Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 22

EXANA220 – EXANA229

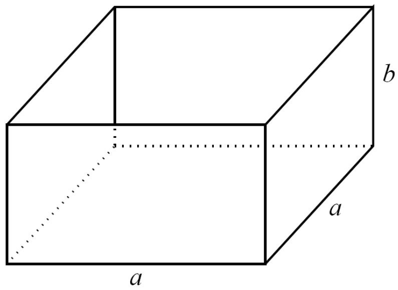
http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXANA220 – FSA – UCL – Louvain, septembre 07.

Un chocolatier veut concevoir une nouvelle boîte avec un couvercle carré :



La boîte a deux côtés de longueur *a* (en m), et sa hauteur mesure *b* (en m). La quantité de carton nécessaire pour construire la boîte dépend de la surface des quatre faces latérales ainsi que de la surface du fond de la boîte (le couvercle n'est pas compté).
Etant donné une quantité de carton disponible pour construire une boîte correspondant à une surface fixée *S* (en m^2), on souhaite calculer les valeurs de *a* et *b* qui maximisent le volume de la boîte.
Pour résoudre cette question, on propose de procéder comme suit :

1. Exprimez algébriquement la quantité de carton nécessaire `a la construction d'une boîte de dimensions *a* et *b*, ainsi que le volume de la boîte correspondante.
2. A l'aide de ceux deux expressions, exprimez le volume de la boîte comme une fonction dépendant d'une seule variable.
3. Déterminez alors le volume maximal atteignable par une boîte, ainsi que les dimensions correspondantes *a* et *b*.

Surface de la boîte : $S = a^2 + 4ab \to b = \frac{S - a^2}{4a}$

Volume de la boîte : $V = a^2 b \to V = \frac{a}{4}\left(S - a^2\right)$

Le volume sera maximum si la dérivée en fonction de a est nulle :

$$\frac{dV}{da} = \frac{1}{4}\left(S - a^2\right) - \frac{1}{4}2a^2 = \frac{S - 3a^2}{4} = 0 \to a = \sqrt{\frac{S}{3}}$$

Il s'agit d'un maximum : $\begin{cases} a < \sqrt{\frac{S}{3}} \to \frac{dV}{da} > 0 \\ a > \sqrt{\frac{S}{3}} \to \frac{dV}{da} < 0 \end{cases}$

Donc : $S = \frac{S}{3} + 4\sqrt{\frac{S}{3}}.b \to b = \sqrt{\frac{S}{3}}$

Autrement dit : $a = b$ et la boîte est un cube. (Résultat attendu)

Enfin, le volume vaut : $V = \left(\frac{S}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

---

30 jan 08

EXANA221 – FACS – ULBL – Bruxelles, juillet 07.

Soit la fonction *f* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{|x|}\, e^{-x^2}$$

et $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = f(x)$ ($\mathcal{C}$ est le graphe de *f*).

a) La fonction *f* est-elle dérivable en 0 ? Justifier (utiliser la définition de la dérivée).
b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$
c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à *C* au point d'abscisse 1
d) Etablir le tableau des variations de *f*; *f '* et *f''* contenant
    a. les racines de *f* , *f'* et *f''*
    b. les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$
    c. les extrema de *f*, les domaines de croissance et de décroissance de *f*
    d. les points d'inflexion de *f* et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de *f*
e) Tracer soigneusement la courbe $\mathcal{C}$ d'après les résultats du d).

a) Calculons

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{|x+h|}e^{-(x+h)^2}-\sqrt{|x|}e^{-x^2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{|x+h|}e^{-(x+h)^2}-\sqrt{|x+h|}e^{-x^2}+\sqrt{|x+h|}e^{-x^2}-\sqrt{|x|}e^{-x^2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\sqrt{|x+h|}\frac{e^{-(x+h)^2}-e^{-2x^2}}{h}+\lim_{h\to0}e^{-x^2}\frac{\sqrt{|x+h|}-\sqrt{|x|}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\sqrt{|x+h|}.\lim_{h\to0}\frac{e^{-(x+h)^2}-e^{-2x^2}}{h}+\lim_{h\to0}e^{-x^2}.\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{|x+h|}-\sqrt{|x|}}{h}$$

$$=\sqrt{|x|}.\left(e^{-x^2}\right)'+e^{-x^2}+\left(\sqrt{|x|}\right)'=\sqrt{|x|}.e^{-x^2}.(-2x)+\frac{1}{2\sqrt{|x|}}(|x|)'$$

$$=\frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{|x|}}\left(-4x.|x|+(|x|)'\right)$$

Supposons $\underline{x>0}\to|x|=x\ \to f'(x)=\frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}\left(-4x^2+1\right)$

La dérivée en $x=0$ est alors : $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}\left(-4x^2+1\right)=+\infty$

Supposons $\underline{x<0}\to|x|=-x\ \to f'(x)=\frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{-x}}\left(+4x^2-1\right)$

La dérivée en $x=0$ est alors : $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{-x}}\left(+4x^2-1\right)=-\infty$

La dérivée à gauche et à droite sont donc différentes.

La fonction n'est pas dérivable en $x=0$. Il y a un point de rebroussement.

$b)$ Notons que la fonction est paire car $f(-x)=f(x)$

Nous pouvons donc étudier la fonction pour $x>0$.

Pour $x<0,$ il suffira de faire une symétrie d'axe Oy

Soit donc le <u>cas : $x>0$</u> $\rightarrow f(x)=\sqrt{x}e^{-x^2}$

La dérivée première a été calculée au point $a)$: $f'(x)=\dfrac{e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}(1-4x^2)$

Ses racines sont : $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{1}{2} \text{ à rejeter, mais qui correspond au cas } x<0 \end{cases}$

La dérivée seconde est :

$$f''(x)=\frac{e^{-x^2}(-2x).2\sqrt{x}-e^{-x^2}.2.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{4x}(1-4x^2)+\frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}(-8x)$$

$$=\frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}\left[(-4x^2-1)(1-4x^2)-16x^2\right]=\frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}(16x^4-16x^2-1)$$

Ses racines sont : $\begin{cases} x^2=\dfrac{2+\sqrt{5}}{4}\rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2}\simeq 1.029 \\ x=-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2} \text{ Correspond au cas } x<0 \end{cases} \\ x^2=\dfrac{2-\sqrt{5}}{4}<0 \text{ A rejeter} \end{cases}$

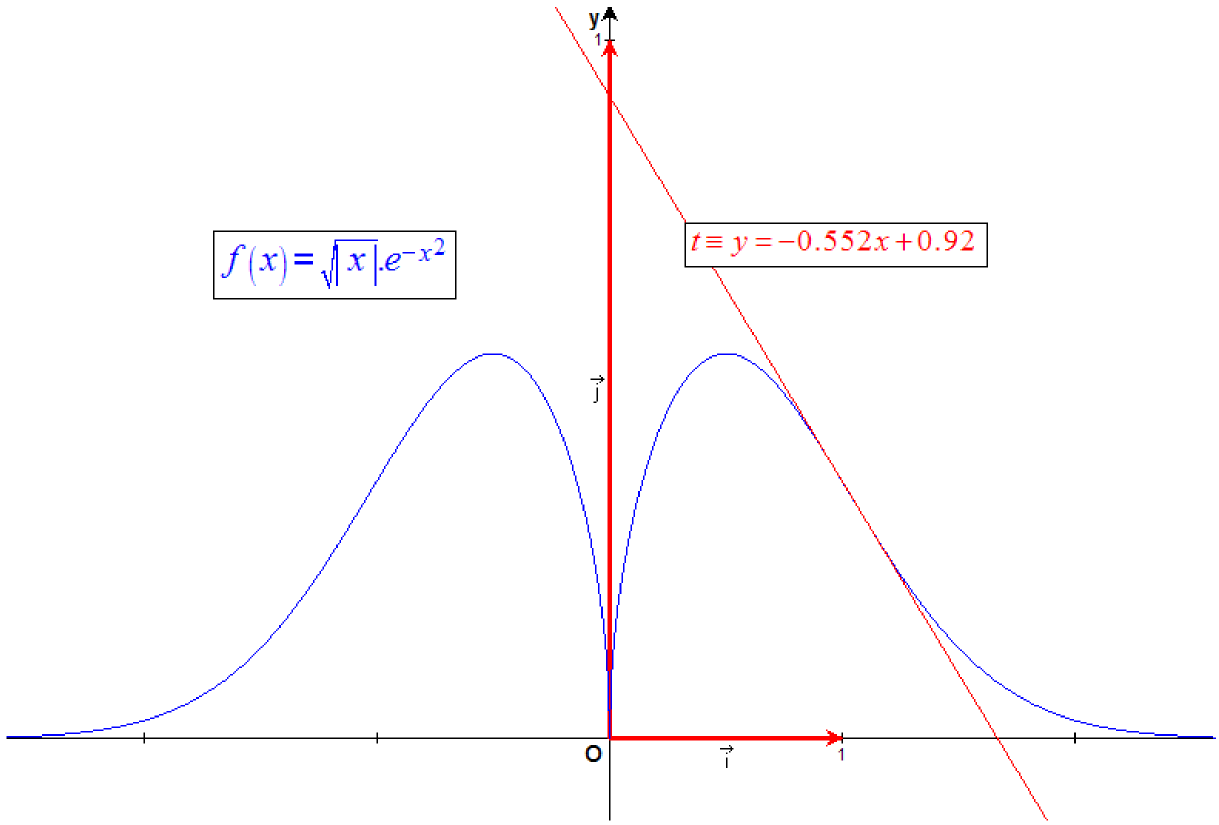
$c)$ $f'(x)=\dfrac{e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}(1-4x^2)\rightarrow f'(1)=-\dfrac{3}{2e}\simeq -0.552$

$f(1)=\dfrac{1}{e}\simeq 0.368$

La tangente est : $t\equiv y-f(1)=f'(1)(x-1)\rightarrow \boxed{t\equiv y=-0.552x+0.92}$

Tableau des variations

	$-\infty$		-1.029		-0.5		0		0.5		1.029		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$_{-\infty}\vert_{+\infty}$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Point de	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	
		$\cup$	$PI:0.352$	$\cap$	0.55	$\cap$	rebroussement	$\cap$	0.55	$\cup$	$PI:0.352$	$\cup$	



30 jan 08.

EXANA222 – FACS – ULBL – Bruxelles, juillet 07.

Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x)=\frac{1}{1+e^x} \quad , \quad g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

On note

$$I=\int_0^1 f(x)dx \quad , \quad J=\int_0^1 g(x)dx$$

a) Calculer $f(x)+g(x)$, en déduire $I+J$ (sans calculer I et J)
b) Calculer J et en déduire I
c) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}+ : f(x) \leq g(x)$
d) Calculer l'aire du domaine

$$D:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq 1,\ \ f(x)\leq y\leq g(x)\right\}$$

$$a)\ f(x)+g(x)=\frac{1}{1+e^x}+\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{1}{1+e^x}+\frac{e^x}{e^x+1}=1$$

Par conséquent :

$$I+J=\int_0^1\frac{1}{1+e^x}\,dx+\int_0^1\frac{1}{1+e^{-x}}\,dx=\int_0^1\left(\frac{1}{1+e^x}+\frac{1}{1+e^{-x}}\right)dx=\int_0^1 1\,dx=\left[x\right]_0^1=1$$

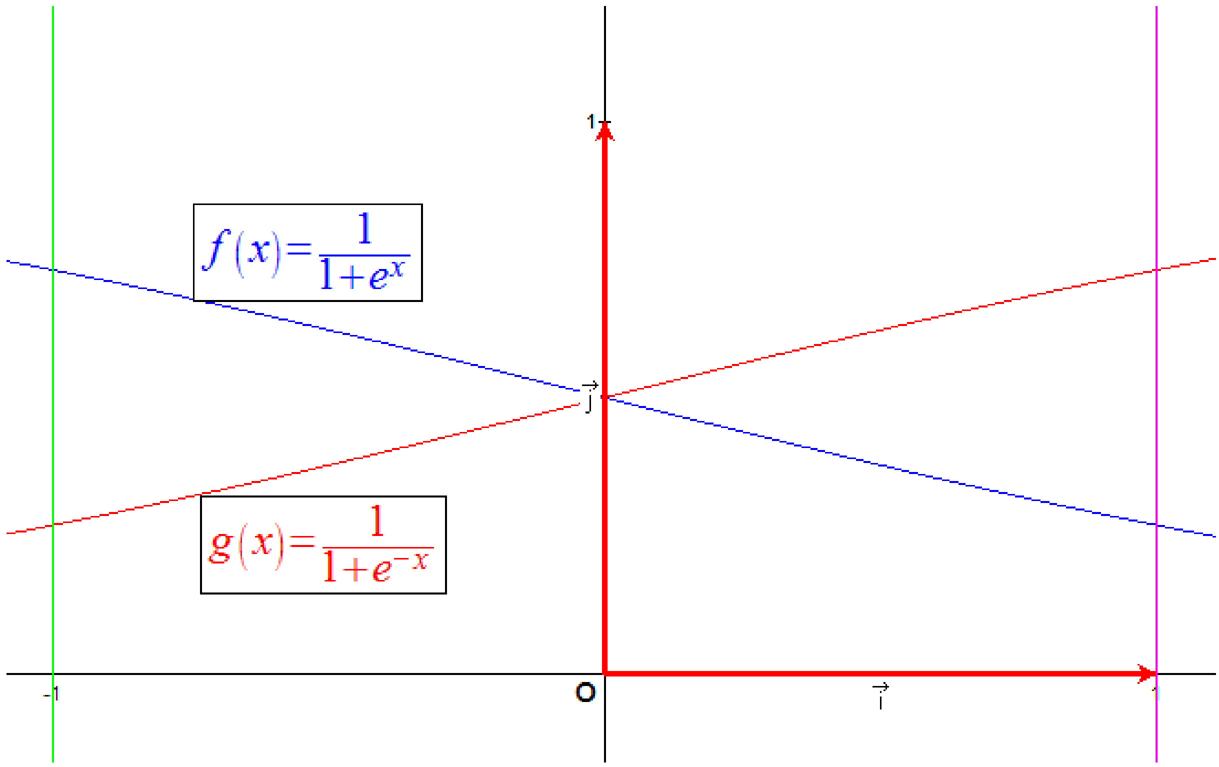
$$b)\ J=\int_0^1\frac{1}{1+e^{-x}}\,dx=\int_0^1\frac{d\left(e^x+1\right)}{1+e^{-x}}=\left[\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1=\ln(e+1)-\ln 2=\ln\frac{e+1}{2}\simeq 0.62$$

Donc : $I=1-J=1-\ln\dfrac{e+1}{2}=\ln e-\ln\dfrac{e+1}{2}=\ln\dfrac{2e}{e+1}\simeq 0.38$

$$c)\ g(x)-f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}-\frac{1}{1+e^x}=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{1}{1+e^x}=\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}^+ : e^x\geq 1\rightarrow\begin{cases}e^x-1\geq 0\\ e^x+1>0\end{cases}\rightarrow\frac{e^x-1}{e^x+1}\geq 0\rightarrow g(x)-f(x)\geq 0\rightarrow f(x)\leq g(x)$$

$$d)\ D=\int_0^1\left(g(x)-f(x)\right)dx=J-I=\ln\frac{e+1}{2}-\ln\frac{2e}{e+1}=\ln\frac{(e+1)^2}{4e}\simeq 0.24$$



30 jan 08.

EXANA223 – FACS – ULBL – Bruxelles, juillet 07.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

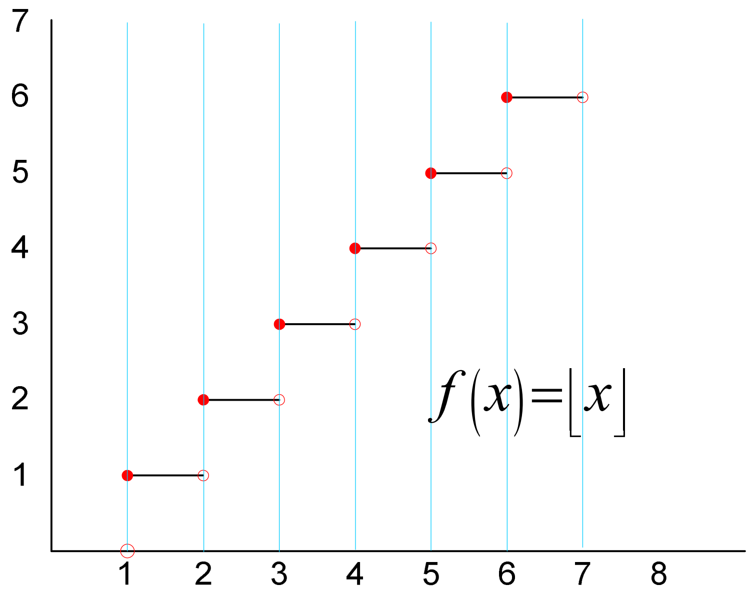
$$\int_0^n \lfloor x \rfloor \, dx$$

où $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier $\leq x$

b) Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Calculer

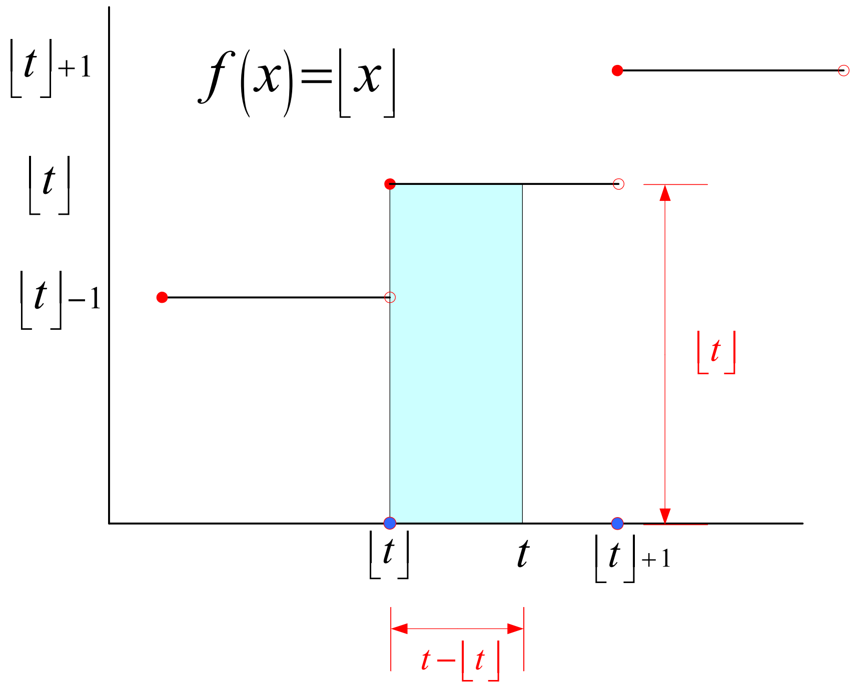
$$\int_0^t \lfloor x \rfloor \, dx$$

Indication : $\lfloor t \rfloor \leq t < \lfloor t \rfloor + 1$



a) Comme la figure ci-dessus le montre :

$$\int_0^n \lfloor x \rfloor \, dx = 0 + 1 + 2 + \ldots + n - 2 = \sum_{i=0}^{i=n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$



b) Notons que : $\lfloor t \rfloor \leq t < \lfloor t \rfloor + 1$ et que $\lfloor t \rfloor \in \mathbb{N}$

Donc : $\int_0^t \lfloor x \rfloor dx = \underbrace{\int_0^{\lfloor t \rfloor} \lfloor x \rfloor dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\lfloor t \rfloor}^t \lfloor x \rfloor dx}_{I_2}$

$$I_1 = \int_0^{\lfloor t \rfloor} \lfloor x \rfloor dx = \frac{\lfloor t \rfloor (\lfloor t \rfloor - 1)}{2}$$

$I_2 = (t - \lfloor t \rfloor).\lfloor t \rfloor$ Voir figure

$$\rightarrow \int_0^t \lfloor x \rfloor dx = \frac{\lfloor t \rfloor (\lfloor t \rfloor - 1)}{2} + (t - \lfloor t \rfloor).\lfloor t \rfloor = \frac{\lfloor t \rfloor}{2}(\lfloor t \rfloor - 1 + 2t - 2\lfloor t \rfloor)$$

$$= \frac{\lfloor t \rfloor}{2}(2t - \lfloor t \rfloor - 1)$$

---

30 jan 08.

EXANA224 – FACS – ULBL – Bruxelles, septembre 07.

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 8|x|e^{-\frac{x^2}{2}}$$

et $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = f(x)$ ($\mathcal{C}$ est le graphe de f).

a) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier (utiliser la définition de la dérivée).
b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$
c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à C au point d'abscisse 1
d) Etablir le tableau des variations de f; f' et f'' contenant
   a. les racines de f, f' et f''
   b. les signes de $f'(x)$ et de $f'(x)$
   c. les extréma de f, les domaines de croissance et de décroissance de f
   d. les points d'inflexion de f et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de f
e) Tracer soigneusement la courbe $\mathcal{C}$ d'après les résultats du d).

---

a) Calculons

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{8|x+h|.e^{-\frac{(x+h)^2}{2}} - 8|x|.e^{-\frac{x^2}{2}}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8|x+h|.e^{-\frac{(x+h)^2}{2}} - 8|x+h|.e^{-\frac{x^2}{2}} + 8|x+h|.e^{-\frac{x^2}{2}} - 8|x|.e^{-\frac{x^2}{2}}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 8|x+h|.\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{(x+h)^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}}}{h} + \lim_{h\to 0} 8e^{-\frac{x^2}{2}}.\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}$$

$$= 8|x|.\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' + e^{-\frac{x^2}{2}}.(|x|)' = -8x|x|.e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}}.(|x|)'$$

$$= 8e^{-\frac{x^2}{2}}\left[-x|x| + (|x|)'\right]$$

1) <u>cas $x > 0$</u> $\to |x| = x \to f'(x) = 8e^{-\frac{x^2}{2}}(-x^2+1)$

La limite de la dérivée en $x = 0$ est $\lim_{x\to 0} f'(x) = 8\lim_{x\to 0} e^{-\frac{x^2}{2}}(-x^2+1) = 8$

2) <u>cas $x < 0$</u> $\to |x| = -x \to f'(x) = 8e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)$

La limite de la dérivée en $x = 0$ est $\lim_{x\to 0} f'(x) = 8\lim_{x\to 0} e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1) = -8$

Les dérivées à gauche et à droite ne sont pas égales.

La fonction n'est pas dérivable en $x = 0$ où nous avons un point anguleux

$b)$ Notons que la fonction $f(x)$ est paire. Nous étudierons donc la fonction pour $x > 0$.

Pour $x < 0$, nous ferons une symétrie d'axe Oy.

Soit donc $\underline{x > 0}$

Dans ce cas la dérivée première a été calculée au point $a)$: $f'(x) = 8e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1-x^2\right)$

Ses racines sont : $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \text{ A rejeter, mais correspond au cas } x < 0 \end{cases}$

La dérivée seconde est : $f''(x) = 8e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)\left(1-x^2\right) + 8e^{-\frac{x^2}{2}}(-2x)$

$$= 8xe^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^2-3\right)$$

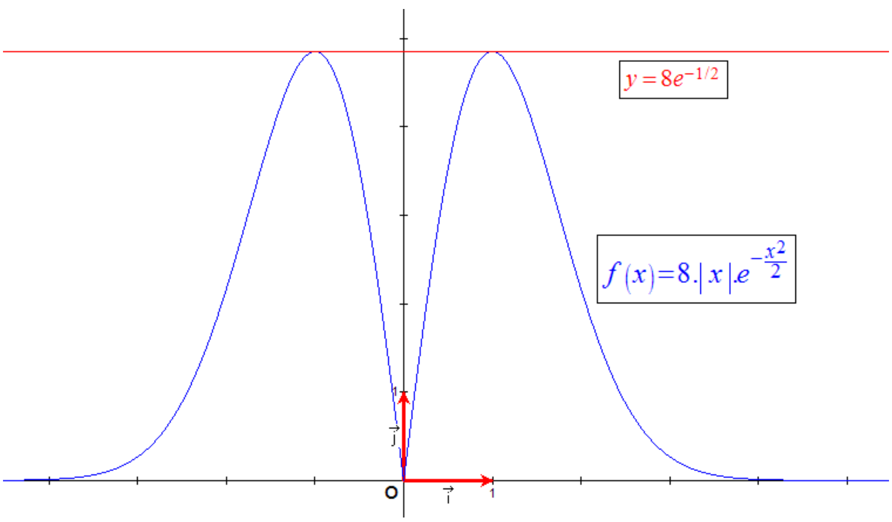
Ses racines sont : $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \text{ Correspond au cas } x < 0 \end{cases}$

$c)$ La tangente en $x = 1$ est simplement la droite horizontale : $y = f(1) = 8e^{-\frac{1}{2}} \simeq 4.85$

Puisque $f'(1) = 0$

$d)$ <u>Tableau des variations</u>

		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-8 \mid +8$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$ $\cup$	$\nearrow$ $I:\left(-\sqrt{3}, 3.09\right)$	$\nearrow$ $\cap$	Max $\cap$	$\searrow$ $\cap$	0	$\nearrow$ $\cap$	Max $\cap$	$\searrow$ $\cap$	$\searrow$ $I:\left(\sqrt{3}, 3.09\right)$	$\searrow$ $\cup$



30 jan 08

EXANA225 – FACS – ULBL – Bruxelles, septembre 07.

a) Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par

$$f(x) = \min\{|x|, x^2\}$$

où min $\{a, b\}$ est le plus petit des deux nombres réels a et b

– Tracer le graphe de f

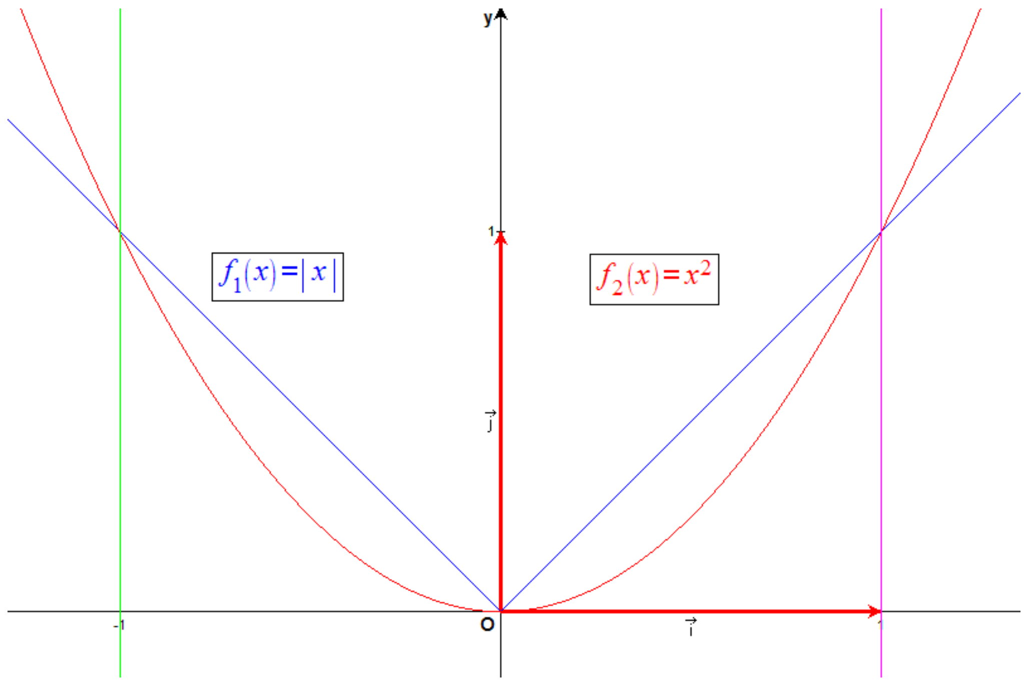
– Pour $a > 0$, calculer en discutant les valeurs de a

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

b) Calculer

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(\tan x)\,dx$$

Indication : Scinder cette intégrale en une différence de deux intégrales et, dans l'une poser $u = \frac{\pi}{2} - x$



a) Il est facile de vérifier

$$\begin{cases} x^2 \leq |x| & \text{si} \quad x \in [-1,1] \\ x^2 > |x| & \text{si} \quad x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[\end{cases}$$

De plus, remarquons que la fonction est paire

Donc :

$$a \in [-1,1] \rightarrow f(x) = \min\{|x|, x^2\} = x^2$$

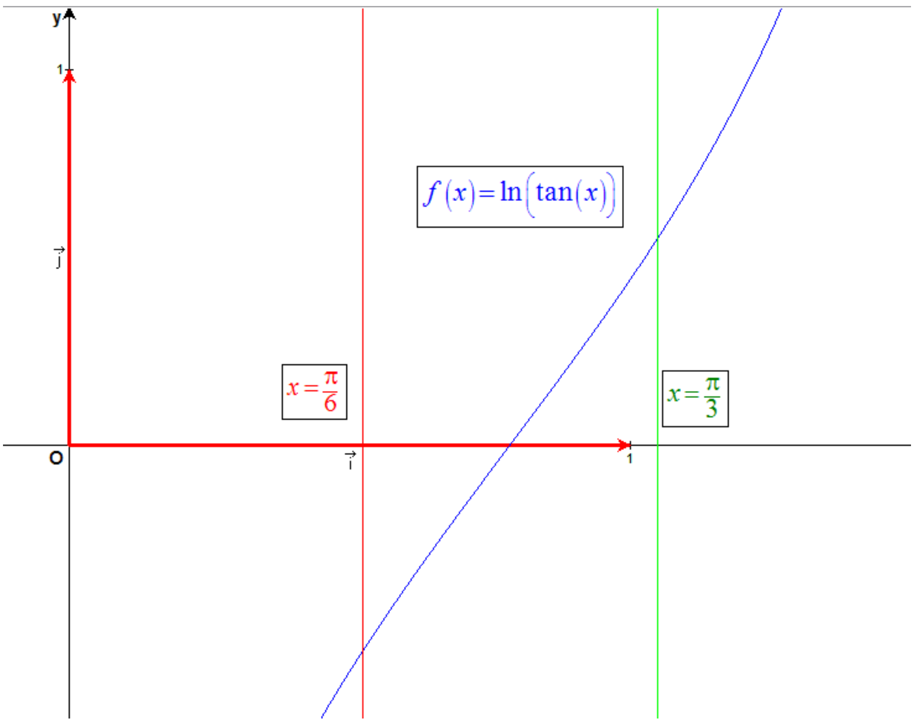
$$\rightarrow \int_{-a}^{a} x^2 dx = 2\int_0^a x^2 dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2a^3}{3}$$

$$a = 1 \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$

$$\rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^a f(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^1 x^2 dx + 2\int_1^a x\,dx$$

$$= \frac{2}{3} + 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^a = \frac{2}{3} + a^2 - 1 = a^2 - \frac{1}{3}$$



$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\ln(\tan x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\tan x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\ln(\tan x)\,dx$$

Dans le deuxième terme, posons : $u=\frac{\pi}{2}-x\rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}\rightarrow u=\frac{\pi}{4}\\ x=\frac{\pi}{3}\rightarrow u=\frac{\pi}{6}\\ dx=-du\\ \tan(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\cot u=\frac{1}{\tan u}\end{cases}$

Donc : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\ln(\tan x)\,dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\ln\left(\frac{1}{\tan u}\right)du=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{1}{\tan u}\right)du=-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\tan u)\,du$

Finalement, : $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\ln(\tan x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\tan x)\,dx-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\tan u)\,du=0$

---

30 jan 08

EXANA226 – FACS – ULBL – Bruxelles, septembre 07.

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormé $Oxyz$, soient

– S la region du plan Oxy définie par

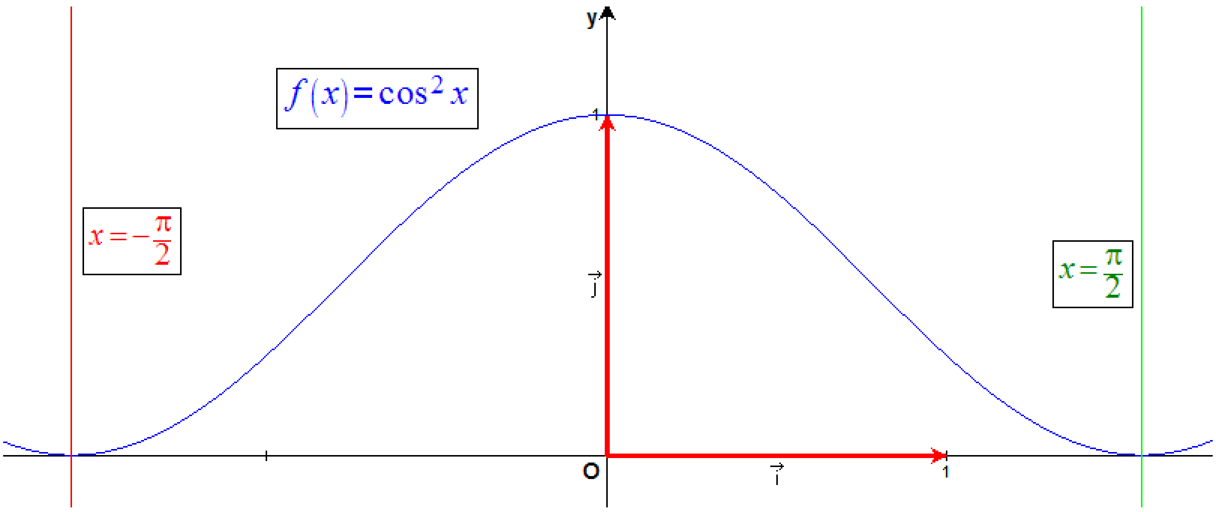
$$S = \left\{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \cos^2 x \right\}$$

– D le solide engendré par la rotation d'un tour complet de S autour de l'axe Ox

a) Faire le croquis de S

b) Calculer l'aire de S

c) Calculer le volume de D



$a)\ f(x)=\cos^2 x$ est une fonction paire.

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x+1}{2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}=\boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$b)\ D=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 x\right)^2 dx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx$$

Linéarisons $\cos^4 x$ sachant que $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$$\cos^4 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\frac{1}{2^4}\left(e^{4ix}+4e^{3ix}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}\right)$$

$$=\frac{1}{2^3}\left(\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2}+4\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}+3\right)=\frac{1}{8}\left(\cos 4x+4\cos 2x+3\right)$$

Donc : $D=\dfrac{2\pi}{8}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos 4x+4\cos 2x+3\right)dx=\frac{2\pi}{8}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4x\,dx+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx+3\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\right)$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{4}\left[\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{4}{2}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+3\frac{\pi}{2}\right)=\boxed{\frac{3\pi^2}{8}}$$

30 jan 08.

EXANA227 – FACSA – ULG– Liège, juillet 08.

Soit la fonction

$$f(x) = x + \exp\left(\frac{-a}{x}\right)$$

où a est un paramètre réel positif ou nul. En discutant en fonction de a s'il y a lieu,

i. déterminez le domaine de définition de f ;

ii. déterminez les éventuelles asymptotes du graphe de f ;

iii. déterminez et caractérisez les éventuels extrema de f ;

iv. étudiez la concavité du graphe de f et situez-en les éventuels points d'inflexion ;

v. esquissez le graphe de f .

Nous reprenons la solution proposée par l'université.
http://www.montefiore.ulg.ac.be/%7Egribomon/prov/Algebre.pdf

Notons d'abord le cas particulier $a = 0$. Dans ce cas, la fonction est donnée par $f(x) = x + 1$.

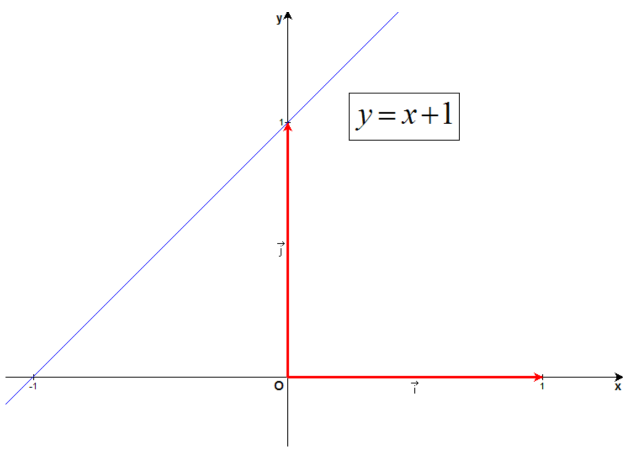
i. Elle est définie sur $\mathbb{R}$.

ii. Elle se confond avec son asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$

iii. Elle n'a pas d'extremum.

iv. Elle n'a pas de point d'inflexion

v. Son graphe est représenté comme suit



Considérons maintenant le cas $a > 0$.

i. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ puisque a/x est défini sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et que la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$. (Elle est également continue et dérivable sur ce même ensemble.)

ii. $-$ *Asymptotes verticales* ?

Nous constatons que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^- + \exp(+\infty) = +\infty$$

et que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+ + \exp(-\infty) = 0^+$$

Ainsi, la fonction approche l'asymptote verticale $x = 0$ à gauche de 0. A droite de l'origine, la fonction f possède une limite égale à zéro qui est approchée par valeurs positives.

$-$ *Asymptotes horizontales* ?

De

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty + \exp(0) = \pm\infty$$

nous déduisons qu'il n'y a pas d'asymptote horizontale.

$-$ *Asymptotes obliques* ?

Comme

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\exp\left(\frac{-a}{x}\right)}{x} = 1 + \frac{1}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \exp\left(\frac{-a}{x}\right) = 1$$

le graphe de f possède l'asymptote oblique $y = x + 1$ aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

Nous pouvons même préciser cette dernière limite puisque

$$\lim_{x\to\pm\infty} \exp\left(\frac{-a}{x}\right) = \exp\left(0^{\mp}\right) = 1^{\mp}$$

Ainsi, le graphe de f est situé en dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ et au-dessus au voisinage de $-\infty$.

En conclusion, le graphe de f possède deux asymptotes :

- L'asymptote vertical $x = 0$, approchée par la gauche,
- L'asymptote oblique $y = x + 1$ aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$

iii. En vue de rechercher les extrema éventuels, calculons la dérivée de f, à savoir

$$f'(x)=1+\frac{a}{x^2}\exp\left(\frac{-a}{x}\right)$$

Cette dernière est strictement positive sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ donc la fonction f croît de $-\infty$ à 0 et de 0 à $+\infty$ et il n'y a pas d'extremum dans $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Notons également que l'on peut montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=1$$

ce qui signifie que, lorsque x tend vers zéro par la droite, la pente de la tangente au graphe tend vers 1.

iv. Pour déterminer la concavité et les éventuels points d'inflexion, calculons la dérivée seconde de f sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2a}{x^3}\exp\left(\frac{-a}{x}\right)+\frac{a}{x^2}\left(\frac{a}{x^2}\exp\left(\frac{-a}{x}\right)\right) \\ &= \frac{a}{x^4}(-2x+a)\exp\left(\frac{-a}{x}\right) \end{aligned}$$

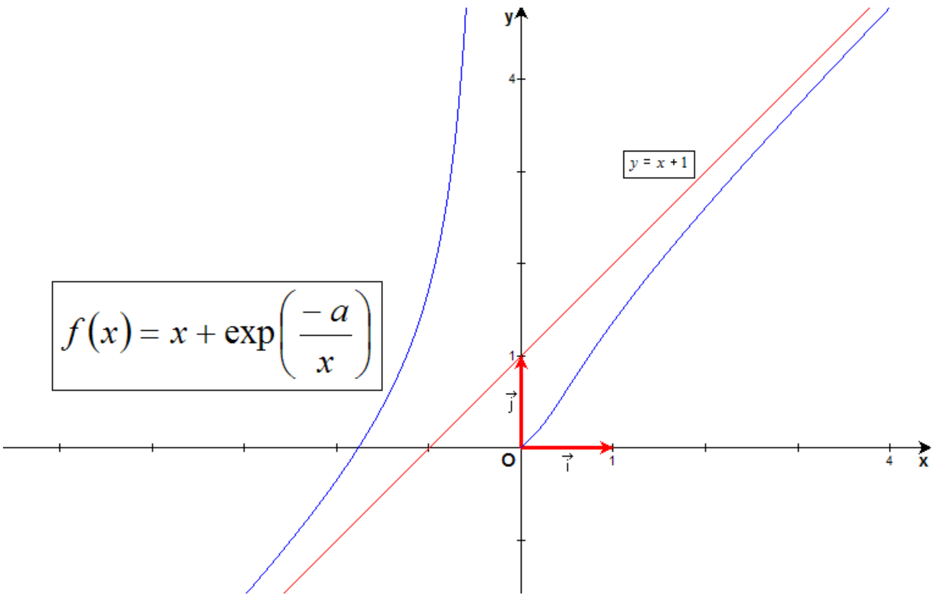
Elle s'annule uniquement en $x=a/2$ et change de signe de part et d'autre de ce point.

Le graphe possède donc un seul point d'inflexion situè en $x=a/2$.

v. En vue d'esquisser le graphe, nous dressons le tableau récapitulatif :

	$-\infty$		0		$a/2$		$+\infty$
f'		$+$	$+\infty$ | 1	$+$	$+$	$+$	
f''		$+$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$ $\cup$	$+\infty$ | 0	$\nearrow$ $\cup$	$\nearrow$ PI	$\nearrow$ $\cup$	$+\infty$

Le graphe à l'allure suivante pour tout $a>0$:



Notons que si nous prolongeons la fonction par sa limite `a droite en 0, nous pouvons dire que la fonction ainsi d´efinie admet le minimum local 0 en $x = 0$.

30 juillet 08.

EXANA228 – FACSA – ULG– Liège, juillet 08.

A. Selon la thèorie linèaire des vagues en eaux peu profondes, les particules d'eau situèes à la surface de la mer et participant à la propagation des vagues de pèriode T sont animèes d'une vitesse dont les composantes horizontale et verticale sont dècrites respectivement par

$$u(t) = U\sin(\omega t) \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{2\pi HU}{\lambda}\cos(\omega t)$$

où t dèsigne le temps, où $\omega = 2\pi / T$ est une constante caractèrisant la pulsation des vagues et où U, H et λ sont des constantes strictement positives dècrivant respectivement la vitesse horizontale maximale, la profondeur et la longueur d'onde des vagues.

A.1 Dèterminez le dèplacement horizontal $x(t)$ des particules en fonction du temps sachant que celui-ci est donnè par

$$x(t) = \int u(t)\, dt$$

A.2 Dèterminez la hauteur des vagues $z(t)$ en fonction du temps sachant que celle-ci vèrifie

$$\zeta'(t) = v(t) \quad \text{et} \quad \int_0^T \zeta(t)\,dt = 0 \quad \text{où} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

A.3 Calculez l'ènergie cinètique moyenne (la composante v de la vitesse est négligèe)

$$\overline{E}_{cin} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\rho u^2(t)\,dt \qquad \text{où} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

et où ρ désigne la masse par unité de volume de l'eau.

B. On considère maintenant le cas où

$$u(t) = U_1\sin(\omega t) + U_2\sin(4\omega t) \qquad \text{où} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

(où U_1 et U_2 sont des constantes). Ceci traduit la présence simultanèe de vagues de périodes T et $T/4$. Montrez que l'énergie cinètique moyenne correspondante est ègale à la somme des ènergies cinètiques moyennes associèes aux deux composantes $U_1\sin(\omega t)$ et $U_2\sin(4\omega t)$ considèrèes séparément.

A.1 Le calcul de la primitive conduit à

$$x(t)=\int u(t)\,dt=\int U\sin(\omega t)\,dt=-\frac{U}{\omega}\cos(\omega t)+C$$

où C est une constante.

A.2 Puisque la dérivée de ζ est v, nous déduisons que ζ est une primitive de v donc que

$$\zeta(t)=\int v(t)\,dt=\int \frac{2\pi HU}{\lambda}\cos(\omega t)\,dt=\frac{2\pi HU}{\lambda\omega}\sin(\omega t)+C'$$

où C' est une constante. La contrainte

$$\int_0^T \zeta(t)\,dt=0$$

s'écrit alors

$$\begin{aligned}0=\int_0^T \zeta(t)\,dt&=\int_0^T\left(\frac{2\pi HU}{\lambda\omega}\sin(\omega t)+C'\right)\\&=\left[-\frac{2\pi HU}{\lambda\omega^2}\cos(\omega t)+C't\right]_0^T\\&=\frac{2\pi HU}{\lambda\omega^2}\left(1-\cos(\omega t)\right)+C'T\end{aligned}$$

avec $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$, c'est-à-dire

$$0=\frac{2\pi HU}{\lambda\omega^2}\left(1-\cos(2\pi)\right)+\frac{2\pi}{\omega}C'=\frac{2\pi}{\omega}C'$$

qui conduit à $C'=0$

En conclusion,

$$\zeta(\mathrm{t})=\frac{2\pi HU}{\lambda\omega}\sin(\omega t)$$

A.3 Il vient

$$\begin{aligned}\overline{E}_{cin}&=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}\rho u^2(t)\,dt\\&=\frac{\omega}{2\pi}\frac{\rho}{2}U^2\int_0^{2\pi/\omega}\sin^2(\omega t)\,dt\\&=\frac{\omega\rho U^2}{4\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\frac{1}{2}\left(1-\cos(2\omega t)\right)dt\\&=\frac{\omega\rho U^2}{8\pi}\left[t-\frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\right]_0^{2\pi/\omega}\\&=\frac{\omega\rho U^2}{8\pi}\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\rho U^2}{4}\end{aligned}$$

B. On calcule aisément

$$\begin{aligned}
\overline{E}_{cin} &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\rho u^2(t)\,dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\rho\left[U_1\sin(\omega t)+U_2\sin(4\omega t)\right]^2 dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\rho\left[U_1^2\sin^2(\omega t)+U_2^2\sin^2(4\omega t)+2U_1U_2\sin(\omega t)\sin(4\omega t)\right]dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\rho\left[U_1^2\sin^2(\omega t)\right]dt+\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\rho\left[U_2^2\sin^2(4\omega t)\right]dt \\
&\qquad +\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\rho\left[2U_1U_2\sin(\omega t)\sin(4\omega t)\right]dt
\end{aligned}$$

Les deux premiers termes de cette expression représentant la moyenne des énergies cinétiques associées aux deux composantes $U_1\sin(\omega t)$ et $U_2\sin(4\omega t)$, l'énergie cinétique moyenne totale se réduira à la somme des contributions de ces deux composantes si

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\rho\left[2U_1U_2\sin(\omega t)\sin(4\omega t)\right]dt = 0$$

C'est bien le cas puisque

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\rho\left[2U_1U_2\sin(\omega t)\sin(4\omega t)\right]dt &= \frac{\rho U_1U_2}{T}\int_0^T\left[\sin(\omega t)\sin(4\omega t)\right]dt \\
&= \frac{\rho U_1U_2}{2T}\int_0^T\left[\cos(3\omega t)-\cos(5\omega t)\right]dt \\
&= \frac{\rho U_1U_2}{2T}\left[\frac{\sin(3\omega t)}{3\omega}-\frac{\sin(5\omega t)}{5\omega}\right]_0^T \\
&= \frac{\rho U_1U_2}{2\omega T}\left[\frac{\sin(3\omega T)}{3}-\frac{\sin(5\omega T)}{5}\right] \\
&= \frac{\rho U_1U_2}{4\pi}\left[\frac{\sin(6\pi)}{3}-\frac{\sin(10\pi)}{5}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

---

30 juillet 08.

EXANA229 – FSA – UCL – Louvain, juillet 08, série 1.

1) Calculer la primitive de la fonction suivante :

$$f(x) = 2x \arctan(x)$$

2) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{u \to 1} \frac{\sin(u-1) - \ln u}{u^2 - 2u + 1}$$

3) Esquissez le graphe de la fonction

$$f(x) = \max\left\{4x - x^2, 0\right\}$$

puis calculer l'aire du plan situé entre ce graphe et l'axe des abscisses.

4) Soit f une fonction paire et dérivable. Démontrez rigoureusement que $f'(0) = 0$

Solution proposée par Steve Tumson

1) D'abord par partie :

$$u = \arctan(x) \qquad du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$dv = 2x\ dx \qquad v = x^2$$

$$\Rightarrow \int 2x\ \arctan(x)\, dx = x^2 \arctan(x) - \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$$

Puis une feinte algébrique classique :

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\, dx = \int \frac{1+x^2}{1+x^2}\, dx - \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = x - \arctan(x)$$

On a donc :

$$\boxed{\int 2x\ \arctan(x)\, dx = x^2 \arctan(x) - x + \arctan(x) + Cste}$$

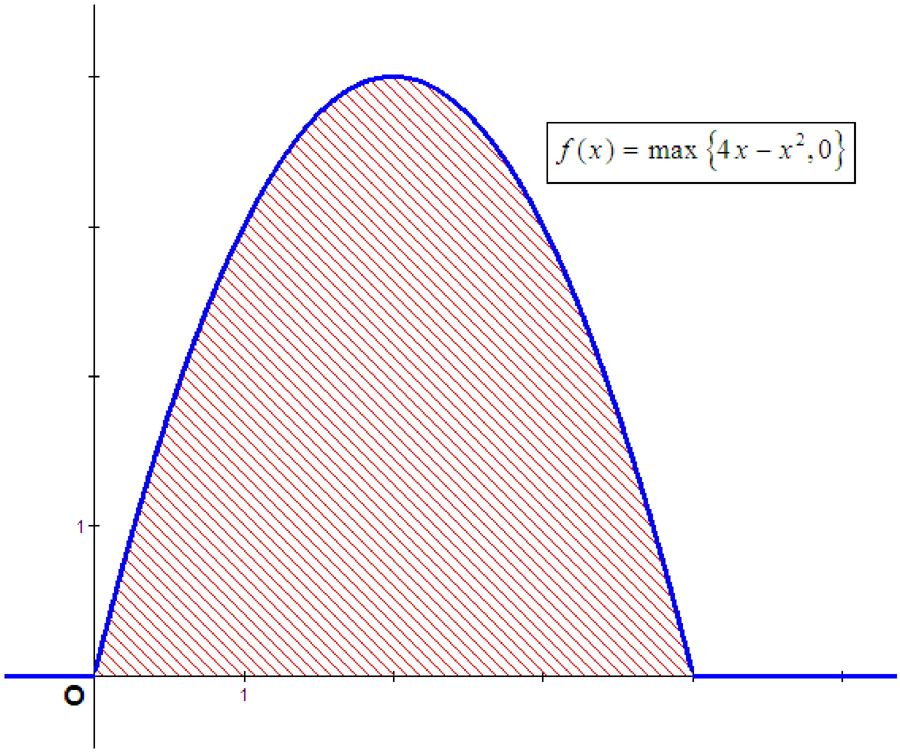
2) On utilise l'Hospital

$$\lim_{u\to 1} \frac{\sin(u-1) - \ln u}{u^2 - 2u + 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{u\to 1} \frac{\sin(u-1) - \ln u}{u^2 - 2u + 1} = \lim_{u\to 1} \frac{\cos(u-1) - \frac{1}{u}}{2u-2} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{H} \lim_{u\to 1} \frac{\cos(u-1) - \frac{1}{u}}{2u-2} = \lim_{u\to 1} \frac{-\sin(u-1) + \frac{1}{u^2}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

3) La fonction $f(x) = \max\left\{4x - x^2, 0\right\}$ peut aussi s'écrire :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & si \quad 4x - x^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]4, +\infty\right[\\ f(x) = 4x - x^2 & si \quad 4x - x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[0, 4\right] \end{cases}$$



L'aire sous la courbe se calcule donc comme suit :

$$\int_0^4 \left(4x - x^2\right) dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \boxed{\frac{32}{3}}$$

4) La fonction est paire, donc $f(x) = f(-x)$ par définition. Mais quand est-il de la dérivée ?

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h}$$

$$f'(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-x) - f(-x+h)}{h} \xrightarrow{f(x)=f(-x)} \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \xrightarrow{h=-h'} \lim_{h' \to 0} \frac{f(x) - f(x+h')}{-h'} = -f'(x)$$

Sa dérivée est donc impaire !

En $x = 0$, on a donc $f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f'(0) = -f'(0)$

Il faut donc obligatoirement $\boxed{f'(0) = 0}$

23 juillet 08. (Relu par Benoit Baudelet)