Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 14

EXANA0140 – EXANA149

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot

Nov 2005

EXANA140 – ERM, 2003.

Calculer :

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x \sin x - \tan x}{\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} - 1\right)\sin x}$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x \sin x - \tan x}{\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} - 1\right)\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\cos^3 x \sin x - \sin x\right)\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} + 1\right)}{\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} - 1\right)\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} + 1\right)\cos x \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\cos^3 x - 1\right)\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} + 1\right)}{\sin^2 x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\cos x - 1\right)\left(\cos^2 x + \cos x + 1\right)\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} + 1\right)}{\left(1 - \cos^2 x\right)\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} - \frac{\left(\cos^2 x + \cos x + 1\right)\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} + 1\right)}{\left(1 + \cos x\right)\cos x} = -3$$

Résolu le 17 juillet 2005

EXANA141 – ERM, 2003.

Etudier la fonction

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to f(x)=\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$$

(Domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion asymptotes, représentation graphique)

---

1) dom $f=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

2) Zéros : $\begin{cases} x>1\to\dfrac{x}{x-1}=1\to \text{ pas de racine} \\ x<1\to\dfrac{x}{x-1}=-1\to x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

3) AV:

$a)$ $x=0$ avec $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=-\infty$

$b)$ $x=1$ avec $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=+\infty$

4) AH: $y=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

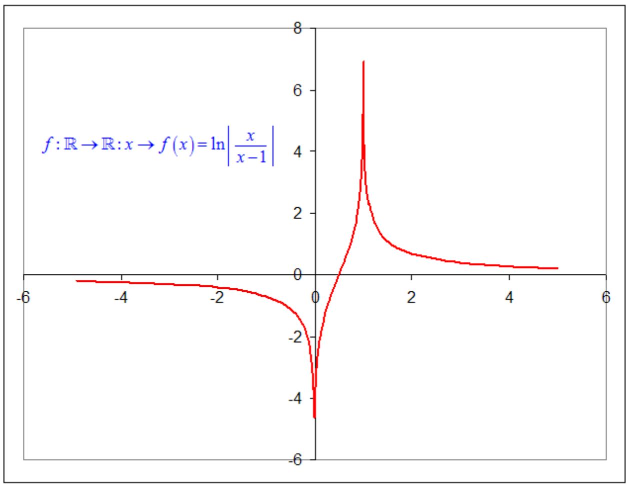
5) $f'(x)=-\dfrac{1}{x(x-1)}\to$

		0		1	
f'	$-$	/	$+$	/	$-$
f	↘	/	↗	/	↘

Il n'y a pas d'extremums

6) $f''(x)=\dfrac{2x-1}{x^2(x-1)^2}\to$ un point d'inflexion en $x=\dfrac{1}{2}$

$f''(x)$ a le signe de $2x-1\to x<\dfrac{1}{2}$ concavité négative et $x>\dfrac{1}{2}$ concavité positive



Résolu le 27 juillet 2005

EXANA142 – Liège, septembre 2005.

a) Soit la fonction $f(x) = e^{-\alpha x} + \beta x$ dépendant d'α et β réels avec $\alpha > 0$

- i) Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivation de *f*.
- ii) Déterminer les asymptotes éventuelles de *f*.
- iii) Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles *f* admet au moins un extremum. Donner la nature de l'extremum (ou des extrema).

b) Déterminer les conditions sur α et β pour que les graphes des fonctions $g(x) = e^{-\alpha x}$ et $h(x) = \beta x$ soient tangents au point d'abscisse $x = -1$.

---

a) i) - Aucune restriction sur le domaine : $dom\ f = \mathbb{R}$

- La fonction $g(x) = e^{-\alpha x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (exponentielle standard) et la fonction $h(x) = \beta x$ l'est aussi (droites pasant par l'origine). La somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Le domaine de continuité est donc $\mathbb{R}$.

- La dérivée de f est $f\,'(x) = -\alpha e^{-\alpha x} + \beta$, exponentielle standard sans restriction donc, le domaine de dérivation de f est $\mathbb{R}$.

ii) - Aucune asymptote verticale envisageable ($dom\ f\ :\ \mathbb{R}$).

- Pour observer une asymptote horizontale ou oblique, on utilise la méthode de Cauchy.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-\alpha x}+\beta x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-\alpha x}}{x} + \lim_{x\to\infty}\beta = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-\alpha x}}{x} + \beta \xrightarrow{Hospital} \lim_{x\to\infty}\frac{-\alpha e^{-\alpha x}}{1} + \beta = \beta$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty} e^{-\alpha x} + \beta x - \beta x = \lim_{x\to\infty} e^{-\alpha x} = 0$$

La fonction f admet donc une asymptote oblique d'équation . $y = \beta x$

iii) $f\,'(x) = -\alpha e^{-\alpha x} + \beta$. Elle admet un ou plusieurs extremum si elle s'annule.

Il faut donc $\alpha e^{-\alpha x} = \beta \Leftrightarrow e^{-\alpha x} = \dfrac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow -\alpha x = \ln\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{-1/\alpha}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{\sqrt[\alpha]{\alpha}}{\sqrt[\alpha]{\beta}}\right)$

Pour que cette valeur unique soit possible, sachant que $\alpha > 0$ (énoncé), il faut $\beta > 0$.

Pour voir la nature de l'extremum, on calcule la dérivée seconde en son point pour y étudier la concavité : $f\,''(x) = \alpha^2 e^{-\alpha x}$ est une exponentielle standard et donc toujours > 0. La concavité est donc partout vers le haut et la nature de notre extremum est donc en fait un minimum.

b) La fonction $h(x) = \beta x$ est une droite passant par l'origine et de coefficient angulaire β.

- Pour qu'elle soit tangente à $g(x) = e^{-\alpha x}$, par définition du nombre dérivée, il faut d'abord que $g\,'(-1) = \beta \Leftrightarrow -\alpha e^{-\alpha(-1)} = \beta \Leftrightarrow -\alpha e^{\alpha} = \beta \Leftrightarrow e^{\alpha} = -\dfrac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \ln\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$
- Pour qu'il y ait tangence, il faut maintenant que $g(-1) = h(-1) \Leftrightarrow e^{\alpha} = -\beta \Leftrightarrow \alpha = \ln(-\beta)$
- Pour que ces deux conditions soient possibles, il faut que $\alpha > 0$ et donc que $\beta < 0$.

Les seules valeurs correspondantes aux 2 conditions simultanées sont $\alpha = 1$ et donc $\beta = -e$.

Résolu le 14 septembre 2005. Steve Tumson

EXANA143 – Liège, septembre 2005.

a) Calculer $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$ et $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x dx$ et montrer que $A = B$.

b) Démontrer plus généralement, que, si f est continue sur [0, a],

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

Interpréter et justifier graphiquement cette propriété.

c) Utiliser la propriété b) pour transformer l'expression

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Calculer ensuite I_n et vérifier avec $n = 2$.

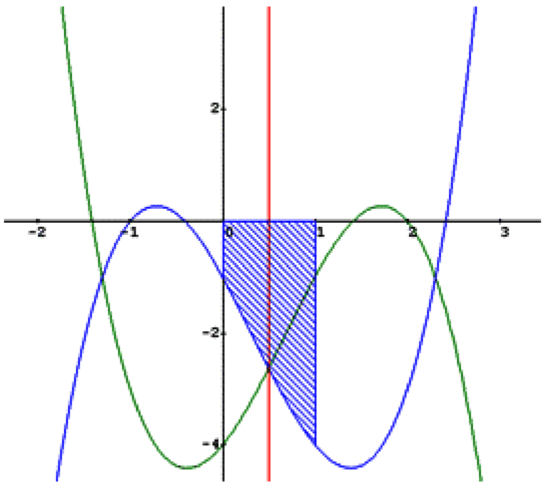
- Par parties : $\begin{array}{l} f = x \quad \rightarrow f' = dx \\ g' = \sin x \rightarrow g = -\cos x \end{array}$

$$\rightarrow A = [-x \cos x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos x dx = 0 + [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$$

- Par parties : $\begin{array}{l} f = \frac{\pi}{2} - x \rightarrow f' = -dx \\ g' = \cos x \rightarrow g = \sin x \end{array}$

$$\rightarrow B = \left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\sin x dx = 0 - [\cos x]_0^{\pi/2} = 1$$

Il est donc évident que $A = B$



Ce qui lie une fonction $f(x)$ et une fonction $f(a-x)$ est clairement une symétrie axiale d'axe $x=\frac{a}{2}$. On trouve ce résultat facilement grâce aux opérations usuelles sur les fonctions.

A partir de cela, cette symétrie nous permet d'écrire de façon générale que :

$$\int_0^{a/2} f(x)dx = \int_{a/2}^{a} f(a-x)dx \quad \text{et que} \quad \int_{a/2}^{a} f(x)dx = \int_0^{a/2} f(a-x)dx$$

On peut donc écrire, en additionnant les deux équations :

$$\int_0^{a/2} f(x)dx + \int_{a/2}^{a} f(x)dx = \int_0^{a/2} f(a-x)dx + \int_{a/2}^{a} f(a-x)dx \Leftrightarrow \int_0^{a} f(x)dx = \int_0^{a} f(a-x)dx$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx$$

On peut aussi écrire

$$2I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x+\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \frac{\pi}{2}$$

Et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, on $I_n = \frac{\pi}{4}$

Test avec $n=2$, on a

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2xdx = \left[\frac{x}{2}\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Résolu le 14 septembre 2005. Steve Tumson

EXANA144 – EPL, UCL, LLN, septembre 2005.

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x - x - 3$$

1. Etudier les variations de la fonction f
2. Soit (C) représentative de f dans un repère orthonormé $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

   Montrer que (C) admet une asymptote D dont on précisera l'équation.

   Préciser la position de (C) par rapport à cette asymptote.
3. Construire (C).
4. Déterminer l'aire $A(x)$ du domaine délimité par (C), D et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ avec $a < 0$. Calculer $\lim_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$
5. Soit f_1 la restriction de f à l'intervalle $I = [\ 0, +\infty\ [$
   a. Montrer que f_1 est une bijection de I sur un intervalle que l'on précisera.

   b. Etudier la continuité et la dérivabilité de f_1^{-1} et construire sa courbe représentative dans le repère $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

   c. Montrer quel'équation $f_1(x) = 0$ admet une solution unique que l'on encadrera par deux entiers consécutifs.

---

1) Tableau des variations

$f(x) = e^x - x - 3 \qquad f'(x) = e^x - 1 \qquad f''(x) = e^x \quad \rightarrow$

		0	
f'	$-$	0	$+$
f''	$+$	$+$	$+$
f	$\searrow$	m	$\nearrow$
Concavité		$\cup$	

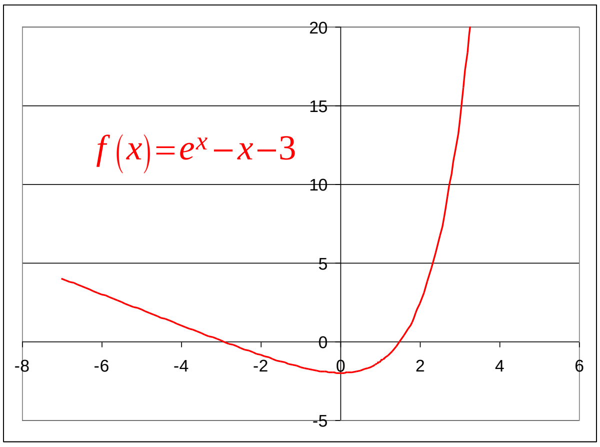
2) C'est une asymptote oblique

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \qquad p = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx\right) = -3 \quad \rightarrow AO \equiv y = -x - 3$$

3) Voir graphique

4) $A = \int_{\alpha}^{0} \left[f(x) - AO\right] dx = \int_{\alpha}^{0} e^x dx = \left[e^x\right]_{\alpha}^{0} = 1 - e^{\alpha}$

$$\lim_{x \to -\infty} A = \lim_{x \to -\infty} \left(1 - e^{\alpha}\right) = 1$$



5) a) La fonction f est croissante sur l'intervalle $I=[0,+\infty[$. f_1 est une bijection car $\forall x \in I$, il existe qu'une seule valeur de f_1, et réciproquement

b) f_1^{-1} est la fonction réciproque de f_1. Comme f_1 est une fonction continue et dérivable sur I, f_1^{-1}est aussi une fonction continue et dérivable sur I

La construction f_1^{-1} s'obtient en traçant la courbe symétrique de f_1 par rapport à la droite $y=x$

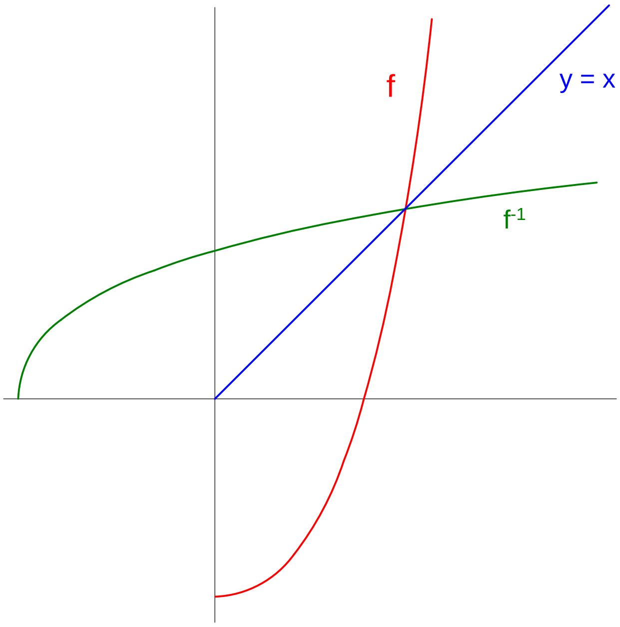
c) Admettons que f_1 a 2 solutions x_1 et $x_2 \to f_1(x_1)=f_1(x_2)$

$\to e^{x_1}-e^{x_2}=x_1-x_2$ qui n'est vérifié que si $x_1=x_2$ car pour $x>1$,

e^x croît plus vite que x

d) Si $f_1(x)=0 \to e^x=x+3 \to \begin{cases} x=1 \to e^1<4 \\ x=2 \to e^2>5 \end{cases}$

Conclusion la solution appartient à l'intervalle $]1,2[$



Résolu le 15 novembre 2005

EXANA145 – Bruxelles, juillet 2005.

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (2x + 1)\, e^{-2x}$$

et C la courbe d'équation $y = f(x)$ (C est le graphe de f)

a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Déterminer une équation cartésienne
   1. de la tangente à C au point d'abscisse 0.
   2. des asymptotes (éventuelles) de C.

c) Etablir le tableau des variations de f ; f' et f'' contenant
   1. les racines de f ; f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale)
   2. les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$.
   3. les extrema de f, les domaines de croissance et de décroissance de f.
   4. les points d'inflexion, les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de f.

d) Tracer soigneusement la courbe C d'après les résultats du c)

e) Sans nouveau calcul, tracer le graphe de la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$g(x) = f(|x|)$$

f) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel a le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = a$$

---

a) $f'(x) = -4xe^{-2x}$ $\rightarrow$ $f'(x) = 0$ en $x = 0$

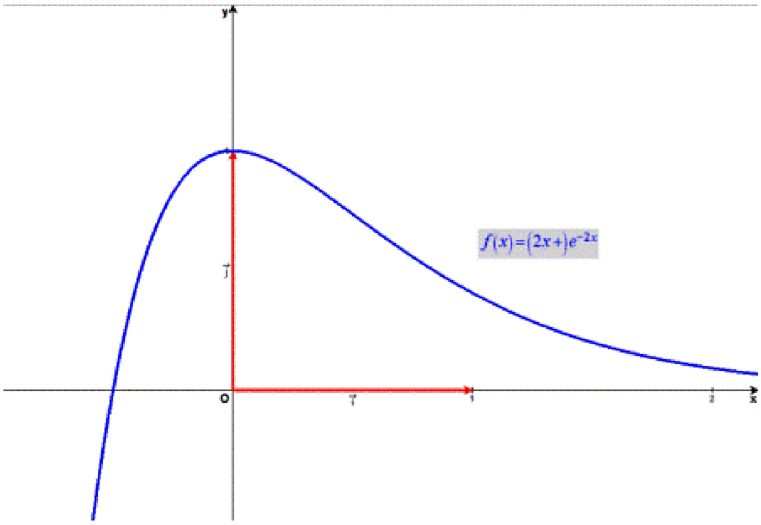
$f''(x) = 4(2x-1)e^{-2x}$ $\rightarrow$ $f''(x) = 0$ en $x = \dfrac{1}{2}$

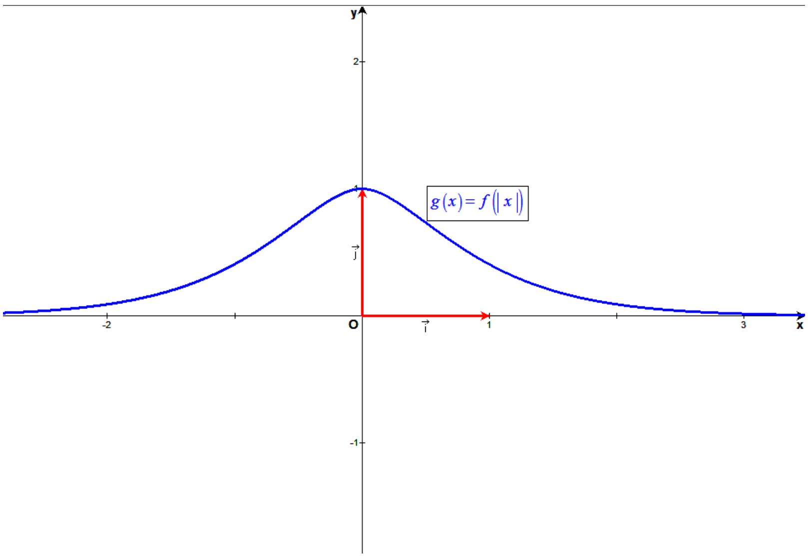
b) $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \rightarrow t \equiv y = 1$

Pas d'asymptote

c) Tableau

x		$-\frac{1}{2}$		0		2	
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	−	−	−	0	+
$f(x)$	↗	0 (Racine)	↗	M	↘	I (Point d'inflexion)	↘
	∩	∩	∩	∩	∩		∪





e) Pour tracer $g(x)$, il suffit de remarquer que $g(x) = f(x)$ si $x > 0$

Par conséquent, l'axe des y est un axe de symétrie.

f) Les solutions seront données par l'intersection de $f(x)$ et de la droite $y = a$

$a > 1$	Pas de solution
$a = 1$	1 solution
$0 < a < 1$	2 solutions
$a \leq 0$	1 solution

EXANA146 – Bruxelles, juillet 2005.

g) Calculer

$$\int_{-2}^{2} \left| x^3 - x^2 \right| \, dx$$

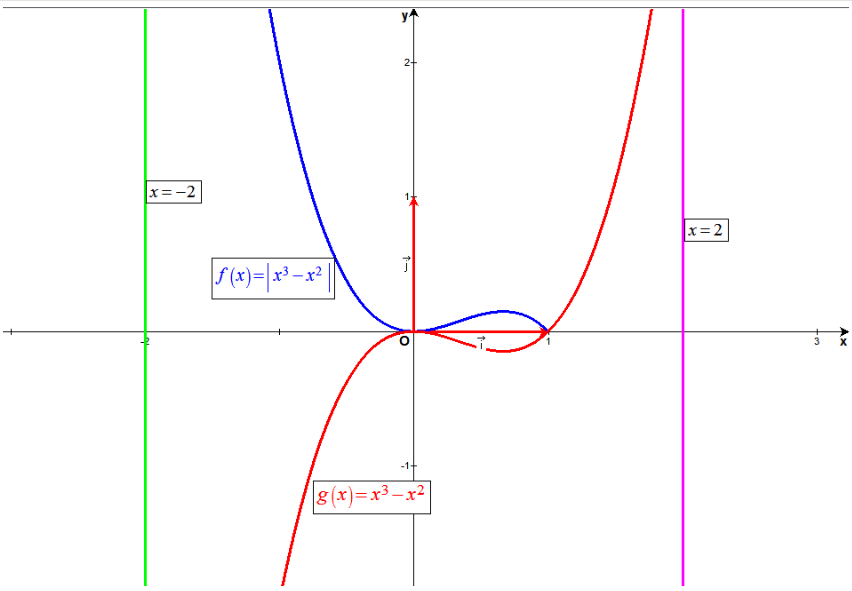
h) Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique de période 2π telle que

$$f(-\pi) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = x \text{ si } -\pi < x < \pi$$

et $n \in \mathbb{N}$,

calculer

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$



Comme le montre le graphique ci-dessus, on a

$$\int_{-2}^{2} \left| x^3 - x^2 \right| dx = \int_{-2}^{1} \left(x^2 - x^3\right) dx + \int_{1}^{2} \left(x^3 - x^2\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^{1} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_{1}^{2} = \frac{49}{6}$$

Etude de l'intégrale contenant un sinus

Comme les courbes suivantes le montrent, on a

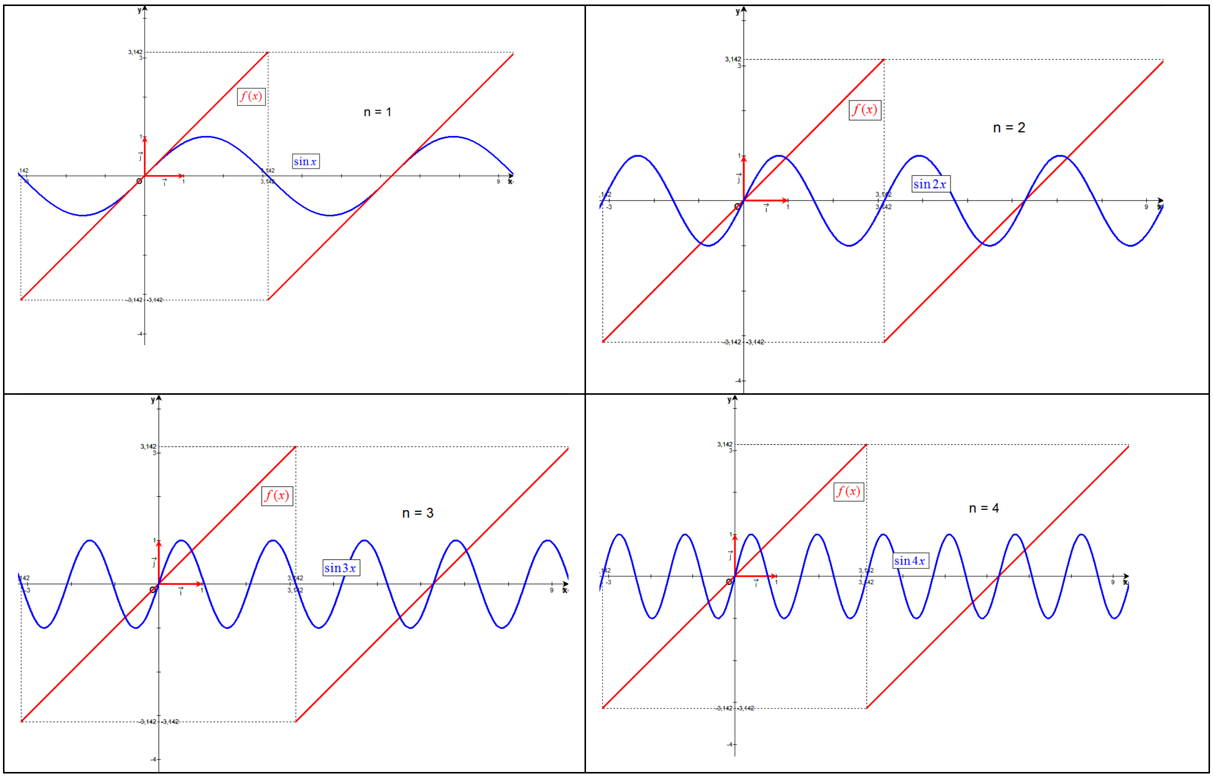
$$I=\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx=\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}(x-2\pi)\sin nx\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx-2\pi\int_{\pi}^{2\pi}\sin nx\,dx$$

On intégre le premier terme par parties, ce qui donne :

$$I=\left[\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi}-2\pi\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$=\frac{\sin 2n\pi}{n^2}-\frac{2\pi\cos 2n\pi}{n}-2\pi\left(\frac{\cos n\pi}{n}-\frac{\cos 2n\pi}{n}\right)=-2\pi\frac{\cos n\pi}{n}=(-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n}$$



Etude de l'intégrale comprenant un cosinus

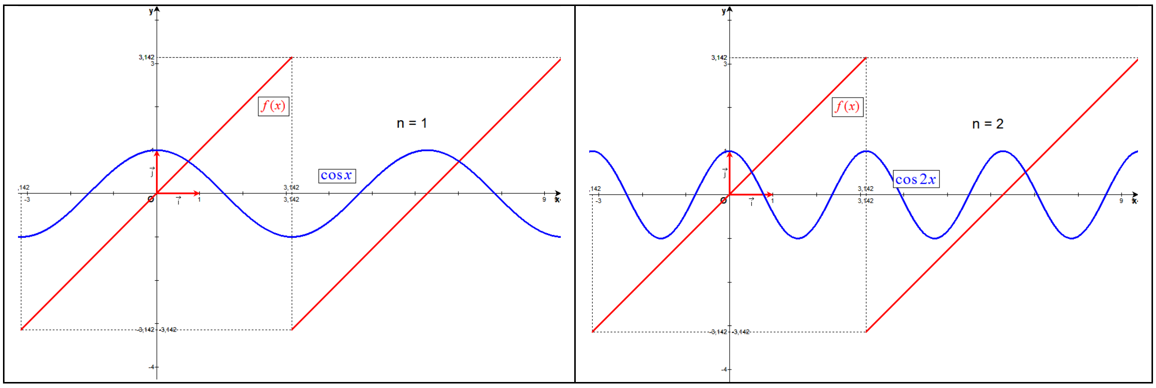
$$I=\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx=\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}(x-2\pi)\cos nx\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx-2\pi\int_{\pi}^{2\pi}\cos nx\,dx$$

$$=\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{2\pi}-2\pi\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$=\frac{2\pi\sin 2\pi n}{n}+\frac{\cos 2\pi n}{n^2}-\frac{1}{n^2}+0$$

$$=0+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}=0$$



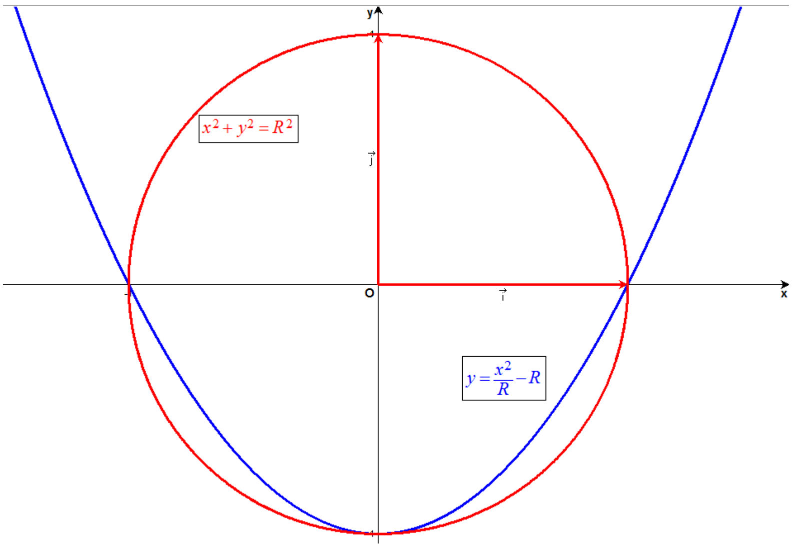
Le 1 mars 06

EXANA147 – Bruxelles, juillet 2005.

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé Oxy, soit D la région contenant l'origine (0; 0) et délimitée par les deux courbes d'équations respectives :

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad ; \quad y = \frac{x^2}{R} - R \quad (R > 0)$$

i) Faire un croquis de D.
j) Calculer l'aire de D.



Intersections des deux courbes :

$$\sqrt{R^2-x^2} = \frac{x^2}{R} - R \to R^2 - x^2 = \frac{x^4}{R^2} - 2x^2 + R^2 \to x^2\left(x^2 - R^2\right) = 0$$

$\to x = 0,\ x = -R,\ x = R$

Par symétrie, il suffit de calculer de 0 à R.

$$\to A_D = 2\int_0^R \left[\left(\sqrt{R^2-x^2}\right) - \left(\frac{x^2}{R} - R\right)\right] dx$$

La première parenthèse correspond à un quart de cercle : $\dfrac{\pi R^2}{4}$

La deuxième parenthèse donne $\displaystyle\int_0^R \left(\frac{x^2}{R} - R\right) dx = \left[\frac{x^3}{3R} - Rx\right]_0^R = -\frac{2R^2}{3}$

$$\to A_D = 2\left(\frac{\pi R^2}{4} + \frac{2R^2}{3}\right) = \frac{R^2}{6}\left(3\pi + 8\right)$$

Le 1 mars 06

EXANA148 – Bruxelles, septembre 2005.

Soit la fonction *f* de *A* (partie de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{(x-2)^2(x+1)}$$

et *C* la courbe d'équation $y = f(x)$ (*C* est le graphe de *f*)

a) Déterminer le domaine de définition de *f* (c'est à dire le plus grand *A* possible)

b) La fonction *f* est-elle dérivable en 2 ? Justifier en utilisant la définition de la dérivée.

c) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

d) Déterminer une équation cartésienne

_ de la tangente à *C* au point d'abscisse 0.

_ des asymptotes (éventuelles) de *C*.

e) Etablir le tableau des variations de *f* , f' et f'' contenant

_ les racines de *f* , f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale)

_ les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$.

_ les extrema de *f*, les domaines de croissance et de décroissance de *f*.

_ les points d'inflexion, les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de *f*.

f) Tracer soigneusement la courbe *C* d'après les résultats du e)

g) Sans nouveau calcul, tracer le graphe de la fonction *g* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$g(x) = \sqrt{-(x+2)^2(x-1)}$$

---

a) Dom $f(x): x \geq -1$

b) $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{(2+h-2)^2(2+h+1)} - \sqrt{(2-2)^2(2+1)}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|h|\sqrt{h+1}}{h}$

$\rightarrow \begin{cases} h<0 \rightarrow f'(2) = -\sqrt{h+1} = -\sqrt{3} \\ h>0 \rightarrow f'(2) = +\sqrt{h+1} = +\sqrt{3} \end{cases}$

La dérivée à gauche et à droite est différente : la fonction n'est pas dérivable en $x=2$

c) Soit donc $x \neq 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x-2)^2(x+1)}}\left[2(x-2)(x+1)+(x-2)^2\right] = \frac{3x(x-2)}{2\sqrt{(x-2)^2(x+1)}}$$

Or $x \neq 2 \rightarrow f'(x) == \dfrac{3x}{2\sqrt{x+1}}$

$f'(x)$ est nul en $x=0$.

De plus $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \dfrac{3x}{2\sqrt{x+1}} = -\infty \rightarrow$ La fonction est tangente à la droite $x=-1$

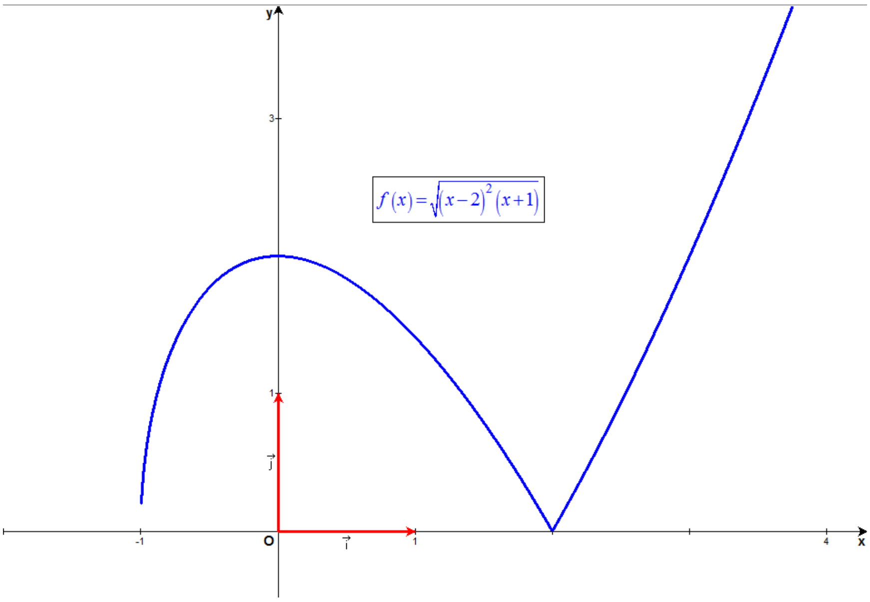
$$f''(x) = \frac{3\sqrt{x+1} - 3x\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{4(x+1)} = \frac{3}{4}\frac{x-2}{(x+1)\sqrt{x+1}}$$

d) Tangente t en $x=0$: $\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \rightarrow t \equiv y = 2$

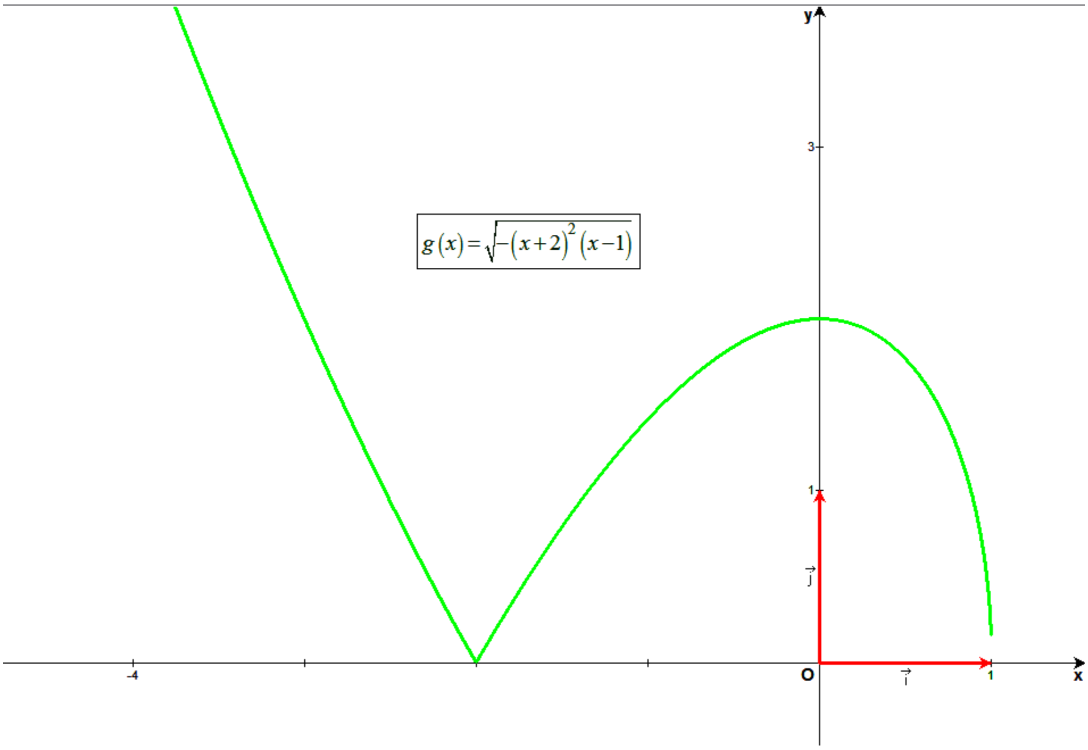
Il n'y a pas d'asymptote.

e) Tableau

	-1		0		2	
$f'(x)$	/	+	0	−	/	+
$f''(x)$	/	−	−	−	/	+
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$
		$\cap$	$\cap$	$\cap$	Point Anguleux	$\cup$



g) La fonction $g(x)$ est symétrique de $f(x)$. Il est donc facile de la tracer.



Le 1 mars 06

EXANA149 – Bruxelles, septembre 2005.

k) Calculer

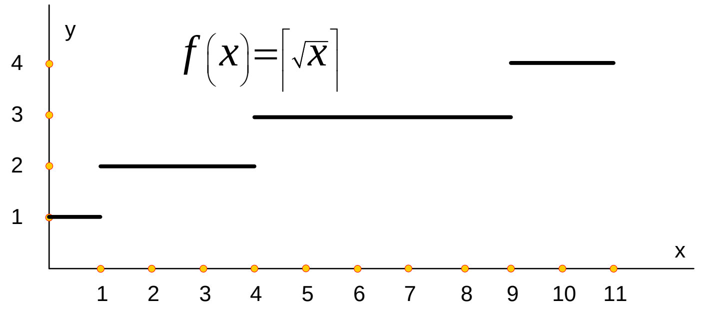
$$f(x)=\int_0^{11}\left\lceil \sqrt{x}\right\rceil dx$$

où pour tout u $\in \mathbb{R}$, $\lceil u \rceil$ désigne le plus petit entier $\geq u$.

l) Calculer

$$\int e^{ax}\ \cos\ bx\ dx$$

Où a et b sont réels.



a) La fonction est représentée ci-dessus

On a immédiatement

$$\int_0^{11}\left\lceil \sqrt{x}\right\rceil dx = 1+2\times 3+5\times 3+2\times 4=30$$

b) $I=\int e^{ax}\cos bx\ dx$

Par parties : $v'=e^{ax}\qquad v=\dfrac{e^{ax}}{a}$

$u=\cos bx\qquad u'=-b\sin bx$

$$\rightarrow I=\frac{e^{ax}}{a}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx$$

Par parties : $v'=e^{ax}\qquad v=\dfrac{e^{ax}}{a}$

$u=\sin bx\qquad u'=b\cos bx$

$$\rightarrow I=\frac{e^{ax}}{a}\cos bx+\frac{b}{a}\left[\frac{e^{ax}}{a}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\ dx\right]\rightarrow I=\frac{e^{ax}}{a}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b^2}{a^2}I$$

$$\rightarrow\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)I=\frac{e^{ax}}{a}\left(\cos bx+\frac{b}{a}\sin bx\right)\rightarrow I=\frac{a^2}{a^2+b^2}\frac{e^{ax}}{a^2}\left(a\cos bx+b\sin bx\right)$$

$$\rightarrow I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos bx+b\sin bx\right)$$

Le 1 mars 06