**Exercices résolus de mathématiques.**

# Analyse

# ANA 19

EXANA0190 – EXANA199

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

# EXANA190 – FPMS – Mons, juillet 2003.

Soit une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ impaire, périodique de période 4. Dans l'intervalle $[0,2]$, elle est définie par :

$$f(x)=1-|1-x|$$

Calculer :

$$\int_0^5 f(x)dx$$

---

**Solution proposée par Steve Tumson**

La question est simplissime quand on se schématise la situation :

La fonction étant impaire, le graphe de $f(x)$ est dans l'intervalle $[-2,0]$ l'opposé de celui définit dans l'énoncé. La période étant de 4, cet opposé se retrouve donc aussi dans l'intervalle $[2,4]$.

On peut donc déjà dire par ce simple raisonnement que $\int_0^4 f(x)dx=0$.

Il reste à calculer $\int_4^5 f(x)dx$ qui est la même que $\int_0^1 f(x)dx$ vu la période de 4.

Entre 0 et 1, la fonction est définie par $f(x)=x$

Et donc :

$$\int_0^5 f(x)dx=\int_0^4 f(x)dx+\int_4^5 f(x)dx=0+\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

---

Le 22 juillet 2007.

## EXANA191 – FPMS – Mons, juillet 2003.

Déterminer les réels a, b et c de telle manière que :

$$\frac{1}{x^3+x^2+x+1}=\frac{a}{1+x}+\frac{bx+c}{1+x^2}$$

Calculer :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3+x^2+x+1}$$

---

**Solution proposée par Steve Tumson**

Il suffit de remettre sous le même dénominateur :

$$\frac{(bx+c)(1+x)+a\left(1+x^2\right)}{x^3+x^2+x+1}=\frac{(a+b)x^2+(b+c)x+c+a}{x^3+x^2+x+1}$$

Il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Il est maintenant facile de calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3+x^2+x+1}=\int_0^1\left(\frac{\frac{1}{2}}{1+x}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{1+x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

La première intégrale nous donne :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx=\left[\ln(x+1)\right]_0^1=\ln 2$$

La seconde intégrale nous donne :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\left[ArcTan(x)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

La troisième intégrale nous donne :

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx^2=\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1=\frac{\ln 2}{2}$$

L'intégrale d'une somme étant égale à la somme des intégrales, on a finalement :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{x^3+x^2+x+1}=\frac{1}{2}\left(\ln 2+\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}\right)=\frac{\ln 2}{4}+\frac{\pi}{8}\approx 0,566}$$

---

Le 22 juillet 2007.

## EXANA192 – FPMS – Mons, juillet 2003.

Calculer :

$$A=\int_0^x e^t\cos(2t)dt$$

$$B=\int_0^x e^t\sin(2t)dt$$

---

**Solution proposée par Steve Tumson**

Calculons d'abord les primitives par partie :

Pour $A$ :

$$\begin{array}{ll} u=\cos(2t) & \rightarrow du=-2\sin(2t)dt \\ dv=e^t dt & \rightarrow v=e^t \end{array} \Rightarrow F_A=e^t\cos(2t)+2\int e^t\sin(2t)dt=e^t\cos(2t)+2F_B$$

Pour $B$ :

$$\begin{array}{ll} u=\sin(2t) & \rightarrow du=2\cos(2t)dt \\ dv=e^t dt & \rightarrow v=e^t \end{array} \Rightarrow\Rightarrow F_B=e^t\sin(2t)-2\int e^t\cos(2t)dt=e^t\sin(2t)-2F_A$$

Il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} F_A=e^t\cos(2t)+2B \\ F_B=e^t\sin(2t)-2A \end{cases}$$

On trouve facilement :

$$F_A=\frac{e^t}{5}\left(\cos(2t)+2\sin(2t)\right)$$

$$F_B=\frac{e^t}{5}\left(\sin(2t)-2\cos(2t)\right)$$

Notons que :

$$F_A(0)=\frac{1}{5} \qquad F_A(x)=\frac{e^x}{5}\left(\cos(2x)+2\sin(2x)\right)$$

$$F_B(0)=\frac{-2}{5} \qquad F_B(x)=\frac{e^x}{5}\left(\sin(2x)-2\cos(2x)\right)$$

Il vient donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} A=\frac{e^x}{5}\left(\cos(2x)+2\sin(2x)\right)-\frac{1}{5} \\ B=\frac{e^x}{5}\left(\cos(2x)+2\sin(2x)\right)+\frac{2}{5} \end{array}}$$

---

Le 22 juillet 2007.

# EXANA193 – FPMS – Mons, juillet 2003.

Le polynôme de degré 4 suivant, appelé polynôme de Tchebychev, possède une propriété intéressante sur l'intervalle $[-1,1]$. Pour la découvrir, réaliser l'étude de la fonction ci-dessous et tracer son graphique.

$$f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

---

**Solution proposée par Steve Tumson**

Tout d'abord, il n'y a aucune restriction sur le domaine de définition et il est évident que la fonction est paire.

Il n'y a aucune asymptote au vu du commentaire précédent.

Etudions la variation de f grâce à sa dérivée première :

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = 32x^3 - 16x = 16x\left(2x^2 - 1\right) = 16x\left(\sqrt{2}x - 1\right)\left(\sqrt{2}x + 1\right)$$

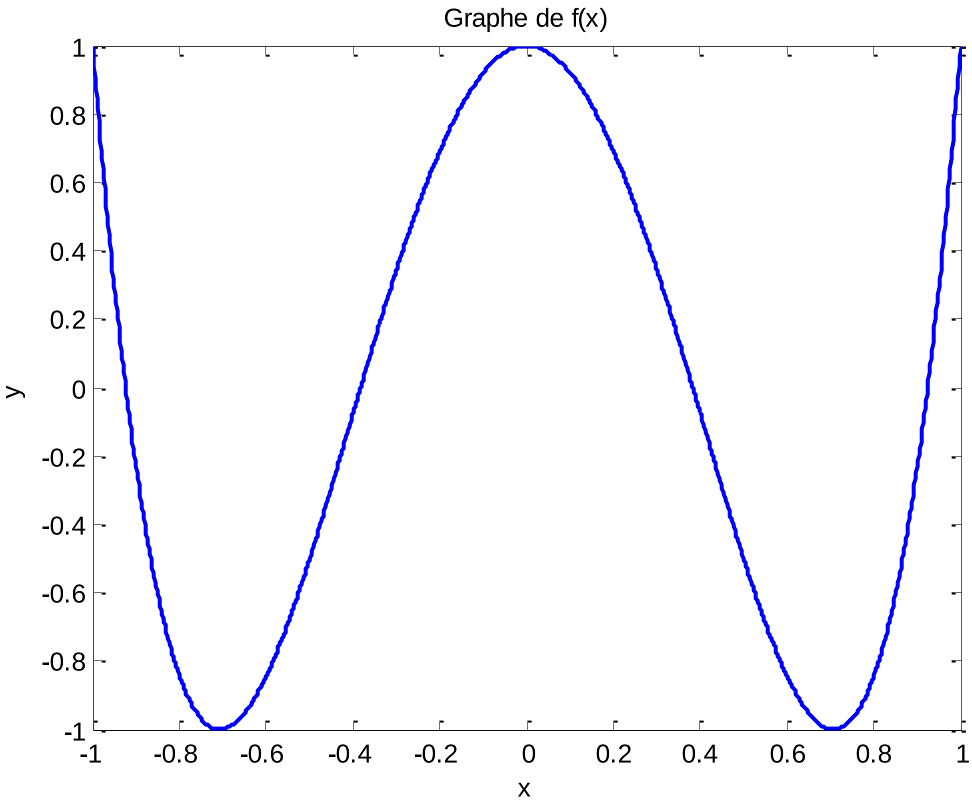
Tableau de variation :

| | | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $16x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\sqrt{2}x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\sqrt{2}x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $Min$ | $\nearrow$ | $Max$ | $\searrow$ | $Min$ | $\nearrow$ |

Etudions maintenant la concavité à l'aide de la dérivée seconde :

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = 96x^2 - 16 = 16\left(6x^2 - 1\right) = 16\left(\sqrt{6}x - 1\right)\left(\sqrt{6}x + 1\right)$$

| | | $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ | | $\frac{\sqrt{6}}{6}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{6}x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\sqrt{6}x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ | $PI$ | $-$ | $PI$ | $+$ |




Il reste à déterminer cette fameuse propriété intéressante entre $-1$ et 1.

Il faut se poser la question : à quoi me fait penser une fonction paire, bornée, définie sur un intervalle de $-1$ à 1 et dont le graphe nous inspire fortement une fonction trigonométrique .......

........ à une composition de la fonction trigonométrique cosinus et la fonction cyclométrique arccosinus bien entendu !

Il vient comme choix d'écrire que notre polynôme dans $[-1,1]$ est égale à une expression de type :

$$f(x) = a\cos\left(n(\arccos\left(bx\right)\right) \quad \text{ou} \quad f(x) = a\arccos\left(n(\cos\left(bx\right)\right)$$

Le domaine est $[-1,1]$ et le graphe final est borné ce qui nous incite fortement à travailler avec la première expression.

Le domaine de $f(x) = a\cos\left(n(\arccos\left(bx\right)\right)$ est $\left[\frac{-1}{b}, \frac{1}{b}\right]$ et nous travaillerons donc avec $b = 1$.

L'amplitude de $f(x) = a\cos\left(n(\arccos\left(bx\right)\right)$ est $a$ et nous travaillerons donc avec $a = 1$

Le paramètre $n$ quant à lui ne peut pas être nul ni valoir 1 dans quel cas la fonction s'écrirait bêtement $f(x) = \cos(\arccos(x)) = x$.

On peut écrire $f(x)=\cos\left(n(\arccos(x)\right)=\cos(n\beta)$ en posant $\beta=\arccos(x)$.

Dès lors, vu que : $f(x)=\cos(n\beta)=\Re\{\cos(n\beta)+i\sin(n\beta)\}$

(Note : $\Re\{z\}$ désigne la partie réelle de $z$)

La formule de Moivre nous permet d'écrire :

$$f(x)=\Re\{\cos(n\beta)+i\sin(n\beta)\}=\Re\left\{\left(\cos(\beta)+i\sin(\beta)\right)^n\right\}$$

Où en remplaçant $\beta$ :

$$f(x)=\Re\left\{\left(\cos(\arccos x)+i\sin(\arccos x)\right)^n\right\}=\Re\left\{\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right\}$$

Notre polynôme étant d'ordre 4, nous choisirons bien naturellement de travailler avec $n=4$.

Il vient donc :

$$f(x)=\Re\left\{\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)^4\right\}$$

Calculons

$$\begin{aligned}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)^4&=\left(\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)^2\right)^2=\left(\left(2x^2-1\right)+2ix\sqrt{1-x^2}\right)^2\\&=\left(2x^2-1\right)^2-4x^2\left(1-x^2\right)+4ix\left(2x^2-1\right)\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

Sa partie réelle est donc :

$$\left(2x^2-1\right)^2-4x^2\left(1-x^2\right)=4x^4+1-4x^2-4x^2+4x^4=8x^4-8x^2+1$$

On retrouve donc bien notre polynôme de départ !

<u>Conclusion</u> :

Dans l'intervalle $[-1,1]$, le polynôme $8x^4-8x^2+1$ est équivalent à $\cos(4\arccos(x))$

---

Le 22 juillet 2007.

# EXANA194 – FPMS – Mons, juillet 2003.

Soit la fonction $h(x)$ définie dans l'intervalle $[1,3]$ par :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) = \ln x & x \in [1,e] \\ g(x) = ax^2 + bx + 1 & x \in [e,3] \end{cases}$$

1. Déterminer *a* et *b* tels que la fonction *h* et sa dérivée soit continue en $x = e$

2. Calculer le volume engendré par la rotation de la représentation de $h(x)$ autour de l'axe des abscisses.

---

**Solution proposée par Steve Tumson**

1. $\begin{cases} f(e) = \ln e = 1 \\ g(e) = ae^2 + be + 1 \end{cases} \Rightarrow f(e) = g(e) \Leftrightarrow ae + b = 0$

$\begin{cases} f'(e) = \dfrac{1}{e} \\ g'(e) = 2ae + b \end{cases} \quad \Rightarrow f'(e) = g'(e) \Leftrightarrow \dfrac{1}{e} = 2ae + b$

Il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} ae + b = 0 \\ \dfrac{1}{e} = 2ae + b \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} a = e^{-2} \\ b = -e^{-1} \end{matrix}}$$

2. $V = \pi \int_1^3 h^2(x)dx = \pi \int_1^e f^2(x)dx + \pi \int_e^3 g^2(x)dx$

La première primitive se calcule par partie :

$$\int f^2(x)dx = \int \ln^2 x dx$$

$$u = \ln x \qquad \rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = \ln x dx \quad \rightarrow v = x \ln x - x$$

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - x \ln x - \int \ln x dx + \int dx = x \ln^2 x - x \ln x - x \ln x + x + x + C$$

$$= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$$

Et donc, $\displaystyle\int_1^e \ln^2 x dx = \left[ x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x \right]_1^e = e - 2$

La deuxième primitive se calcule plus facilement :

$$\int_e^3 g^2(x)dx = \int_e^3 \left( e^{-2}x^2 - e^{-1}x + 1 \right)^2 dx$$

$$= \int_e^3 \left( e^{-4}x^4 - 2e^{-3}x^3 + 3e^{-2}x^2 - 2e^{-1}x + 1 \right) dx$$

$$= \left[ \frac{e^{-4}x^5}{5} - \frac{e^{-3}x^4}{2} + e^{-2}x^3 - e^{-1}x^2 + x \right]_e^3$$

$$= \left( \frac{e^{-4}3^5}{5} - \frac{e^{-3}3^4}{2} + e^{-2}3^3 - e^{-1}3^2 + 3 \right) - \left( \frac{7e}{10} \right) \approx 0,31$$

Le volume engendré est donc : $\boxed{V \approx \pi \left( e - 2 + 0,31 \right) \approx \pi}$

---

Le 22 juillet 2007.

# EXANA195 – FPMS – Mons, juillet 2003.

Primitiver les fonctions suivantes :

$$f(x) = \sin^2 x \cos x$$
$$g(x) = \sin^3 x$$
$$h(x) = 9x\sin^2 x \cos x$$

---

**Solution proposée par Steve Tumson**

- $\int f(x)dx = \int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d\sin x = \dfrac{\sin^3 x}{3} + C$

- $\int g(x)dx = \int \sin^3 x dx = \int \left( \dfrac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4} \right) dx = \dfrac{3}{4}\int \sin x dx - \dfrac{1}{4}\int \sin(3x)dx$

$$= \frac{3}{4}\int \sin x dx - \frac{1}{4}\int \sin(3x)dx = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos(3x) + C$$

- $\int h(x)dx = \int 9x\sin^2 x \cos x dx = \int (9x)(f(x))dx$

Par partie : $\begin{array}{ll} u = 9x & \to du = 9dx \\ dv = f(x)dx & \to v = \dfrac{\sin^3 x}{3} \end{array}$

$$\int (9x)(f(x))dx = 3x\sin^3 x - 3\int \sin^3 x dx = 3x\sin^3 x - 3\int g(x)dx$$
$$= 3x\sin^3 x + \frac{9}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos(3x) + C$$

---

Le 22 juillet 2007.

# EXANA196 – FPMS – Mons, juillet 2003.

Etudier la fonction suivante :

$$f(x) = 2x + \frac{e^x}{e^x - 2}$$

---

**Solution proposée par Steve Tumson**

1. <u>Domaine</u> : $x \neq \ln 2$

2. Asymptotes :

   - Verticales : envisageable en $x = \ln 2$

$$\lim_{x \to \ln 2^+} \left( 2x + \frac{e^x}{e^x - 2} \right) = 2\ln 2 + \lim_{x \to \ln 2^+} \frac{e^x}{e^x - 2} = 2\ln 2 + \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \ln 2^-} \left( 2x + \frac{e^x}{e^x - 2} \right) = 2\ln 2 + \lim_{x \to \ln 2^-} \frac{e^x}{e^x - 2} = 2\ln 2 + \frac{2}{0^-} = -\infty$$

   - Obliques : critère de Cauchy pour asymptote d'équation $y = kx + t$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \left( 2 + \frac{e^x}{x\left(e^x - 2\right)} \right) = 2 + \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x\left(1 - e^{-x}\right)} = 2$$

$$t_1 = \lim_{x \to \infty} \left( f(x) - kx \right) = \lim_{x \to \infty} \left( 2x + \frac{e^x}{e^x - 2} - 2x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 - 2e^{-x}} = 1$$

$$t_2 = \lim_{x \to -\infty} \left( f(x) - kx \right) = \lim_{x \to -\infty} \left( 2x + \frac{e^x}{e^x - 2} - 2x \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x - 2} = 0$$

Il y a donc une asymptote verticale $x = \ln 2$ , une asymptote oblique à droite $y = 2x + 1$ et une asymptote oblique à gauche $y = 2x$.

3. Variation : s'étudie par le biais de la dérivée première

$$\frac{d}{dx} f(x) = 2 + \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{e^x - 2}\right) = 2 - \frac{2e^x}{\left(e^x - 2\right)^2} = \frac{2e^{2x} - 10e^x + 8}{\left(e^x - 2\right)^2}$$

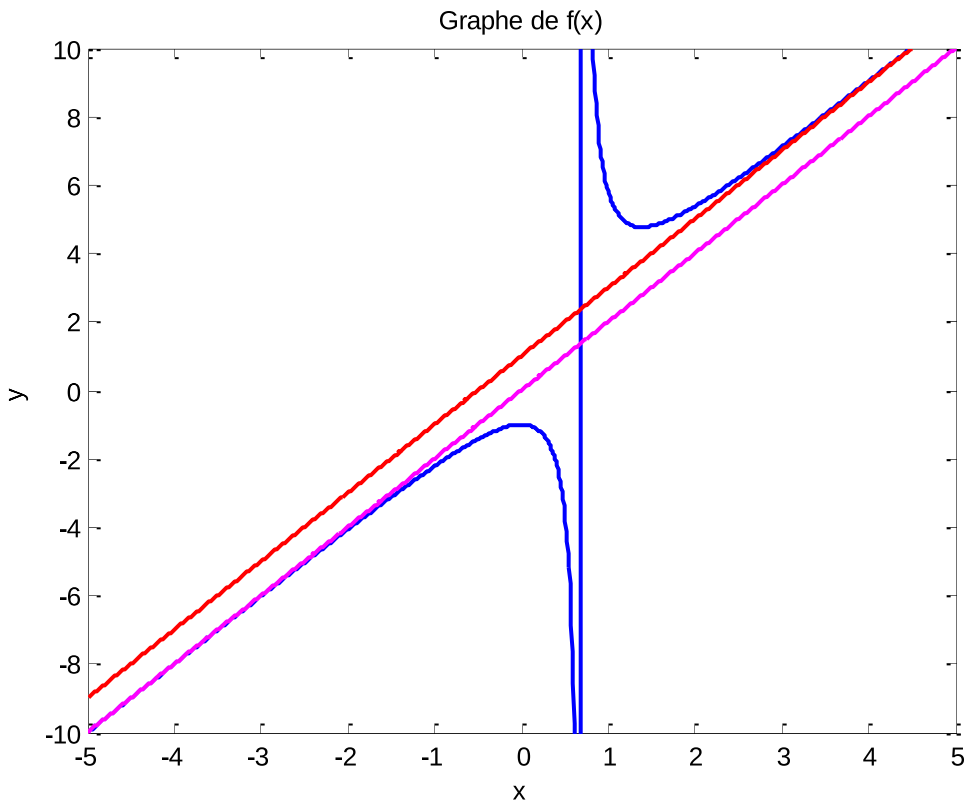
Si on pose $T = e^x$, le numérateur s'écrit $2T^2 - 10T + 8$ et s'annule pour $T = 4$ et $T = 1$

On écrit donc que les racines du numérateur sont : $\begin{cases} e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \\ e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4 \approx 1{,}38 \end{cases}$

Tableau de variation :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $0$ | | $\ln 2$ | | $\ln 4$ | |
| $2e^{2x} - 10e^x + 8$ | $+$ | $0$ | $-$ | $/$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $/$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $Max$ | $\searrow$ | $AV$ | $\searrow$ | $Min$ | $\nearrow$ |

La dérivée seconde n'est pas demandée.




Le 22 juillet 2007.

# EXANA197 – FPMS – Mons, juillet 2003.

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{(4x+9)e^x - 4x}{9(1-e^x)}$$

1. Déterminer les triplets $(a,b,c)$ et $(a',b',c')$ tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{1-e^x}$$
$$f(x) = a'x + b' + \frac{c'e^x}{1-e^x}$$

2. Analyser la fonction (la dérivée seconde est à calculer)

---

**Solution proposée par Steve Tumson**

1. Il suffit de tout ramener au même dénominateur et d'utiliser les coefficients indéterminés :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{1-e^x} = \frac{ax\left(1-e^x\right) + b\left(1-e^x\right) + c}{1-e^x} = \frac{\left(-ax-b\right)e^x + ax + b + c}{1-e^x}$$

Il faut donc : $\begin{cases} a = -\dfrac{4}{9} \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$

De la même façon pour la deuxième écriture :

$$f(x) = a'x + b' + \frac{c'e^x}{1-e^x} = \frac{a'x\left(1-e^x\right) + b'\left(1-e^x\right) + c'e^x}{1-e^x} = \frac{\left(-a'x - b' + c'\right)e^x + a'x + b'}{1-e^x}$$

Il faut donc : $\begin{cases} a' = -\dfrac{4}{9} \\ b' = 0 \\ c' = 1 \end{cases}$

2. Nous disposons donc de 3 formes différentes de notre fonction :

$$f(x)=\frac{(4x+9)e^x-4x}{9(1-e^x)}$$

$$f(x)=-\frac{4}{9}x-1+\frac{1}{1-e^x}$$

$$f(x)=-\frac{4}{9}x+\frac{e^x}{1-e^x}$$

Le domaine de définition n'est pas trop compliqué : $x\neq 0$

Les asymptotes maintenant :

- Verticale : on s'attend à en trouver une en $x=0$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{4}{9}x-1+\frac{1}{1-e^x}\right)=-1+\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{4}{9}x-1+\frac{1}{1-e^x}\right)=-1+\frac{1}{0^+}=+\infty$$

- Oblique : on utilise le critère de Cauchy pour une asymptote d'équation $y=kx+t$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{4}{9}x+\frac{e^x}{1-e^x}\right)=-\frac{4}{9}+\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x\left(1-e^x\right)}=-\frac{4}{9}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\left(e^{-x}-1\right)}=-\frac{4}{9}$$

$$t_1=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(-\frac{4}{9}x+\frac{e^x}{1-e^x}\right)-\left(-\frac{4}{9}x\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{1-e^x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{-x}-1}=-1$$

$$t_2=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\left(-\frac{4}{9}x+\frac{e^x}{1-e^x}\right)-\left(-\frac{4}{9}x\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)=0$$

Il y a donc une asymptote verticale, une asymptote oblique à droite $y=-\frac{4}{9}x-1$

et une asymptote oblique à gauche $y=-\frac{4}{9}x$

Pour l'étude de la variation (dérivée première), la forme la plus simple pour le calcul est clairement la seconde :

$$f'(x)=\frac{df}{dx}=-\frac{4}{9}+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-e^x}\right)=-\frac{4}{9}+\frac{e^x}{\left(1-e^x\right)^2}=\frac{-4e^{2x}+17e^x-4}{9\left(1-e^x\right)^2}$$

Le numérateur se factorise en posant $T=e^x$, il vient : $-4T^2+17T-4$

Les solutions sont : $T=4$ et $T=\frac{1}{4}$

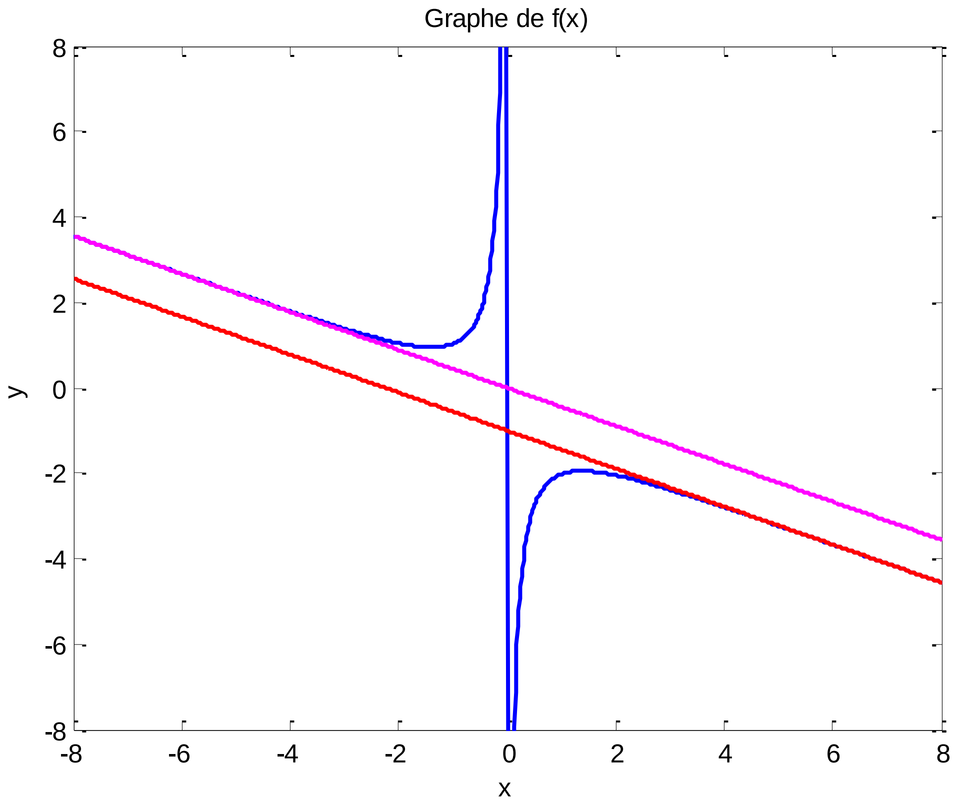
Ou encore : $\begin{array}{l} e^x=4\Leftrightarrow x=\ln 4 \\ e^x=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=-\ln 4\end{array}$

Tableau de variation

| | | $-\ln 4$ | | $0$ | | $\ln 4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-4e^{2x}+17e^{x}-4$ | $-$ | $0$ | $+$ | / | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | / | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | *Min* | $\nearrow$ | *AV* | $\nearrow$ | *Max* | $\searrow$ |

Il reste à simplement calculer la dérivée seconde :

$$f''(x)=\frac{d^2 f}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{\left(1-e^x\right)^2}\right)=\frac{e^x\left(1-e^x\right)^{\cancel{2}}+2e^{2x}\cancel{\left(1-e^x\right)}}{\left(1-e^x\right)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{e^x\left(1+e^x\right)}{\left(1-e^x\right)^3}$$




Le 22 juillet 2007.

## EXANA198 – FPMS – Mons, juillet 2003.

Lorsque le paramètre $m \geq 0$, rechercher le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f(x) = \sqrt{\ln\left(\sqrt{\frac{x^2+m}{x+4}}\right)}$$

**Solution proposée par Steve Tumson**

- La première condition est sur la première racine carrée (dans le logarithme).
  Le paramètre étant toujours positif, le numérateur l'est aussi.
  La première condition est donc simplement : $x > -4$

- La deuxième condition est sur la seconde racine.
  Un logarithme est positif pour toute valeur de $x$ supérieure à 1.
  $$\ln\left(\sqrt{\frac{x^2+m}{x+4}}\right) \geq 0$$
  La fonction logarithme étant bijective, on peut écrire :
  $$\sqrt{\frac{x^2+m}{x+4}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+m}{x+4} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + (m-4)}{x+4} \geq 0$$
  Vu la première condition d'existence, on peut écrire plus simplement :
  $$x^2 - x + (m-4) \geq 0$$

  Le discriminant de ce second degré s'écrit : $\rho = 17 - 4m$

  - Si $m > \frac{17}{4}$ le polynôme n'admet aucune racine réelle :
    l'inéquation est vérifiée $\forall x \in \left]-4, +\infty\right[$
  - Si $0 \leq m < \frac{17}{4}$ le second degré admet deux racines réelles distinctes
    $0 \leq m < \frac{17}{4}$ et l'inéquation est vérifiée
    $$\forall x \in \left]-4, \frac{1-\sqrt{17-4m}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{17-4m}}{2}, +\infty\right[$$
  - Si $m = \frac{17}{4}$ le second degré admet une racine double réelle $x_{1,2} = \frac{e^2}{2}$
    et l'inéquation est vérifiée $\forall x \in \left]-4, +\infty\right[$

Le 22 juillet 2007.

# EXANA199 – FPMS – Mons, Juillet 2004. (ANA04.07)

On demande de représenter graphiquement, **sans faire d'étude de fonction**, la fonction suivante :

$$f(\phi) = \left|1 - \left(\cos N\phi + i \sin N\phi\right)\right|^2$$

pour $\phi$ allant de $0$ à $2\pi$ et pour $N$ prenant successivement les valeurs : $N : 1, 2, 3, \ldots 10$

---

**Solution proposée par Steve Tumson**

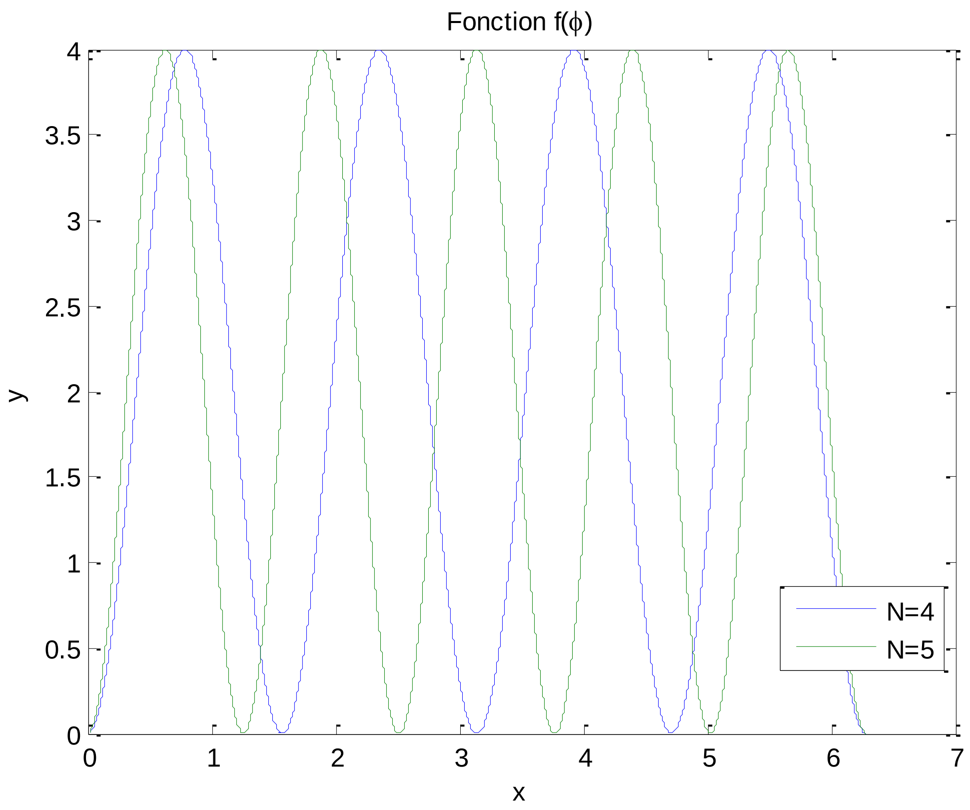
Il suffit de calculer la fonction de façon à éliminer le module.

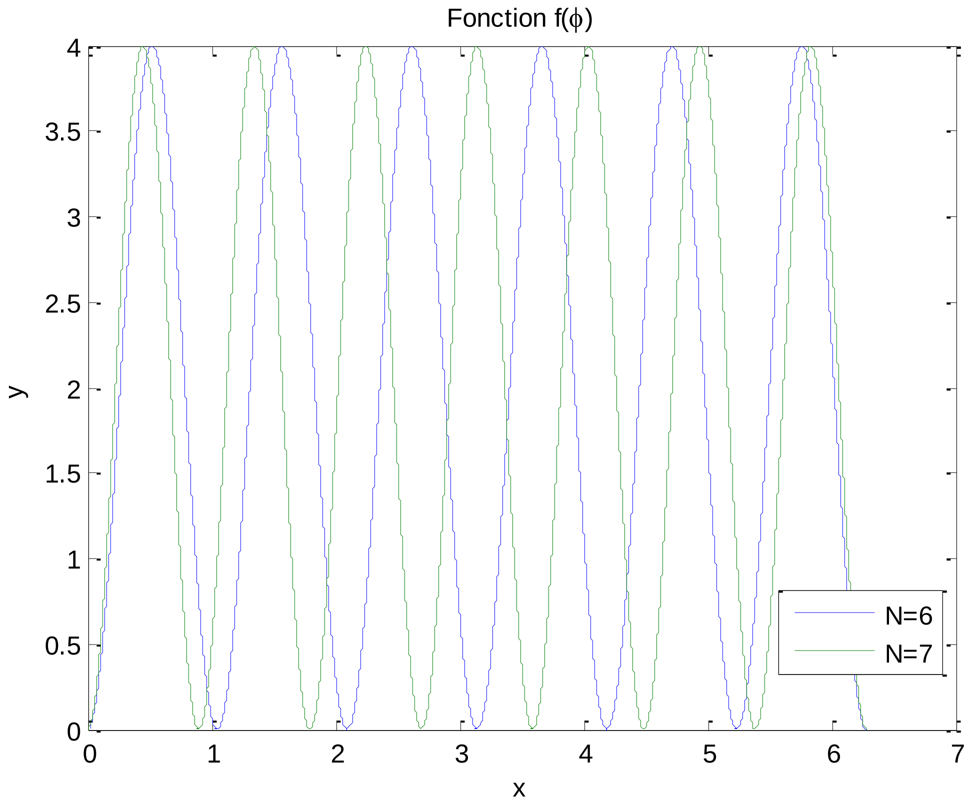
$$\left|1 - \left(\cos N\phi + i \sin N\phi\right)\right| = \sqrt{\left(1 - \cos N\phi\right)^2 + \left(\sin N\phi\right)^2} = \sqrt{2 - 2\cos N\phi}$$

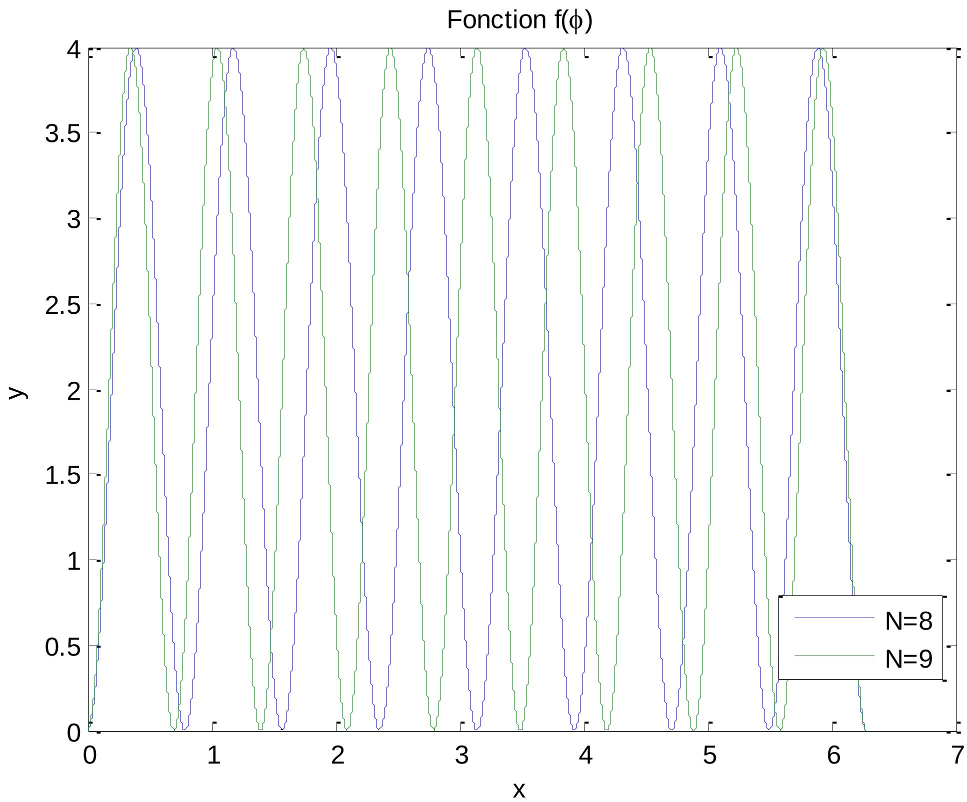
Et donc en fait :

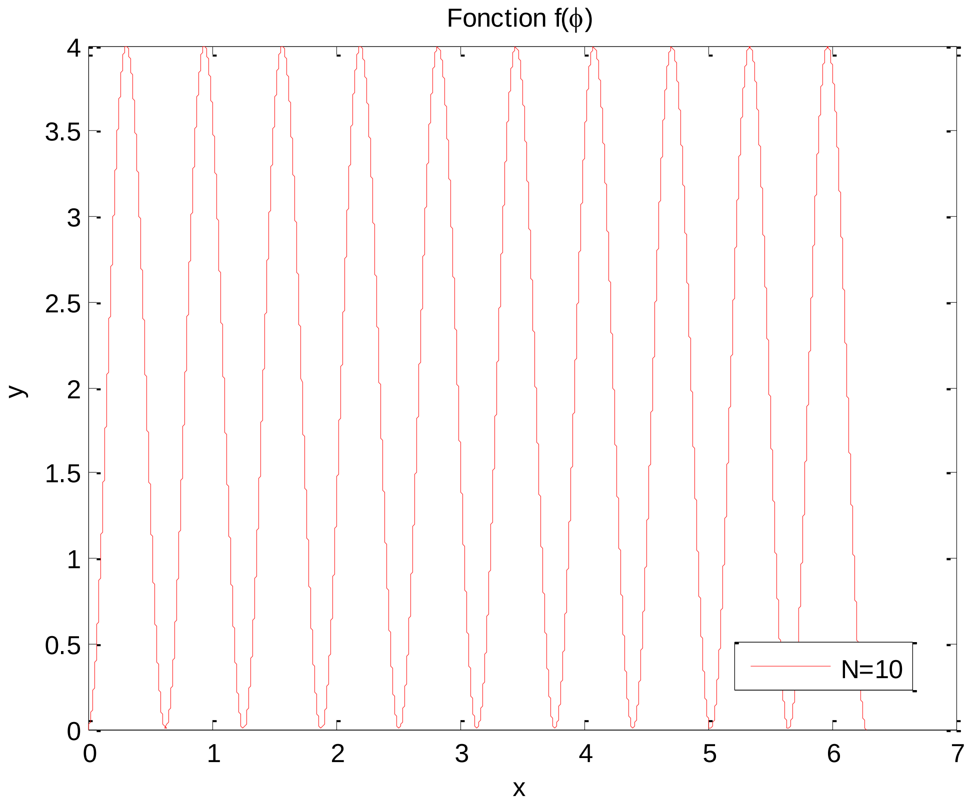
$$f(\phi) = 2\left(1 - \cos N\phi\right)$$

C'est le graphe d'une cosinusoïde d'amplitude 2 et de période $T = \dfrac{2\pi}{N}$




Fonction f(ϕ)
y
x
N=6
N=7


Fonction f(ϕ)
y
x
N=8
N=9




20 juillet 07.