Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 16

EXANA0160 – EXANA169

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juil 06

EXANA160 – Liège, juillet 06.

Dans le cadre de la modélisation de la production primaire, on décrit généralement la limitation de la synthèse chlorophyllienne par la lumière par le biais de la fonction de Steele

$$f\ (I)\ =\ \alpha\, I\ \exp(1-\beta\, I)\ \text{ où }\ I\ \geq\ 0$$

désigne l'intensité lumineuse et où α et β sont des constantes strictement positives déterminées en fonction de résultats expérimentaux.

i. Déterminez les valeurs de α et β si on sait que, par définition, l'ensemble des valeurs de f est l'intervalle [0,1] et si les mesures expérimentales font apparaître que f est maximale pour une intensité lumineuse $I_{opt} > 0$.

ii. En utilisant les valeurs de α et β déterminées au point précédent, esquissez le graphe de $f\,(I)$ (pour $I \geq 0$) en discutant s'il y a lieu en fonction de I_{opt} . En particulier, précisez les équations des asymptotes éventuelles, la position et la nature des extrema éventuels ainsi que la position des points d'inflexion éventuels.

iii. Déterminez la meilleure approximation linéaire de $f\,(I)$ au voisinage de $I = 0$, *i.e.* pour des valeurs de l'intensité lumineuse I bien inférieures à l'intensité optimale I_{opt} .

Nous reprenons pour l'essentielle la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M.DELHEZ et Dr Francine MONJOIE)
Voir http://www.ulg.ac.be/mathgen/Admission/AdAnJu06.pdf

i) La fonction $f\left(I\right)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, mais on se limite à l'intervalle $\left[0,\ +\infty\right]$

Puisque la fonction s'annule sur cet intervalle pour I_{opt} :

$$\rightarrow f\,'\left(I_{opt}\right) = \alpha\left(1-\beta I_{opt}\right)\exp\left(1-\beta I_{opt}\right) = 0$$

$$\text{Or } \begin{cases} \alpha > 0 \\ \exp\left(1-\beta I_{opt}\right) > 0 \end{cases} \rightarrow 1-\beta I_{opt} = 0 \rightarrow \beta = \frac{1}{I_{opt}}$$

De plus pour $f\left(I_{opt}\right) = 1 \rightarrow \alpha I_{opt} = 1 \rightarrow \alpha = \dfrac{1}{I_{opt}}$

Finalement, la fonction s'écrit : $f\left(I\right) = \dfrac{I}{I_{opt}}\exp\left(1-\dfrac{I}{I_{opt}}\right)$

$ii)$ Soit donc à étudier la fonction : $f(I) = \dfrac{I}{I_{opt}} = \exp\left(1 - \dfrac{I}{I_{opt}}\right)$

* $f(I)$ est définie, continue et dérivable sur $[0, +\infty[$
* $\lim\limits_{I \to 0} f(I) = f(0) = 0$
* Il n'y a pas d'AV
* $\lim\limits_{I \to +\infty} f(I) = \dfrac{1}{I_{opt}} \lim\limits_{I \to +\infty} I \exp\left(1 - \dfrac{I}{I_{opt}}\right) = \dfrac{1}{I_{opt}} \lim\limits_{I \to +\infty} \dfrac{I}{\exp\left(\dfrac{I}{I_{opt}} - 1\right)}$

$$\xrightarrow{Hospital} \frac{1}{I_{opt}} \lim_{I \to +\infty} \frac{1}{\dfrac{I}{I_{opt}} \exp\left(\dfrac{I}{I_{opt}} - 1\right)} = 0$$

Il y a donc une AH pour $x \to +\infty$. Il n'y a donc pas de AO.

* Dérivée première

$f'(I) = \dfrac{1}{I_{opt}}\left(1 - \dfrac{I}{I_{opt}}\right)\exp\left(1 - \dfrac{I}{I_{opt}}\right)$ D'où le tableau :

		I_{opt}	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	M	$\searrow$

* Dérivée seconde

$$f''(I) = \frac{1}{I_{opt}}\left[-\frac{1}{I_{opt}} - \frac{1}{I_{opt}}\left(1 - \frac{I}{I_{opt}}\right)\right]\exp\left(1 - \frac{I}{I_{opt}}\right) = \frac{1}{I_{opt}^2}\left(-2 + \frac{I}{I_{opt}}\right)\exp\left(1 - \frac{I}{I_{opt}}\right)$$

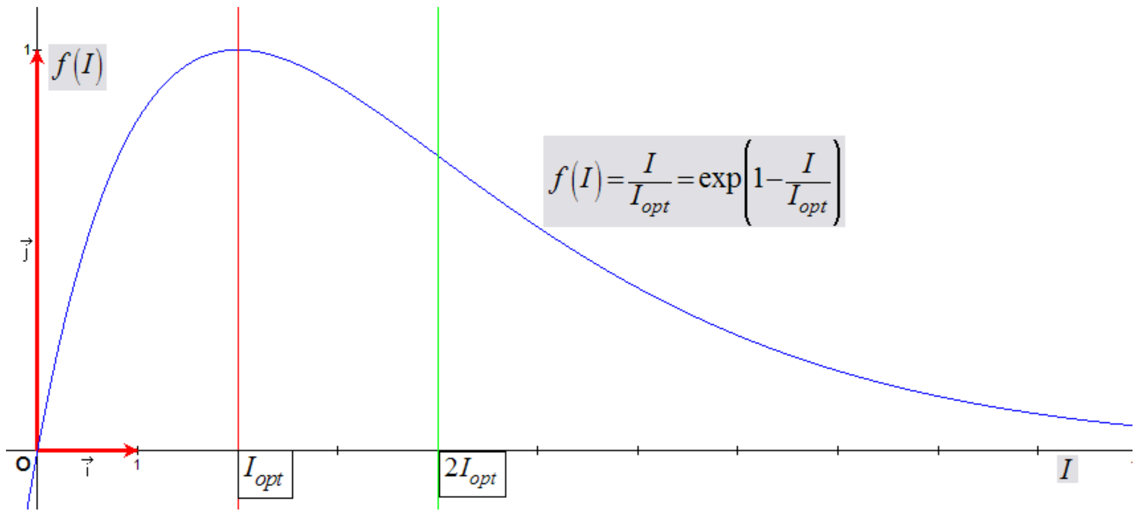
D'où le tableau :

		$2I_{opt}$	
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	I	$\cup$

* Tableau récapitulatif :

	0		I_{opt}		$2I_{opt}$		$+\infty$
f'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
f''	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\dfrac{2}{e}$	$\searrow$	0
		$\cap$	M	$\cap$	I	$\cup$	AH

Cette étude reste la même quel que soit I_{opt}. Il n'y a donc pas d'autres cas à considérer.

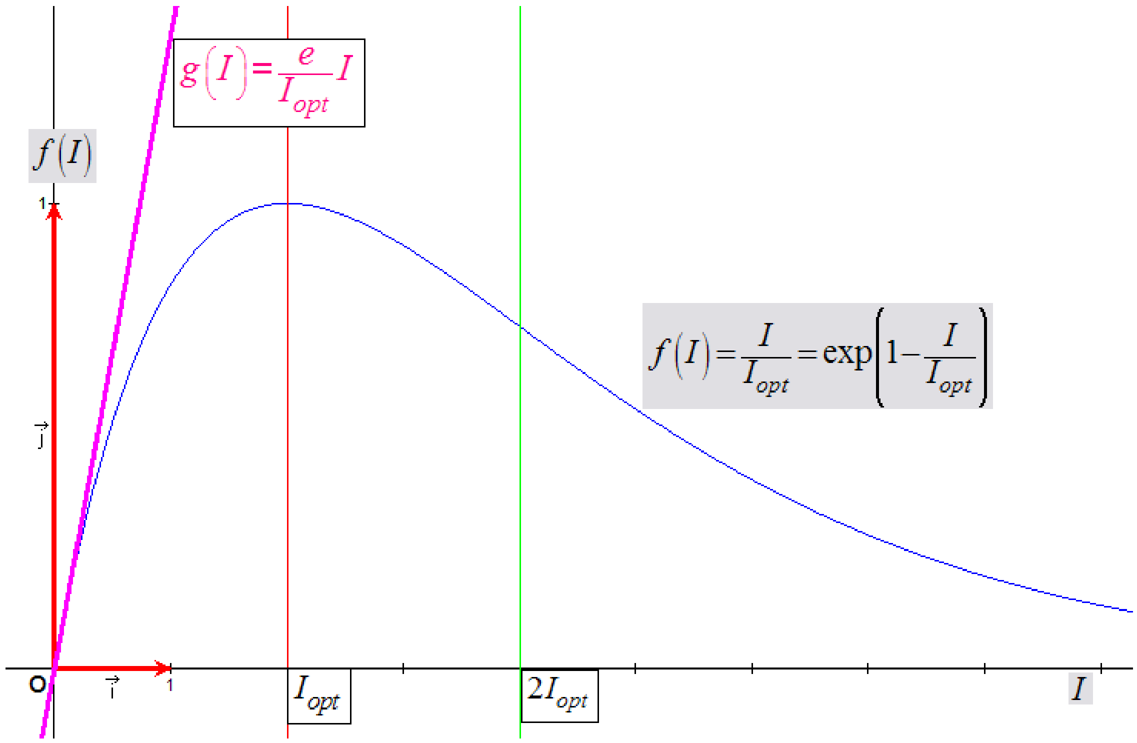


iii. Il suffit de calculer la tangente à $f(I)$ à l'origine, soit $f'(0)$.

$$f'(I) = \frac{1}{I_{opt}}\left(1 - \frac{I}{I_{opt}}\right)\exp\left(1 - \frac{I}{I_{opt}}\right) \to f'(0) = \frac{e}{I_{opt}}$$

$\to$ La tangente : $g(I) = \frac{e}{I_{opt}} I$

Cette tangente constitue la meilleure approximation linéaire de $f(I)$ au voisinage de $I = 0$



EXANA161 – Liège, juillet 06.

i. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculez

$$I_2 = \int_0^x (x-t)e^{at}dt$$

où a est une constante réelle non nulle. Déduisez-en une expression de e^{ax} de la forme

$$e^{ax} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 I_2$$

où α_0, α_1, α_2 sont des coefficients indépendants de x.

Remarque : Une telle expression est souvent utilisée pour approcher la valeur de e^{ax} *par* $\alpha_0 + \alpha_1 x$ *au voisinage de* $x = 0$.

ii. Généralisez le résultat du point i. en déduisant une expression de la forme

$$e^{ax} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 I_3 \qquad \text{ou} \qquad I_3 = \int_0^x (x-t)^2 e^{at}dt$$

et où β_0, β_1, β_2 et β_3 sont des coefficients indépendants de x.

iii. Généralisez le résultat du point i. à une fonction f quelconque (suffisamment continue et dérivable) en évaluant

$$I_2 = \int_0^x (x-t) f''(t)dt$$

Pour exprimer $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 I_2$$

où γ_0, γ_1, γ_2 sont des coefficients indépendants de x

Nous reprenons pour l'essentielle la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M.DELHEZ et Dr Francine MONJOIE)
Voir http://www.ulg.ac.be/mathgen/Admission/AdAnJu06.pdf

i) On fait une intégration par partie : $I_2 = \int_0^x (x-t)e^{at}dt$

$$\begin{array}{ll} u(t) = x-t & u'(t) = -1 \\ v'(t) = e^{at} & v(t) = \dfrac{e^{at}}{a} \end{array} \rightarrow I_2 = \left[(x-t)\frac{e^{at}}{a}\right]_0^x + \int_0^x \frac{e^{at}}{a}dt = -\frac{x}{a} + \left[\frac{e^{at}}{a^2}\right]_0^x = -\frac{x}{a} + \frac{e^{ax}}{a^2} - \frac{1}{a^2}$$

Ce qui peut se mettre facilement sous la forme : $e^{ax} = 1 + ax + a^2 I_2$

C'est-à-dire : $\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = a, \quad \alpha_2 = a^2$ qui sont bien indépendants de x

$ii)\ I_3 = \int_0^x (x-t)^2 e^{at} dt$

$$\begin{array}{ll} u(t) = (x-t)^2 & u'(t) = -2(x-t) \\ v'(t) = e^{at} & v(t) = \dfrac{e^{at}}{a} \end{array} \rightarrow I_3 = \left[(x-t)^2 \frac{e^{at}}{a} \right]_0^x + 2\int_0^x (x-t)\frac{e^{at}}{a} dt = -\frac{x^2}{a} + \frac{2}{a} I_2$$

On remplace par la valeur de I_3 obtenue plus haut : $\rightarrow I_3 = -\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{2}{a}\left(-\dfrac{x}{a} + \dfrac{e^{ax}}{a^2} - \dfrac{1}{a^2} \right)$

D'où on extrait facilement e^{ax} : $\quad e^{ax} = 1 + ax + \dfrac{a^2}{2} x^2 + \dfrac{a^3}{2} I_3$

C'est-à-dire $\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = \dfrac{a^2}{2}, \quad \beta_3 = \dfrac{a^3}{2}$ indépendants de x

$iii)$ On réutilise la même méthode

$I_2 = \int_0^x (x-t) f''(t) dt$

$$\begin{array}{ll} u(t) = x-t & u'(t) = -1 \\ v'(t) = f''(t) & v(t) = f'(t) \end{array} \rightarrow I_2 = \left[(x-t) f'(t) \right]_0^x + \int_0^x f'(t) dt$$

$\rightarrow \ f(x) = f(0) + x.f'(0) + I_2$

C'est-à-dire : $\gamma_0 = f(0), \quad \gamma_1 = f'(0), \quad \gamma_2 = 1$ qui sont indépendants de x

L e 19 juillet 2006

EXANA162 – Bruxelles, juillet 2006.

Soit

$$f(x)=\begin{cases} x\ln\left(\text{Abs}(x)\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

(Abs (x) représente la valeur absolue de x) et $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = f(x)$ ($\mathcal{C}$ est le graphe de f)

1. La fonction est-elle continue en 0 ? Justifier.
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier en utilisant la définition de la dérivée.
3. Calculer $f\,'(x)$ et $f\,''(x)$.
4. Déterminer une équation cartésienne
    a. De la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
    b. Des asymptotes (éventuelles) de $\mathcal{C}$.
5. Etablir le tableau des variations $f, f\,', f\,''$ contenant
    a. Les racines de $f, f\,', f\,''$ (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale)
    b. Les signes de $f\,'(x)$ et $f\,''(x)$
    c. Les extrema de f, les domaines de croissance et de décroissance de f.
    d. Les points d'inflexion, les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de f
6. Tracer soigneusement la courbe $\mathcal{C}$ d'après les résultats du 5)
7. Sans nouveau calcul, tracer le graphe de la fonction $g(x) = f(x+1)$.

---

1) si $x>0$, $\text{Abs}(x)=x \rightarrow f(x)=x\ln x$

Calculons : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln x = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (-x) = 0$

si $x<0$, $\text{Abs}(x)=-x \rightarrow f(x)=x\ln(-x)$

Calculons : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln(-x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{\ln(-x)}{\dfrac{1}{x}} \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{-\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x = 0$

Les limites à gauche et à droite étant égales, la fonction est continue en $x=0$

2) Soit $x>0$, on calcule alors la dérivée à droite

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x\ln x-a\ln a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x\ln x-x\ln a+x\ln a-a\ln a}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(x\frac{\ln x-\ln a}{x-a}+\ln a\frac{x-a}{x-a}\right)=\lim_{x\to a}x.\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}+\ln a$$

$$=\left(\lim_{x\to a}x\right).(\ln x)'+\ln a=\left(\lim_{x\to a}x\right).\frac{1}{x}+\ln a=\lim_{x\to a}\left(x.\frac{1}{x}\right)+\ln a$$

$$=1+\ln a$$

D'où on déduit que la dérivée à droite en $x=0$ (donc pour $a=0$) n'existe pas

La tangente à l'origine est verticale

Soit $x<0$

Comme la fonction est impaire ($f(-x)=-x\ln(\text{Abs}(-x))=-f(x)$), la conclusion sera la même pour la dérivée à gauche.

3) $x>0\to f'(x)=(x\ln x)'=\ln x+1$

$f'(x)=0$ si $\ln x+1=0\to x=e^{-1}\simeq 0.37.$

$x<0\to f'(x)=(x\ln(-x))'=\ln(-x)+1$

$f'(x)=0$ si $\ln(-x)+1\to x=-e^{-1}\simeq -0.37$

$f''(x)=(\ln x+1)'=\frac{1}{x}$. La dérivée seconde n'est jamais nulle. Il n'y a pas de point d'inflexion

4) a) $f'(x)=1$ et $f(1)=0$

La tangente à pour : $t\equiv y=x-1$

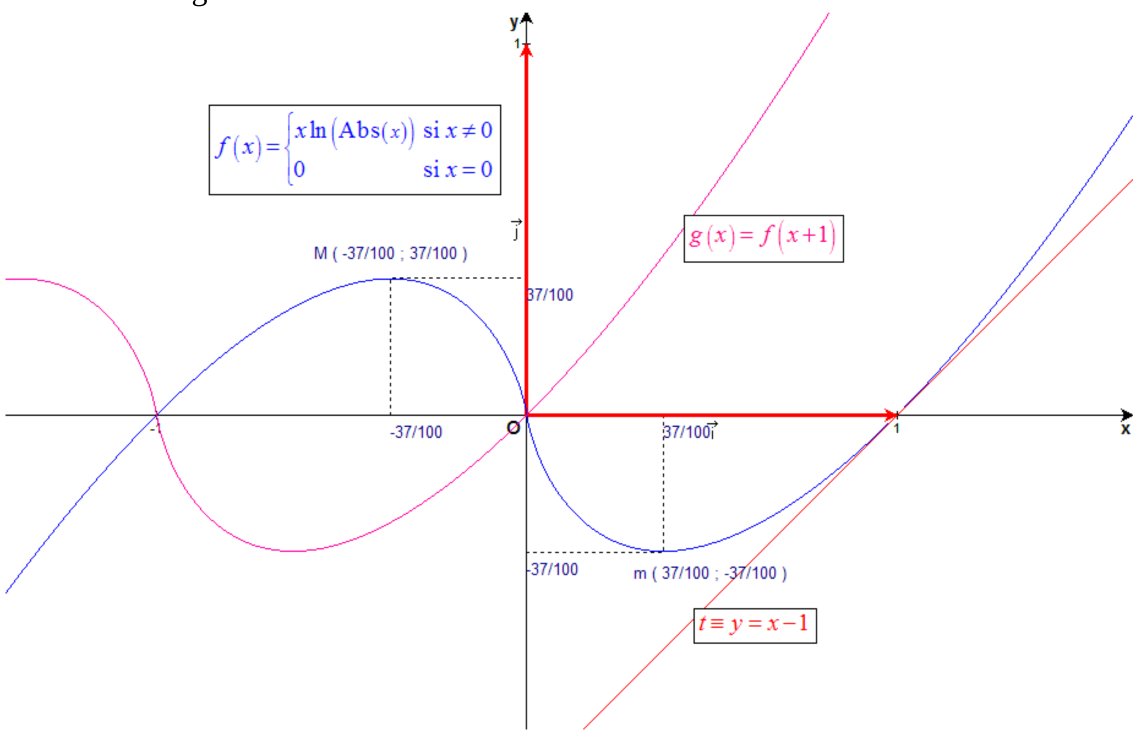
b) Il n'y a pas d'asymptotes.

5)

x		-0.37		0		0.37	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$/$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$/$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$M\left(-e^{-1},e^{-1}\right)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$m\left(e^{-1},-e^{-1}\right)$	$\nearrow$
	$\cap$	$\cap$	$\cap$		$\cup$	$\cup$	$\cup$

6) La fonction est tracée en annexe.

7) Si $g(x) = f(x+1)$, on construit simplement $g(x)$ en translatant $f(x)$ d'une unité vers la gauche.



Le 6 aout 2006

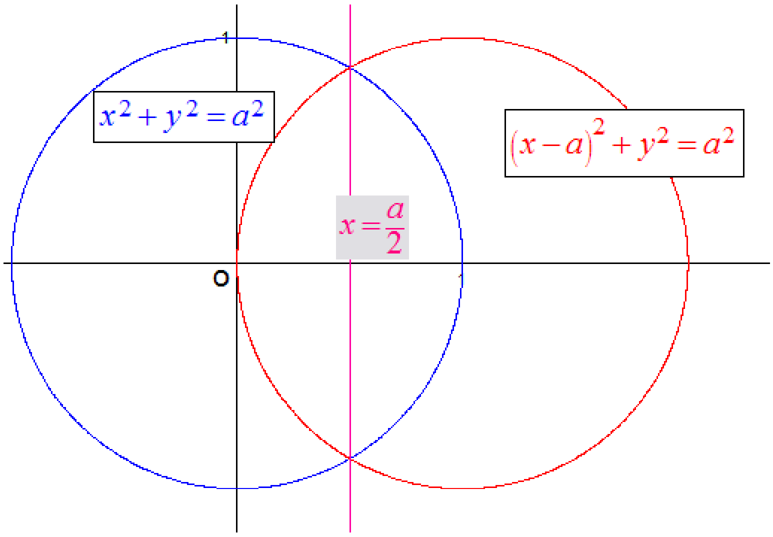
EXANA163 – Bruxelles, juillet 2006.

Dans le plan euclidien $\mathfrak{R}^2$ muni d'un repère orthonormé *Oxy*, soit *D* la région convexe délimitée par les 2 courbes d'équations respectives ($a > 0$).

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

a) faire un croquis de *D*
b) Calculer l'aire de *D*



L'équation de la corde commune est donnée par la différence des deux équations des cercles

$$\to (x-a)^2 + y^2 - (x^2+y^2) = a^2 - a^2 \to x = \frac{a}{2}$$

Le second cercle peut se mettre sous la forme : $(x-a)^2 + y^2 = a^2 \to y = \pm\sqrt{2ax - x^2}$

Il suffit donc de calculer la surface comprise entre la courbe $y = +\sqrt{2ax-x^2}$, l'axe des x et la corde : $x = \frac{a}{2}$. Il faudra ensuite multiplier cette surface par 4.

$$A_1 = \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

$$\text{Posons : } \sin t = \frac{x}{a} \to \begin{cases} \cos t\, dt = \dfrac{dx}{a} \\ x = 0 \to t = 0 \\ x = \dfrac{a}{2} \to t = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

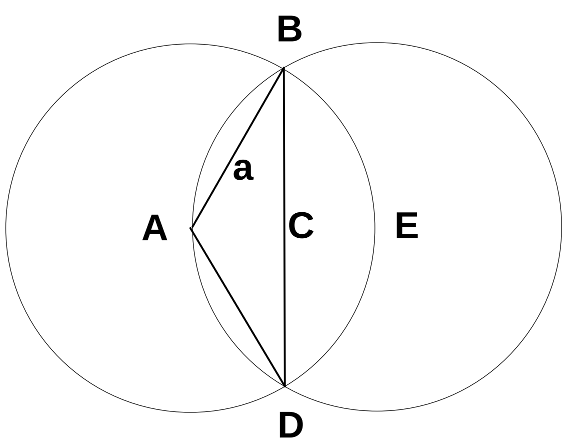
$$\to A_1 = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t.dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t.dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2t + 1}{2}.dt$$

$$= a^2\left[\frac{1}{4}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos 2t\, d2t + \frac{1}{2}[x]_0^{\frac{\pi}{3}}\right] = a^2\left(\frac{1}{4}[\sin 2t]_0^{\frac{2\pi}{3}} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= a^2\left(-\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = a^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\to \boxed{A = 4A_1 = \frac{a^2}{6}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}$$

Méthode alternative par la géométrie synthétique



L'angle BAD vaut $\frac{2\pi}{3}$

Surface du triangle $ABD : S_{ABD} = \frac{1}{2}.a.a.\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Surface du secteur circulaire $ABED : S_{ABED} = 2\pi a^2.\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{2\pi a^2}{3}$

Surface du segment circulaire $CBED$:

$$S_{CBED} = S_{ABED} - S_{ABD} = \frac{2\pi a^2}{3} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{12}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$$

Surface $DABE = \boxed{S_{DABE} = 2.S_{CBED} = \frac{a^2}{6}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}$

Le 6 aout 2006

EXANA164 – Mons, juillet 2006.

Pour fabriquer des verres (flutes) à champagne, on considère le volume de révolution engendré par la rotation de différentes courbes autour de l'axe des *x* et pour *x* appartenant à l'intervalle [0, *a*]. Calculez les volumes ainsi définis :

a) La courbe $y = 1 / (1+x)$; que se passe-t-il lorsque $a \to \infty$?
b) La courbe $y = x + \sin(x)$; dessiner l'allure du verre et calculer l'expression du volume pour $a = 2\pi$

Solution proposée par Steve Tumson

$$a)\ V = \pi \int_0^a \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 dx = \pi\left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^a = \pi\left[\frac{-1}{1+a}+1\right]$$

avec $\boxed{\lim_{a\to\infty} V = \frac{\pi}{3}}$

$$b)\ V = \pi\int_0^a \left(x^2 + \sin^2 x + 2x\sin x\right) dx = \pi\left[\frac{a^3}{3} + \underbrace{\int_0^a \sin^2 x\, dx}_{V_2} + 2\underbrace{\int_0^a x\sin x dx}_{V_3}\right]$$

$$V_2 = \int_0^a \sin^2 x\, dx = \int_0^a \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{4}\int_0^a \cos 2x\, d2x = \frac{a}{2} - \frac{\sin 2a}{4}$$

$$V_3 = \int_0^a x\sin x dx$$

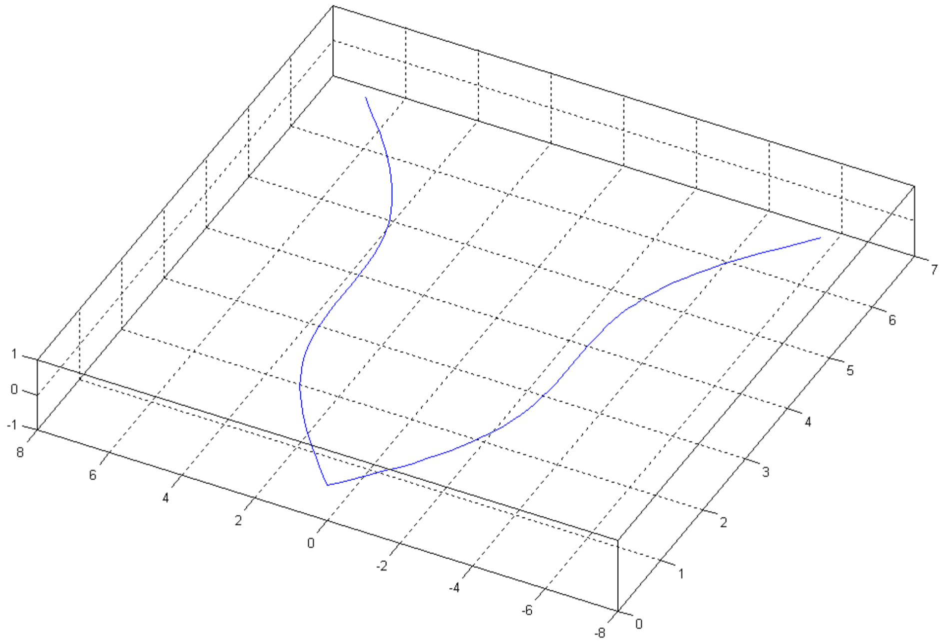
$$\begin{cases} u = x \to du = dx \\ dv = (\sin x)dx \to v = -\cos x \end{cases} \to V_3 = \left[-x\cos x\right]_0^a + \int_0^a \cos x\, dx = -a\cos a + \sin a$$

Et donc

$$V = \pi\left(\frac{a^3}{3} + \frac{a}{2} - \frac{\sin 2a}{4} - 2a\cos a + 2\sin a\right)$$

Pour $a = 2\pi$ on trouve

$$V = \frac{\pi(2\pi)^3}{3} + \frac{\pi(2\pi)}{2} - \frac{\pi \sin 2(2\pi)}{4} - 2\pi(2\pi)\cos(2\pi) + 2\pi\sin(2\pi) = \boxed{\pi^2\left(\frac{8}{3}\pi^2 - 3\right) \simeq 230{,}154}$$



Le 6 aout 2006

EXANA165 – Liège, septembre 2006.

Soit la fonction

$$f_a(x) = \arctan \frac{ax}{1+x^2}$$

dépendant du paramètre réel $a \neq 0$.

A. Dans le cas où $a > 0$,

i. déterminez le domaine de définition de f_a ;
ii. déterminez la parité de f_a ;
iii. déterminez les asymptotes éventuelles de f_a ;
iv. déterminez les extrema éventuels de f_a ;
v. déterminez les points d'inflexion éventuels de f_a ;
vi. dressez le tableau récapitulatif ;
vii. esquissez le graphe de f_a.

B. Dans le cas général $a \neq 0$, déterminez la relation entre f_a et f_{-a}.

C. Dans le cas où $a < 0$, esquissez le graphe de f_a à partir des résultats obtenus en **A.** et **B.**

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

A i) Quelles que soient les valeurs de a, la fonction $f_a = \arctan\dfrac{ax}{1+x^2}$

est définie sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction $\dfrac{ax}{1+x^2}$ l'est sur $\mathbb{R}$, ainsi que la fonction $\arctan u$

ii) $\forall a, \quad f_a(-x) = \arctan\dfrac{-ax}{1+x^2} = -\arctan\dfrac{ax}{1+x^2} = -f_a(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

iii) Asymptotes

- Pas d'asymptote verticale car la fonction est défnie sur $\mathbb{R}$
- Asymptote horizontale $y = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\dfrac{ax}{1+x^2} = \arctan 0 = 0$

  Il y a aussi une asymptote horizontale en $y = 0$ vu l'imparité de la fonction
- Pas d'asymptote oblique

iv) Recherche des extrema

La fonction $f_a(x)$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque les fonctions $\dfrac{ax}{1+x^2}$ et $\arctan u$ le sont aussi.

Dérivée première : $f'_a(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{a^2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}} \dfrac{a\left(1+x^2\right)-ax2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{a\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2+a^2x^2}$

Elle s'annule en ± 1 et change de signe de part et d'autre de ± 1.

Dans le cas où $a>0$, $f'_a(x)$ est positive sur $\left]0,1\right[$ et négative sur $\left]1,+\infty\right[$ donc f_a est maximale en 1 et $f_a(1)=\arctan\dfrac{a}{2}$ est la valeur du maximum.

Vu son imparité, la fonction est minimale en -1 et $f_a(-1)=-\arctan\dfrac{a}{2}$ est la valeur du minimum

v) Recherche des points d'inflexion.

La dérivée seconde :

$$f_a''(x) = \frac{-2ax\left[\left(1+x^2\right)^2+a^2x^2\right]-a\left(1-x^2\right)\left[4x\left(1+x^2\right)+2a^2x\right]}{\left[\left(1+x^2\right)^2+a^2x^2\right]^2}$$

$$= \frac{-2ax\left(1+x^2\right)^2-2a^3x^3-4ax\left(1-x^4\right)-2a^3x\left(1-x^2\right)}{\left[\left(1+x^2\right)^2+a^2x^2\right]^2}$$

$$= \frac{-2ax\left[\left(1+x^2\right)^2+2\left(1-x^4\right)+a^2\right]}{\left[\left(1+x^2\right)^2+a^2x^2\right]^2}$$

$$= \frac{-2ax\left[x^4-2x^2-\left(3+a^2\right)\right]}{\left[\left(1+x^2\right)^2+a^2x^2\right]^2}$$

s'annule si $x=0$ ou si $x^2 = 1\pm\sqrt{1+3+a^2} = 1\pm\sqrt{4+a^2}$

Nous ne retiendrons que le signe + devant la racine carrée car $x^2 \geq 0$.

Comme f_a'' s'annule en $x=0$ et change de signe de part et d'autre de x=0, il y a un point d'inflexion en $x=0$ (ce qui est logique vu l'imparité de la fonction)

Si $a>0$, f_a'', qui s'annule en $\sqrt{1+\sqrt{4+a^2}}$, change de signe de part et d'autre (négative à gauche et positive à droite). Il y a donc un point d'inflexion en $x=\sqrt{1+\sqrt{4+a^2}}$

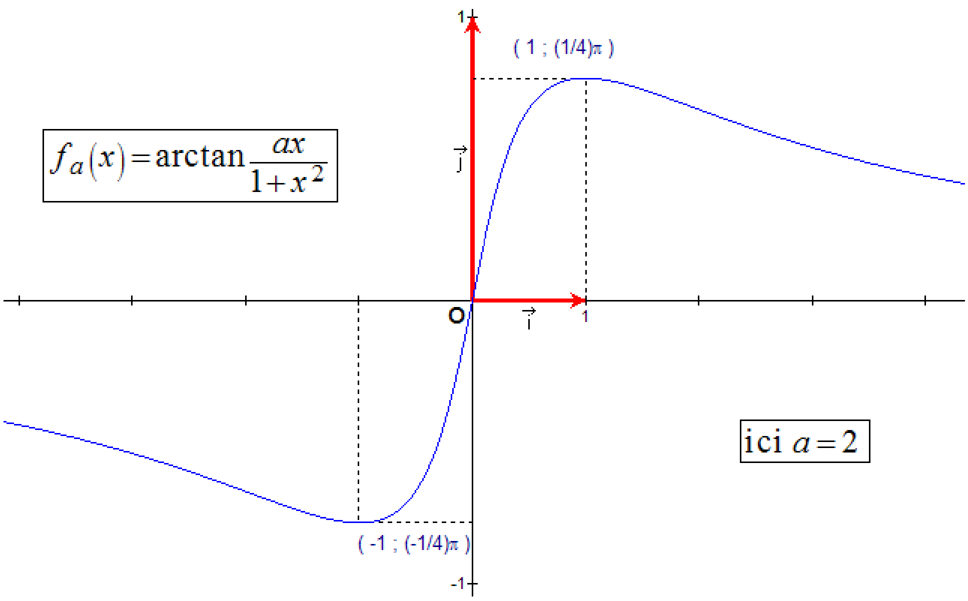
Vu l'imparité, il y a aussi un point d'inflexion en $x=-\sqrt{1+\sqrt{4+a^2}}$

vi) Tableau récapitulatif

Tableau pour $a>0$ et $x\geq 0$

	0		1		$\sqrt{1+\sqrt{4+a^2}}$		$+\infty$
f_a'	a	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
f_a''	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0
f_a	0	$\nearrow$	$\arctan\frac{a}{2}$	$\searrow$		$\searrow$	0
		$\cap$	Max	$\cap$	PI	$\cup$	AH

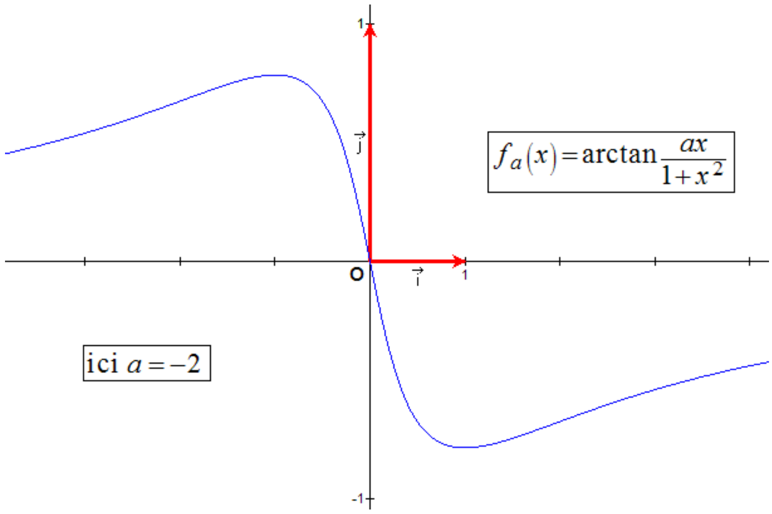
vii) Le graphe est donné ci-dessous



B. Nous avons, $\forall x \quad f_{-a}(x) = \arctan\dfrac{-ax}{1+x^2} = -\arctan\dfrac{ax}{1+x^2} = -f_a(x)$

$\rightarrow \quad f_{-a}(x) = -f_a(x) \qquad (1)$

C. Vu la relation (1), les graphes de f_a et f_{-a} sont symétriques par rapport à l'axe des x. Si $a<0$ alors $-a>0$ et le graphe de f_{-a} est donné ci-dessus.



Le 25 décembre 2006

EXANA166 – Liège, septembre 2006.

On considère les intégrales

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx \quad \text{et} \quad C_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$$

où n désigne un naturel quelconque.

i. Calculez S_1 et C_1.
ii. Calculez S_2 et C_2.
iii. Calculez $S_n - C_n$.
iv. Au prix d'une intégration par parties, montrez que

$$S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2} \qquad \forall n \geq 2$$

Nous reprenons la résolution proposée par l'université.

i) $S_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$ et $S_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$

ii) $S_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x)\, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$

$C_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x)\, dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$

iii) Effectuons un changement de variable dans S_n

$$x = \frac{\pi}{2} - u \to \begin{cases} dx = -du \\ x = 0 \to u = \frac{\pi}{2} \to S_n = \int_{\pi/2}^{0} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right)(-du) = \int_0^{\pi/2} \cos^n u\, du = C_n \\ x = \frac{\pi}{2} \to u = 0 \end{cases}$$

$\to S_n - C_n = 0$

iv) Notant que, pour $n \geq 1$, $\quad S_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x \, dx$

Intégration par parties :

$$\begin{cases} u = \sin^{n-1} x \\ v' = \sin x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u' = (n-1)\cos x \sin^{n-2} x, \quad \text{si} \quad n \geq 2 \\ v = -\cos x \end{cases}$$

Donc, pour $n \geq 2$, nous obtenons

$$\begin{aligned} S_n &= \left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1)\cos x \sin^{n-2} x \cos x \, dx \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x \, dx \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} \left(1-\sin^2 x\right)\sin^{n-2} x \, dx \\ &= (n-1)\left[\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx - \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx\right] \\ &= (n-1)\left(S_{n-2} - S_n\right) \end{aligned}$$

Autrement dit : $S_n = (n-1)\left(S_{n-2} - S_n\right) \rightarrow S_n = \dfrac{n-1}{n} S_{n-2} \qquad \forall n \geq 2$

Le 25 décembre 2006

EXANA167 – Bruxelles, juillet 2006.

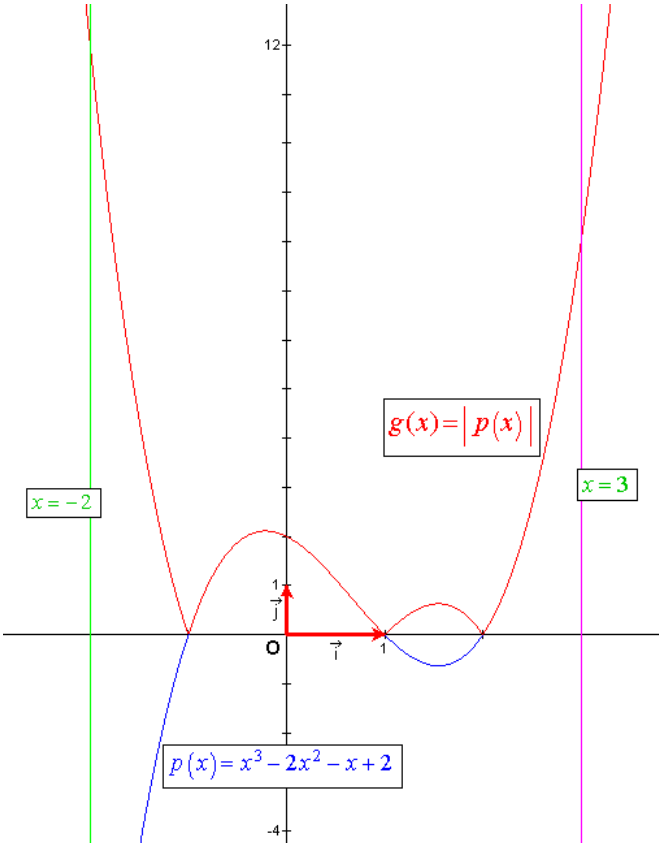
Soit la fonction polynôme

$$p(x)=x^3-2x^2-x+2$$

Calculer

a) $p(2)$

b) $\int_{-2}^{3}\left|\,p(x)\right|dx$



$a)\ p(2)=8-8-2+2=0$

$b)$ En vertu de $a)$, il est facile de factoriser $p(x)$

Horner : $\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & & 2 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \to p(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$

On peut alors établir le tableau de signe suivant

		-1		1		2	
$x+1$	−	0	+	+	+	+	+
$x-1$	−	−	−	0	+	+	+
$x-2$	−	−	−	−	−	0	+
	−	0	+	0	−	0	+

Ce qui nous permet d'écrire :

$$I=\int_{-2}^{3}\left|\ p(x)\right|dx$$

$$=-\underbrace{\int_{-2}^{-1} p(x)\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_{-1}^{1} p(x)\,dx}_{I_2}-\underbrace{\int_{1}^{2} p(x)\,dx}_{I_3}+\underbrace{\int_{2}^{3} p(x)\,dx}_{I_4}$$

or $\int\ p(x)\,dx=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x+C$

Donc

$$I_1=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{-1}=-\frac{19}{12}-\frac{10}{3}=-\frac{59}{12}$$

$$I_2=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{1}=\frac{13}{12}+\frac{19}{3}=\frac{32}{12}$$

$$I_3=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{1}^{2}=\frac{2}{3}-\frac{13}{12}=-\frac{5}{12}$$

$$I_4=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{2}^{3}=\frac{15}{4}-\frac{2}{3}=\frac{37}{12}$$

$$\to I=-I_1+I_2-I_3+I_4=\frac{1}{12}(59+32+5+37)=\boxed{\frac{133}{12}}$$

EXANA168 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2006.

Soient la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x\, e^{-x^2-2x+1}$$

et C la courbe d'équation $y = f(x)$ (C est le graphe de f)

a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Déterminer une équation cartésienne

- De la tangente à C au point d'abscisse -2
- Des asymptotes (éventuelles) de C

c) Etablir le tableau des variations de f, f', f'' contenant

- Les racines de f, f', f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale)

  Indication numérique

  Pour $|x| \leq 0{,}5$ une valeur de e^x est donnée par $1+x+x^2/2$ et $e \simeq 2.7$
- Les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$
- Les extrema de f, les domaines de croissance et de décroissance de f.
- Les points d'inflexion de f et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de f .

d) Tracer soigneusement la courbe C d'après les résultats du c)

e) Sans nouveau calcul, tracer legraphe de la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$g(x) = -f(-x)$

$a)$ $f'(x) = -(2x^2+2x-1)\, e^{-x^2-2x+1}$

$f''(x) = 2(2x^2-1)(x+2)e^{-x^2-2x+1}$

$b)$ $f(-2) = -2e$

$f'(-2) = -3e$

L'équation de la tangente est : $t \equiv y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$\Rightarrow t \equiv y + 3e = -2e(x+2) \Rightarrow t \equiv y = -3ex - 8e \simeq -8.13x - 21.68$

Asymptotes : Il y a une asymptote horizontale car

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\, e^{-x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x\, e^{-x^2} = 0 \Rightarrow \quad AH \equiv y = 0$

c) Racines

$f(x) \ : x = 0$

$f'(x) \ : x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \cong -1.366 \\ x_2 \cong 0.366 \end{cases}$

$f''(x) : x = 2$ et $x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cong \pm 0.766$

Signe de $f''(x)$

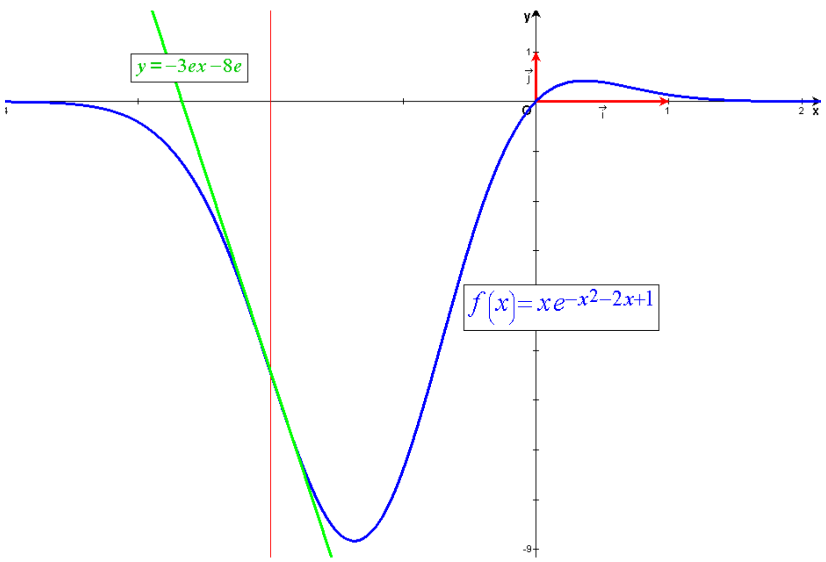
		-2		-0.707		0.707	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

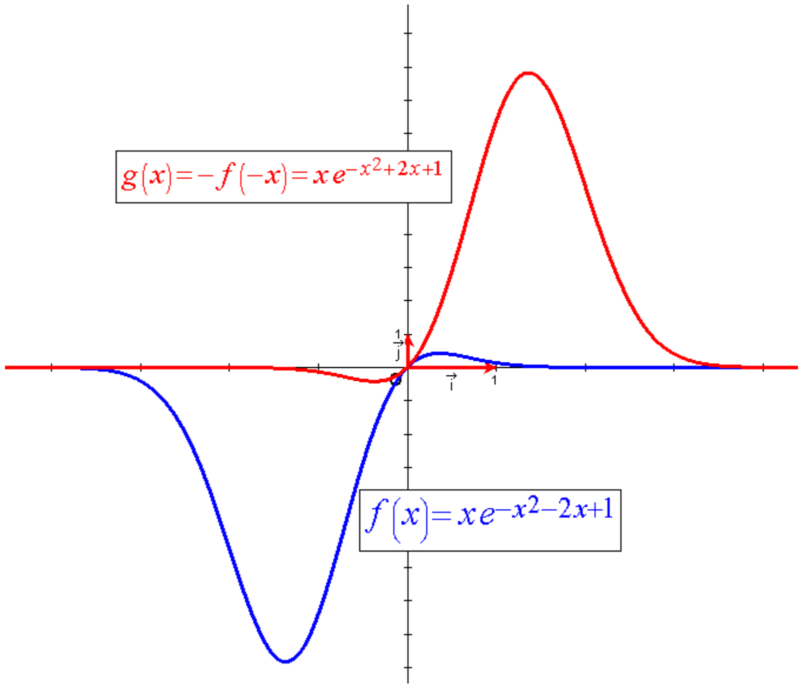
Tableau des variations

		-2		-1.366		-0.707		0		0.366		0.707	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	I	$\searrow$	m	$\nearrow$	I	$\nearrow$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	I	$\searrow$
	$\cap$		$\cup$	$\cup$	$\cup$		$\cap$	$\cap$	$\cap$		$\cap$		$\cup$

d) Le graphique est donné ci-dessous

e) Si $g(x) = -f(-x)$, alors $g(x)$ s'obtient par symétrie central de centre O à partir de $f(x)$





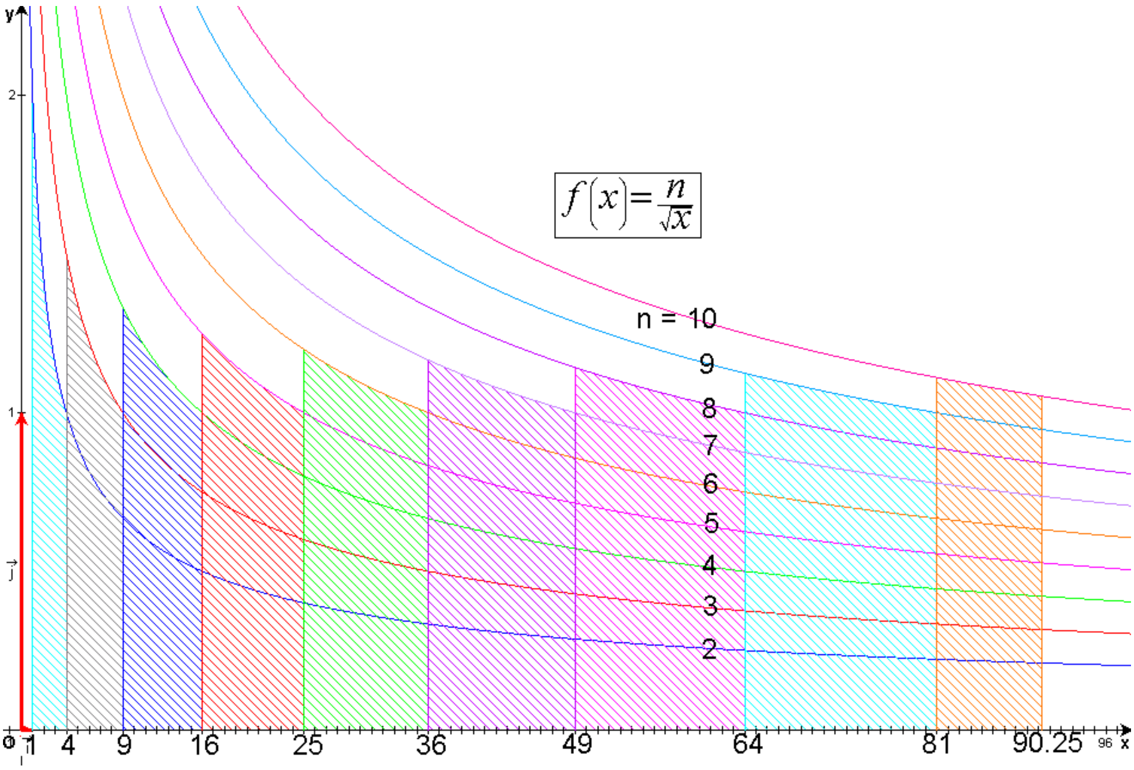
Le 25 janvier 2007

EXANA169 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2006.

Calculer l'intégrale

$$\int_1^{90.25} \frac{\left|\left\lceil \sqrt{x} \right\rceil\right|}{\sqrt{x}}\, dx$$

où pour tout u, $\lceil u \rceil$ désigne le plus petit entier $\geq u$.



Construisons un tableau

x	$\dfrac{\left[\sqrt{x}\right]}{x}$	$\displaystyle\int \frac{\left[\sqrt{x}\right]}{x}\,dx$	Valeur
$1 \le x < 4$	$\dfrac{2}{\sqrt{x}}$	$4\sqrt{x}\,\Big\vert_{1}^{4}$	4
$4 \le x < 9$	$\dfrac{3}{\sqrt{x}}$	$6\sqrt{x}\,\Big\vert_{4}^{9}$	6
$9 \le x < 16$	$\dfrac{4}{\sqrt{x}}$	$8\sqrt{x}\,\Big\vert_{9}^{16}$	8
$16 \le x < 25$	$\dfrac{5}{\sqrt{x}}$	$10\sqrt{x}\,\Big\vert_{9}^{25}$	10
$25 \le x < 36$	$\dfrac{6}{\sqrt{x}}$	$12\sqrt{x}\,\Big\vert_{25}^{36}$	12
$36 \le x < 49$	$\dfrac{7}{\sqrt{x}}$	$14\sqrt{x}\,\Big\vert_{36}^{49}$	14
$49 \le x < 64$	$\dfrac{8}{\sqrt{x}}$	$16\sqrt{x}\,\Big\vert_{49}^{64}$	16
$64 \le x < 81$	$\dfrac{9}{\sqrt{x}}$	$18\sqrt{x}\,\Big\vert_{64}^{81}$	18
$81 \le x < 90.25$	$\dfrac{10}{\sqrt{x}}$	$20\sqrt{x}\,\Big\vert_{81}^{90.25}$	10
		Total	98

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\int_{1}^{90,25} \frac{\left[\sqrt{x}\right]}{\sqrt{x}}\,dx = 98}$