2^{\frac{x}{2}} > -4$ Toujours vérifié.

Conclusion : $\boxed{1.807 \leq x < 2}$

EXALG097 – Louvain – Juillet 2000, série 2.

Soit p un paramètre réel. Discuter et résoudre, dans les nombres complexes, l'équation suivante (où i désigne l'unité imaginaire).

$$(z-i)^4+p\left(z^2+1\right)^2=0$$

Donner les solutions sous la forme $a+bi$ (avec a et b réels)

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Transformation et factorisation de l'équation :

Notez que :

$$(z^2+1)^2=\left((z-i)(z+i)\right)^2=(z-i)^2(z+i)^2$$

L'équation (1) peut donc être écrite de façon équivalente comme :

$$(z-i)^4+p(z-i)^2(z+i)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (z-i)^2.\left((z-i)^2+p(z+i)^2\right)=0$$

Du premier facteur, on trouve les deux premières racines, qui sont indépendantes du paramètre p :

$$\boldsymbol{z_1=z_2=i}$$

Racines du deuxième facteur :

$$\begin{aligned}(z-i)^2+p(z+i)^2=0 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2-2iz-1+pz^2+2piz-p=0\\ &\Leftrightarrow \quad (p+1)z^2+2(p-1)iz-(p+1)=0 \qquad (2)\end{aligned}$$

Si $p=-1$, il s'agit d'une équation du premier degré dont la solution est $z_3=0$.

Si $p\neq-1$, l'équation (2) est du second degré en z. Son discriminant est :

$$\Delta=-4(p-1)^2+4(p+1)^2=16p \quad (\text{donc } \Delta\in\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\begin{cases}4\sqrt{p} & \text{si } p>0\\ 0 & \text{si } p=0\\ 4\sqrt{|p|}.i & \text{si } p<0\end{cases}$$

et $$z_{3,4}=\frac{-(p-1).i\pm\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}}{p+1}$$

Discussion des racines du deuxième facteur pour $p \neq -1$:

(1) $p > 0$: $\quad z_{3,4} = \frac{-(p-1).i \pm 2\sqrt{p}}{p+1} = \frac{\pm 2\sqrt{p}}{p+1} - i.\frac{p-1}{p+1}$

(2) $p = 0$: $\quad z_{3,4} = i$

(3) $p < 0$: $\quad z_{3,4} = \frac{-(p-1).i \pm 2\sqrt{|p|}.i}{p+1} = -i.\frac{p-1 \pm 2\sqrt{|p|}}{p+1}$

En particulier, si $p = +1$, les racines sont réelles et égales à $z_{3,4} = \pm 1$.

Résumé final :

(1) Si $\boldsymbol{p} > 0$, alors : $\quad (\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \boldsymbol{z_3}, \boldsymbol{z_4}) = \left(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}, \frac{\boldsymbol{2\sqrt{p}}}{\boldsymbol{p+1}} - \boldsymbol{i}.\frac{\boldsymbol{p-1}}{\boldsymbol{p+1}}, \frac{\boldsymbol{-2\sqrt{p}}}{\boldsymbol{p+1}} - \boldsymbol{i}.\frac{\boldsymbol{p-1}}{\boldsymbol{p+1}}\right)$

(2) Si $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$, alors : $\quad (\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \boldsymbol{z_3}, \boldsymbol{z_4}) = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i})$

(3) Si $\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{1}$, alors : $\quad (\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \boldsymbol{z_3}) = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{0})$

(4) Si $\boldsymbol{p} < 0$ **et** $\boldsymbol{p} \neq -\boldsymbol{1}$, alors : $\quad (\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \boldsymbol{z_3}, \boldsymbol{z_4}) = \left(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}, -\boldsymbol{i}.\frac{\boldsymbol{p-1+2\sqrt{|p|}}}{\boldsymbol{p+1}}, -\boldsymbol{i}.\frac{\boldsymbol{p-1-2\sqrt{|p|}}}{\boldsymbol{p+1}}\right)$

Modifié le 23 aout (Johnny GERARD). Modifié le 23 décembre 2011

EXALG098– Louvain – Juillet 2000, série 2.

Résoudre dans les réels l'équation :

$$\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}=\sqrt{x}$$

$$\text{CE} : \begin{cases} 1)\ x \geq -a \\ 2)\ x \leq a \\ 3)\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \ 0 \leq x \leq a \ \rightarrow a > 0$$

$$\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}=\sqrt{x} \ \rightarrow \ a+x-2\sqrt{a^2-x^2}+a-x=x$$

$$\rightarrow \ 2\sqrt{a^2-x^2}=2a-x \ \rightarrow \ 4\left(a^2-x^2\right)=4a^2-4ax+x^2$$

$$\rightarrow \ 5x^2-4ax=0 \ \rightarrow \ x\left(5x-4a\right)=0$$

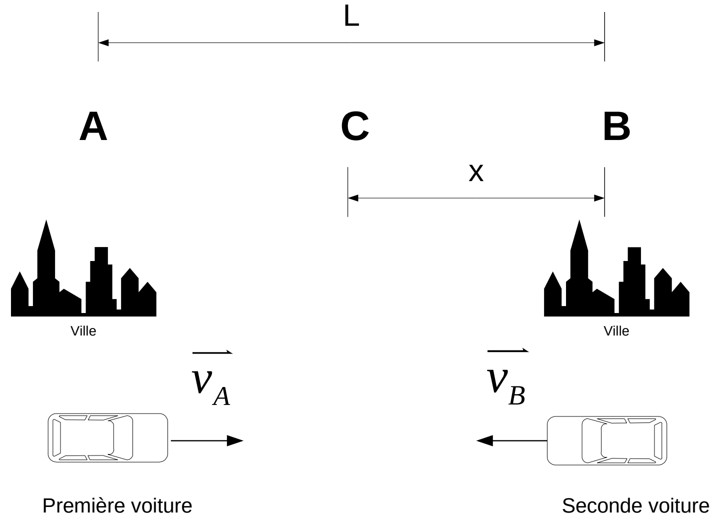
1) $x=0$

2) $5x-4a=0 \ \rightarrow \ x=\dfrac{4a}{5} \leq a$ donc solution acceptable (voir CE)

Modifié le 23 aout 2009 (Johnny Gérard)

EXALG099– Louvain – Juillet 2000, série 2.

Deux voitures quittent simultanément deux villes distantes de 210 km. La première voiture quitte la ville A vers la ville B, la seconde quitte la ville B vers la ville A. On considère que ces deux voitures se déplacent à vitesses constantes, non spécialement égales.
Ces voitures se croisent (se rencontrent) au moment où la première voiture a exactement roulé pendant deux heures. Il reste alors à la seconde voiture 8/9 h pour atteindre la ville A.
On vous demande de mettre ce problème en équation, ensuite de la résoudre analytiquement pour déterminer les vitesses des deux véhicules, et enfin de calculer la valeur numérique de ces vitesses en km/h.



Soient :

L la distance séparant les deux villes;

x la distance entre la ville B et le point de rencontre des voitures

t_A le temps où les voitures se rencontrent.

t_B le temps qu'il reste à la seconde voiture pour atteindre la ville A

$\left|\overrightarrow{v_A}\right|$ le module de la vitesse de la première voiture

$\left|\overrightarrow{v_B}\right|$ le module de la vitesse de la deuxième voiture

On a :

$$\begin{cases} x = t_A \left|\overrightarrow{v_B}\right| \\ L - x = t_A \left|\overrightarrow{v_A}\right| \\ L - x = t_B \left|\overrightarrow{v_B}\right| \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} \left|\overrightarrow{v_A}\right| = \dfrac{L}{t_A + t_B} \dfrac{t_B}{t_A} \\ \left|\overrightarrow{v_B}\right| = \dfrac{L}{t_A + t_B} \end{cases}$$

Avec les donnés présentes, cela donne : $\begin{cases} \left|\overrightarrow{v_A}\right| = 32.307\ km/h \\ \left|\overrightarrow{v_B}\right| = 72.692\ km/h \end{cases}$

Note : $x = 145.3846\ km$