Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 24

EXANA240 – EXANA249

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Novembre 08

EXANA240 – FACS – ULBL – Bruxelles, septembre 08.

L'arête latérale d'un cône circulaire droit mesure 15 cm.
Pour quelle valeur du rayon de la base le volume de ce cône est-il maximum ?

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ or $r = g\sin\alpha$ et $h = g\cos\alpha \to V = \frac{1}{3}\pi g^3 \sin^2\alpha\cos\alpha$

Ce volume sera maximum si la dérivée est nulle.

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{3}\pi g^3 \sin^2\alpha\cos\alpha\right) = \frac{1}{3}\pi g^3 \frac{d}{d\alpha}\left(\sin^2\alpha\cos\alpha\right)$$

$$\to \frac{d}{d\alpha}\left(\sin^2\alpha\cos\alpha\right) = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\left(-\sin\alpha\right) = 0$$

$$\to 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^3\alpha = 0$$

1) $\sin\alpha = 0 \to \alpha = 0$ Solution triviale.

2) $2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \to 2\cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 0 \to \cos^2\alpha = \frac{1}{3}$

$\to \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Soit un angle de $\simeq$ 54.7°

Le rayon de la base est donc : $r = g\sin\alpha = 15\times\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \boxed{5\sqrt{6}\ cm}$

le volume du cône est alors de : $V = \frac{1}{3}\pi\times 15^3\times\left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)\times\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 1360\ cm^3$

On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'un maximum : $\begin{cases} \alpha < 54.7° \to \frac{dV}{d\alpha} > 0 \\ \alpha > 54.7° \to \frac{dV}{d\alpha} < 0 \end{cases}$

---

21 novembre 08.

EXANA241 – FACS – ULBL – Bruxelles, septembre 08.

Calculer

$a) \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin 4x \, dx$ $\qquad b) \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\sin 4x| \, dx$ $\qquad c) \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin|4x| \, dx$

---

a) $I_1 = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin 4x \, dx$

Sans faire de calcul, nous pouvons directement affirmer que $I_1 = 0$, puisque $f(x) = \sin 4x$ est une fonction impaire. Vérifions :

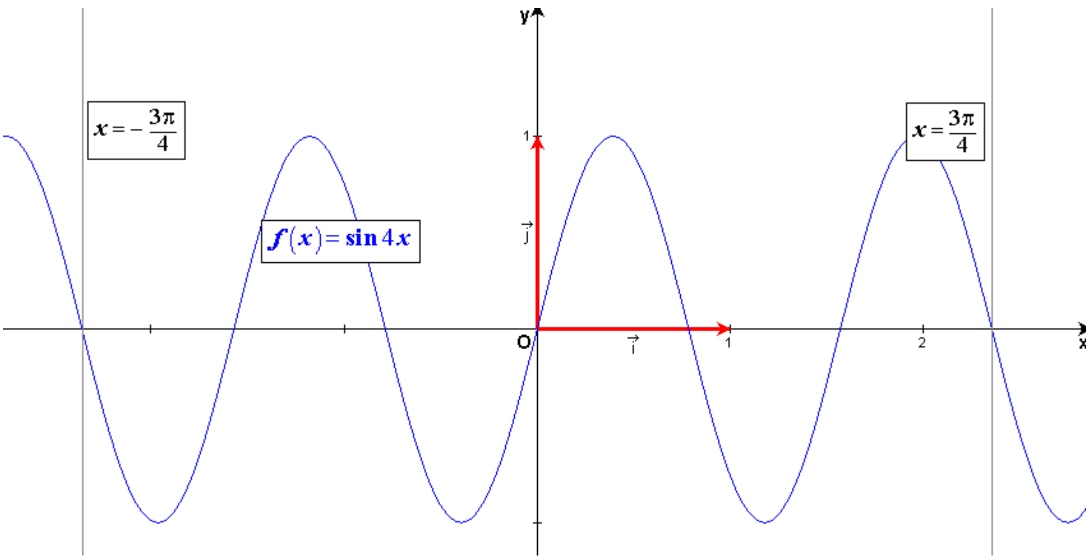
$$I_1 = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin 4x \, dx = \frac{1}{4}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin 4x \, d(4x) = -\frac{1}{4}\left[\cos 4x\right]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 0$$

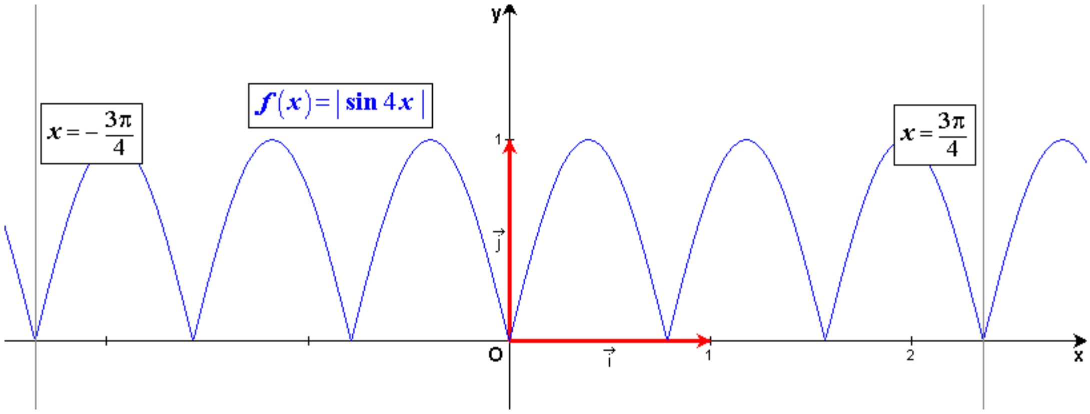
b) $I_2 = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\sin 4x| \, dx = 6\int_0^{\frac{3\pi}{12}} \sin 4x \, dx = 6 \times \left(-\frac{1}{4}\right)\left[\cos 4x\right]_0^{\frac{3\pi}{12}}$

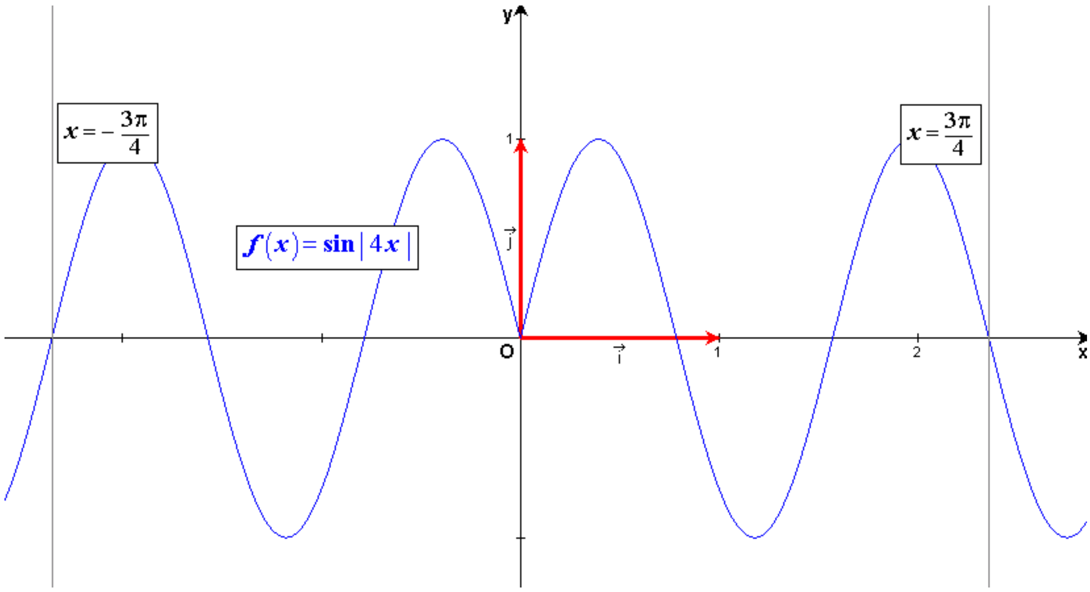
$= -\frac{3}{2}\left[\cos \pi - \cos 0\right] = +3$

c) $I_3 = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin|4x| \, dx$

Nous voyons sur le graphique ci-dessous que $f(x) = \sin|4x|$ est une fonction paire et que $I_3 = 2\int_0^{\frac{3\pi}{12}} \sin 4x \, dx = 1$





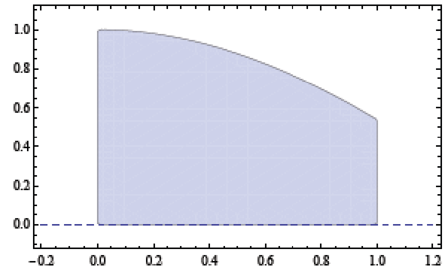


---

21 novembre 08.

EXANA242 – EPL, UCL, Louvain, septembre 08.

a) Soit la surface délimitée par la courbe $y = \cos x$, l'axe des abscisses et les droites verticales $x = 1$ et $x = 0$.
Calculez le volume du solide de révolution engendré par la rotation de cette surface autour de l'axe des abscisses.



b) Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(\tan x)}{\cos^2 x} dx$$

c) Calculer la limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{(\sin t) - t}{t^3}$$

d) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } x \le 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{lorsque } x > 0 \end{cases}$$

Etudier la dérivabilité de la fonction en $x = 0$

Solution proposée par Steve TUMSON

a)

$$V = \pi\int_0^1 \cos^2 x = \frac{\pi}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\sin(2)\right) \simeq \boxed{2,285}$$

b)

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(\tan x)}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \sin(\tan x) d(\tan x) = [-\cos(\tan x)]_0^{\pi/4} = -\cos(1) + 1 \simeq \boxed{0,46}$$

c)

$$\lim_{t\to 0} \frac{(\sin t) - t}{t^3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOSPITAL} \lim_{t\to 0} \frac{(\cos t) - 1}{3t^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOSPITAL} \lim_{t\to 0} \frac{-\sin t}{6t} = -\frac{1}{6}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \boxed{-\frac{1}{6}}$$

d)

$$\frac{df(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x \le 0 \\ \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} & \text{lorsque } x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{df(x)}{dx} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\cos x}{x} - \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin x}{x^2} = -\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin x}{x^2} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{HOSPITAL} -\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\cos x}{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{df(x)}{dx} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{La fonction est dérivable en } x = 0}$$

---

21 décembre 08.

EXANA243 – EPL, UCL, Louvain, septembre 08.

Soit f la fonction

$$f(x) = x\left(\ln\left(x^2\right)\right)^2$$

définie partout sauf en $x = 0$, et C la courbe du plan définie par $y = f(x)$

1) Etudier la parité de la fonction. Possède-t-elle des asymptotes ?
   Quelle valeur faudrait-il lui donner pour qu'elle soit continue en $x = 0$?
2) Etudier le domaine de croissance/décroissance de la fonction, ainsi que son domaine de concavité vers le haut/bas.
   Note : $e^{-1} \approx 0,35$ *et* $e^{-2} \approx 0,15$
3) Représenter soigneusement la courbe C et indiquer les points remarquables.
4) Sans effectuer de nouvelle étude de foncton, esquissez le graphe des trois fonctions suivantes :

$$g(x) = -2x\left(\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2 \qquad h(x) = \frac{x}{3}\left(\ln\left(x^2\right) - \ln(9)\right)^2 \qquad k(x) = 4|x|\left(\ln|x|\right)^2$$

Solution proposée par Steve TUMSON

1)

Parité : $f(-x) = (-x)\left(\ln\left((-x)^2\right)\right)^2 = -x\left(\ln\left(x^2\right)\right)^2 = -f(x) \rightarrow$ La fonction est impaire, nous pouvons donc l'étudier uniquement pour le domaine $x > 0$

Asymptotes :

* AV : $\lim\limits_{x\to 0+/-} x\left(\ln\left(x^2\right)\right)^2 = \lim\limits_{x\to 0+/-} \frac{\left(\ln\left(x^2\right)\right)^2}{1/x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{H} \lim\limits_{x\to 0+/-} \frac{4\ln\left(x^2\right)/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0+/-} \frac{4\ln\left(x^2\right)}{-1/x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{H} \lim\limits_{x\to 0+/-} \frac{8/x}{1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0+/-} 8x = 0$

Pas d'asymptote verticale. On peut cependant répondre à la question suivante : pour que la fonction soit continue en $x = 0$, il faudrait lui donner la valeur $y = 0$ (*résultat attendu, la fonction étant impaire...*)

* AH/AO $\equiv y = kx + t$: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\ln\left(x^2\right)\right)^2 = \infty$

Pas d'asymptote horizontale ni oblique

2) Rappelons que la fonction est ici étudiée uniquement pour $x > 0$ (voir parité)

$$\frac{df(x)}{dx} = \ln^2\left(x^2\right) + 4\ln\left(x^2\right) = \ln\left(x^2\right)\left(\ln\left(x^2\right) + 4\right)$$

$$\Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = 0 \quad \to \ln\left(x^2\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\to \ln\left(x^2\right) = -4 \Leftrightarrow x^2 = e^{-4} \Leftrightarrow x = e^{-2} \simeq 0,15$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \ln^2\left(x^2\right) + 4\ln\left(x^2\right) = \frac{4\ln\left(x^2\right)}{x} + \frac{8}{x} = \frac{4\left(\ln\left(x^2\right) + 2\right)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0 \to \ln\left(x^2\right) = -2 \Leftrightarrow x^2 = e^{-2} \Leftrightarrow x = e^{-1} \simeq 0,35$$

	0		0,15		0,35		1	
$f'(x)$	/	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	/	−	−	−	0	+	+	+
Variation	/	↗	*MAX*	↘	↘	↘	*MIN*	↗
Concavité	/	∩	∩	∩	*P.I.*	∪	∪	∪

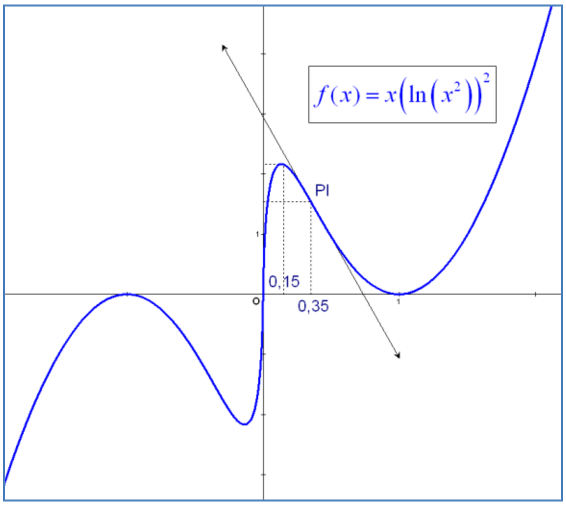
3) Voir graphe.

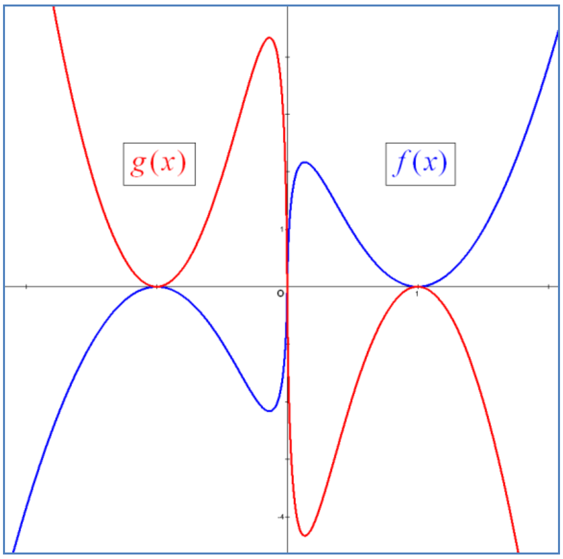
4)

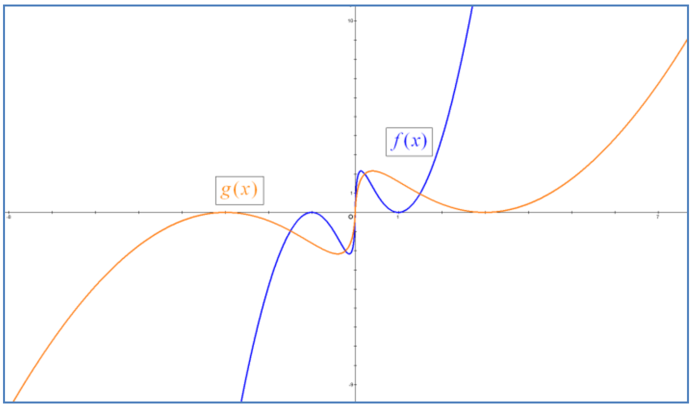
$$g(x) = -2x\left(\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2 = -2x\left(\ln\left(x^{-2}\right)\right)^2 = -2x\left(-\ln\left(x^2\right)\right)^2 = -2x\left(\ln\left(x^2\right)\right)^2 = -2f(x)$$

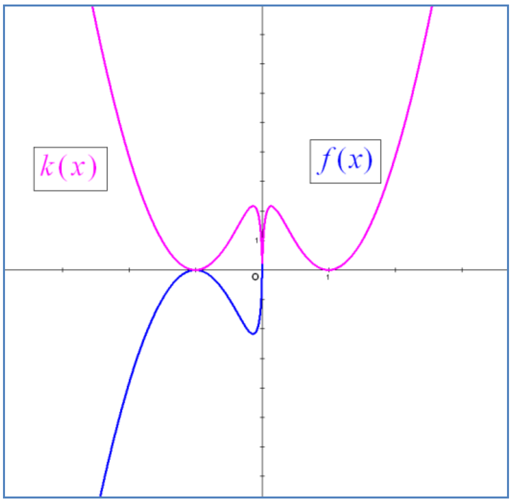
$$h(x) = \frac{x}{3}\left(\ln\left(x^2\right) - \ln(9)\right)^2 = \frac{x}{3}\left(\ln\left(\frac{x^2}{9}\right)\right)^2 = \frac{x}{3}\left(\ln\left(\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)\right)^2 = f\left(\frac{x}{3}\right)$$

$k(x) = 4|x|\left(\ln|x|\right)^2 \to$ fonction paire, travaillons sur $x > 0 \Rightarrow k(x) = 4x\left(\ln x\right)^2 = x\left(2\ln x\right)^2 = x\left(\ln\left(x^2\right)\right)^2 = f(x)$









21 décembre 08.

EXANA244 – EPL, UCL, Louvain, septembre 08..

Un amateur de bière fraîche, qui restera anonyme, boit toujours dans des verres dont le volume total est exactement d'un litre et dont la forme est parfaitement cylindrique.
On cherche les dimensions du verre qui permettent à la bière de garder sa fraîcheur le plus longtemps possible. On supposera pour cela que la perte de fraîcheur est proportionnelle à la surface totale de la bière (c'est-à-dire la somme de la surface en contact avec le verre et de la surface exposée à l'air), et on négligera l'épaisseur du verre.

1. Modélisez ce problème de façon mathématique, en identifiant les variables à déterminer, les quantités pertinentes et les contraintes à respecter (n'oubliez pas de préciser les unités).
2. Calculez les dimensions optimales à donner au verre.

Solution proposée par Steve TUMSON

1.
Les variables à déterminer son la hauteur h et le rayon R du verre.
Les quantités utiles sont le volume du verre, sa surface et la perte de fraîcheur de la bière :

$$V = \pi R^2 h\,[\mathrm{m}^3]$$
$$S = 2\pi Rh + 2\pi R^2\,[\mathrm{m}^2]$$
$$F = kS\,[°\mathrm{C}] \to \text{avec } k > 0 \text{ une constante de dimension } [°\mathrm{C/m}^2]$$

Les contraintes à respecter sont que :

$$V = 1[\mathrm{L}] = 0{,}001[\mathrm{m}^3]$$
F soit minimum

2.

$$h = \frac{V}{\pi R^2} \Rightarrow S = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2 \Rightarrow F = k\left(\frac{2V}{R} + 2\pi R^2\right)$$
$$\to \frac{dF}{dR} = 0 \Leftrightarrow k\left(-\frac{2V}{R^2} + 4\pi R\right) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \simeq 5{,}4\,[\mathrm{cm}]} \Rightarrow \boxed{h = \frac{V}{\pi R^2} \simeq 10{,}8\,[\mathrm{cm}]}$$

$$* \frac{d^2F}{dR^2} = k\left(\frac{4V}{R^3} + 4\pi\right) > 0 \to \text{C'est bien un minimum !}$$

Note : Comme vous l'aurez compris, le problème revient juste à minimiser la surface d'un cylindre. En effet, vu que la perte de fraîcheur est proportionnelle à la surface du verre, pour garder plus de fraîcheur, il faut une surface minimum !

Ou encore $\frac{dF}{dR} = 0 \Leftrightarrow \frac{d(kS)}{dR} = 0 \Leftrightarrow k\frac{dS}{dR} = 0 \Leftrightarrow \frac{dS}{dR} = 0$

---

21 décembre 08.

EXANA245 – FACSA, ULG, Liège, septembre 08.

Soit la fonction f définie par

$$f(x)=\frac{e^{-ax}}{x^2}$$

où a est un paramètre réel non nul.

a) Dans le cas où a est une constante positive,

i. déterminer le domaine de définition de f ;

ii déterminer les éventuelles asymptotes du graphe de f ;

iii déterminer et caractériser les éventuels extrema;

iv étudier la concavité du graphe et situer les éventuels points d'inflexion;

v esquisser le graphe de f.

b) Des résultats du point i., déduire l'allure du graphe de f dans le cas où $a<0$.

c) Dans le cas où $a=1$, déterminer la (les) valeur(s) de α pour laquelle (lesquelles) la droite $y=\alpha x$ est tangente au graphique de la fonction f

---

21 décembre 08.

a) i. $dom\ f=\mathbb{R}_0$

ii. AV en $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty \to AV \equiv x=0$

AH à droite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \to AH \equiv y=0$

Pas de AO

iii $f'(x)=\dfrac{-ae^{-ax}x^2-e^{-ax}2x}{x^4}=-\dfrac{e^{-ax}}{x^3}(ax+2)$

Il y a un extrémum si $f'(x)=0 \to ax+2=0 \to x=-\dfrac{2}{a}$

Comme $a>0$, il s'agit d'un minimum

		$-\frac{2}{a}$	
$-\frac{e^{-ax}}{x^3}$	$+$	$+$	$+$
$ax+2$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	Min	$\nearrow$

Coordonnées du mimina : $Min\left(-\dfrac{2}{a},\left(\dfrac{ae}{2}\right)^2\right)$

IV $f''(x)=\dfrac{\left[ae^{-ax}(ax+2)-e^{-ax}a\right]x^3+e^{-ax}(ax+2)3x^2}{x^6}=\dfrac{e^{-ax}}{x^4}\left(a^2x^2+4ax+6\right)$

Le discriminant du deuxième facteur est négatif $\to f''(x)$ est toujours positif.

$\to f(x)$ a un concavité toujours positive. Il n'y a pas de point d'inflexion.

b) On note que $g(x)=\dfrac{e^{ax}}{x^2}=\dfrac{e^{-a(-x)}}{(-x)^2}=f(-x)$

Autrement dit $f(x)$ et $g(x)$ sont symétriques par rapport à l'axe des y.

c) Soit (λ,μ) les coordonnées d'un point de tangence, s'il existe.

On a alors : $(\lambda,\mu)\in f(x)\rightarrow \mu=\dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda^2}$ (1)

On sait aussi que $f'(\lambda)=-\dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda^3}(\lambda+2)=\alpha$ (2)

Enfin, l'équation de la tangente est : $y-\mu=\alpha(x-\lambda)\rightarrow y-\mu=-\dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda^3}(\lambda+2)(x-\lambda)$

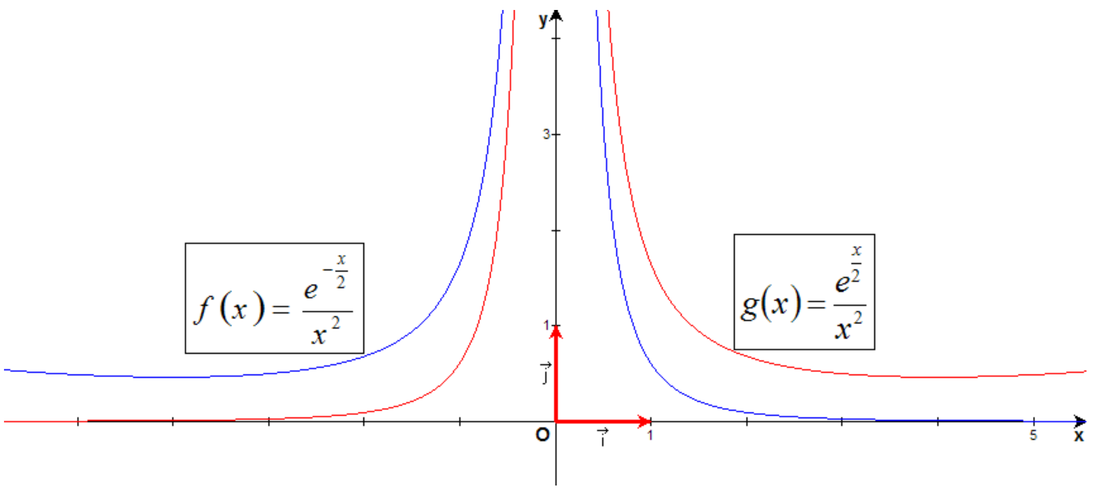
$\rightarrow y=-\dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda^3}(\lambda+2)x+\dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda^2}(\lambda+2)+\mu$

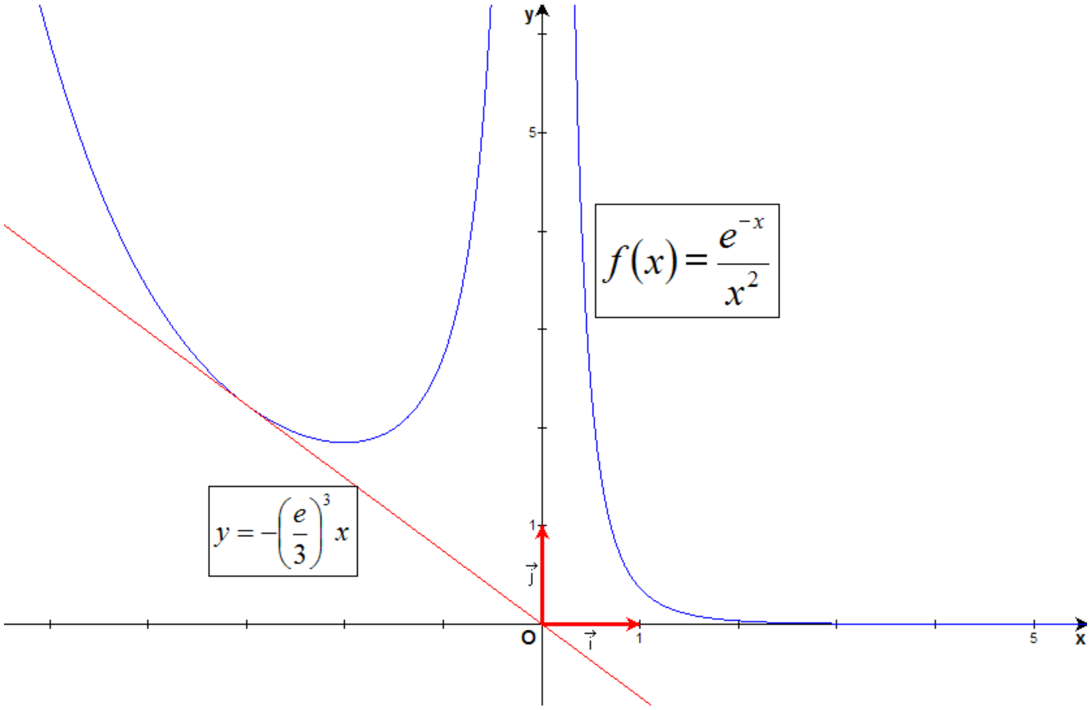
Comme cette tangente passe par l'origine, il faut que : $+\dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda^2}(\lambda+2)+\mu=0$

Compte tenu de $(1)\rightarrow +\mu(\lambda+2)+\mu=0\rightarrow \mu(\lambda+3)=0$

1) soit $\lambda=-3$. $(2)\rightarrow \alpha=-\dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda^3}(\lambda+2)=-\dfrac{e^3(-1)}{(-3)^3}=-\left(\dfrac{e}{3}\right)^3$

2) soit $\mu=0$. Ce qui n'est possible que si le point de tangence se trouve à $+\infty$ et dans ce cas $\alpha=0$





21 décembre 08.

EXANA246 – FACSA, ULG, Liège, septembre 08.

On considère l'expression

$$\mathrm{I}_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx$$

où m et n sont des entiers positifs ou nuls.

a) Calculer $I_{1,1}$

b) Calculer $I_{1,n}$

c) Calculer $I_{2,0}$

d) Montrer que $I_{m,n} = I_{n,m}$

e) Par le biais d'une intégration par parties, déterminer une relation entre $I_{m,n}$ et $I_{m-2,n+2}$ valable dans le cas où $m \geq 2$

a) $I_{1,1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{4}\left[\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{4}(-1-1)=\frac{1}{2}$

b) $I_{1,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^n x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,d\left(\cos x\right)=\frac{-1}{n+1}\left[\cos^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{-1}{n+1}\left[0-1\right]=\frac{1}{n+1}$

c) $I_{2,0}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

d) $I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$

$$\text{Soit } t=\frac{\pi}{2}-x\rightarrow\begin{cases}-dt=dx\\ x=0\rightarrow t=\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{2}\rightarrow t=0\end{cases}$$

Donc $I_{m,n}=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^m t\sin^n t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\sin^n t\,dt=I_{n,m}$

e) $I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx$

$u=\sin^{m-1}x \qquad u'=(m-1)\sin^{m-2}x\cos x \qquad (m\geq 2)$

$v'=\cos^n x\sin x \qquad v=\frac{\cos^{n+1}x}{n+1}$

$$\rightarrow I_{m,n}=\left[\sin^{m-1}x\,\frac{\cos^{n+1}x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{m-1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-2}x\cos^{n+2}x\,dx$$

$$=-\frac{m-1}{n+1}I_{m-2,n+2}$$

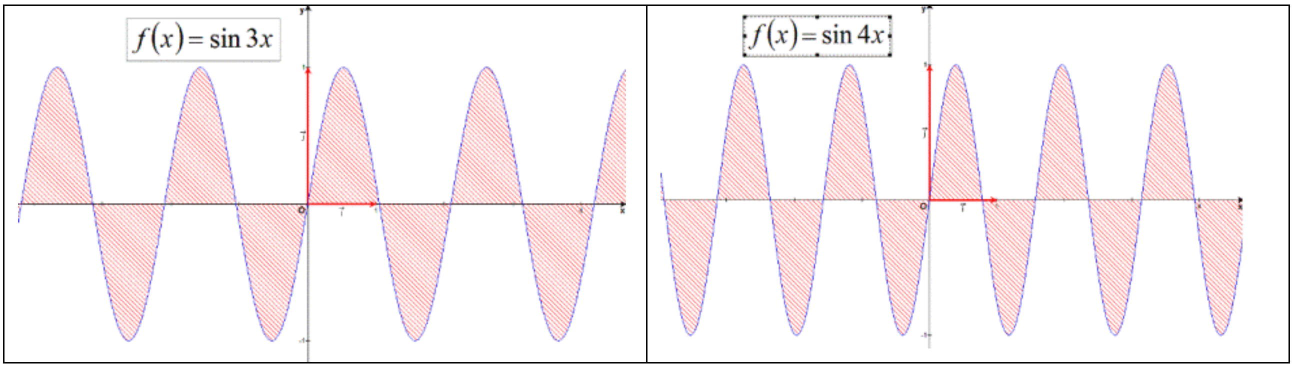
EXANA247 – FPMS, Mons, groupe C, juillet 09.

Soit n un nombre entier positif. Trouvez la ou les valeur(s) du paramètre n de sorte que la relation suivante soit vérifiée :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} |\sin nx| \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin|nx| \, dx$$

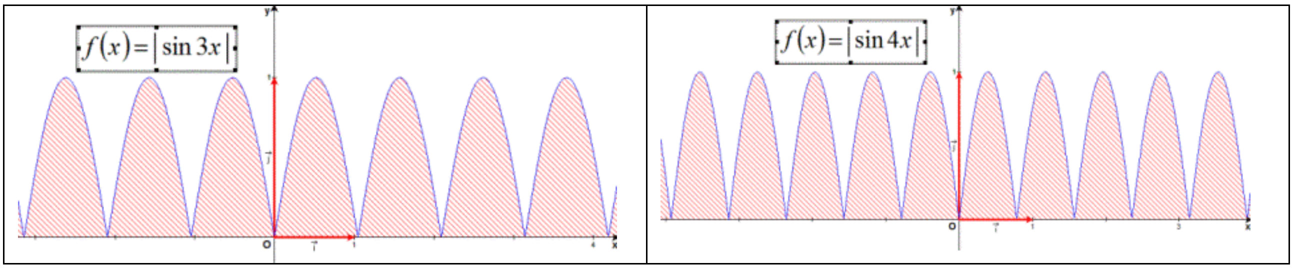
$a)\ I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx$

$$= \frac{1}{n}\left[-\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}\left(-\cos n\pi + \cos n\pi\right) = \frac{1}{n}(1-1) = 0$$



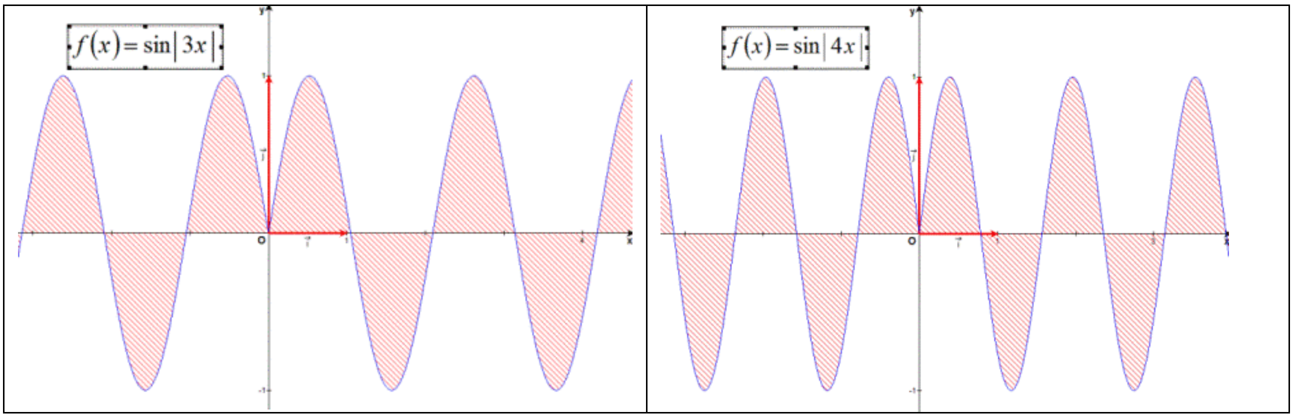
$b)\ I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin nx| \, dx$

$$= 2n\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx \, dx = 2n\frac{1}{n}\left[-\cos nx\right]_0^{\frac{\pi}{n}} = 2\left(-\cos \pi + \cos 0\right) = 2\left(1+1\right) = 4$$



$c)\ I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin|nx| \, dx$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin nx \, dx = 2\frac{1}{n}\left[-\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n}\left(-\cos n\pi + \cos 0\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{n}\left(-1+1\right) = 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{2}{n}\left(1+1\right) = \dfrac{4}{n} \quad \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$



Donc : $I_1 + I_2 + I_3 = \begin{cases} 0+4+0=4 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0+4+\dfrac{4}{n} = \dfrac{4n+4}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Reportons tout cela dans la relation donnée

n pair

$$I_1 + I_2 + I_3 = 8n \rightarrow 4 = 8n \rightarrow n = \frac{1}{2} \quad \text{A rejeter car } n \in \mathbb{N}_0$$

n impair

$$I_1 + I_2 + I_3 = 8n \rightarrow \frac{4n+4}{n} = 8n \rightarrow 2n^2 - n - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = -\dfrac{1}{2} \quad \text{A rejeter} \end{cases}$$

Conclusion $\boxed{n = 1}$

Le 2 juillet 2009

EXANA248 – FACSA, ULG, Liège, juillet 09.

i. Soit la fonction

$$f(x)=x\,e^{-ax^2}\quad\left(\text{ce qui se note également } f(x)=x\exp\left(-ax^2\right)\right)$$

où a est un paramètre réel **non nul**. En discutant s'il y a lieu en fonction de a,

(a) déterminez le domaine de définition de f;

(b) déterminez la parité éventuelle de f;

(c) déterminez les éventuelles asymptotes du graphe de f;

(d) déterminez et caractériser les éventuels extrema;

(e) étudiez la concavité du graphe et sirues les éventuels points d'inflexion;

(f) esquissez le graphe de f

ii En vous basant sur l'étude précédente, déterminez la (les) conditions que doivent remplir les paramètres réels **non nuls** α et β pour que la fonction

$$\arcsin\left(\alpha x\,e^{-\beta^2x^2}\right)$$

soit définie sur $\mathbb{R}$

$i.(a)$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

(b) Parité : $f(-x)=-x.e^{-a(-x)^2}=-x.e^{-ax^2}=-f(x)$

Donc la fonction est impaire.

(c) $\underline{1)\ a>0}$ Il n'y a pas d'asymptotes (ni AV, ni AH, ni AO)

$\underline{2)\ a<0}$

- Pas de AV
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} x.e^{-ax^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{e^{ax^2}}\xrightarrow{Hospital}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{e^{ax^2}\,2ax}=0\ \to AH\equiv x=0$
- Pas de AO

(d) $f'(x)=e^{-ax^2}+x.e^{-ax^2}(-2ax)=e^{-ax^2}\left(1-2ax^2\right)$

Si $a>0\to f'(x)=0$ si $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$

Ce qui donne le tableau

		$-\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$m\left(-\frac{1}{\sqrt{2a}};-\frac{1}{\sqrt{2ae}}\right)$	$\nearrow$	$M\left(\frac{1}{\sqrt{2a}};\frac{1}{\sqrt{2ae}}\right)$	$\searrow$

Si $a<0\to f'(x)$ est toujours positif et $f(x)$ est toujours croissante.

$$f''(x)=\left(e^{-ax^2}\left(1-2ax^2\right)\right)'=e^{-ax^2}\left(-2ax\right)\left(1-2ax^2\right)+e^{-ax^2}\left(-4ax\right)=2ax.e^{-ax^2}\left(2ax^2-3\right)$$

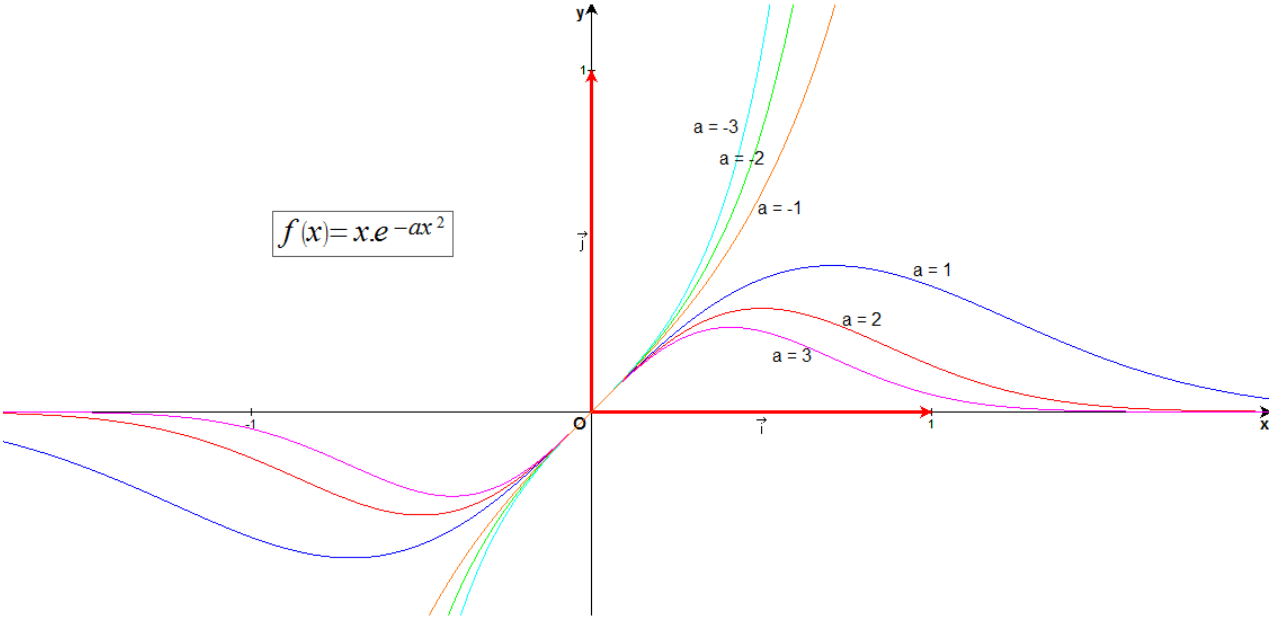
Si $a>0\rightarrow f''(x)=0$ si $x=0$ ou $x=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2a}}$

Ce qui donne le tableau suivant :

		$-\sqrt{\dfrac{3}{2a}}$		0		$\sqrt{\dfrac{3}{2a}}$	
e^{-ax^2}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2ax$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2ax^2-3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	I	$\cup$	I	$\cap$	I	$\cup$

Si $a<0\rightarrow$ Un seul point d'inflexion en $x=0$

(f) Le graphe de $f(x)$ est donné ci-dessous.



ii. La fonction $\arcsin\left(\alpha.x.e^{-\beta^2x^2}\right)$ sera définie sur $\mathbb{R}$ si

$$-1 \leq \alpha.x.e^{-\beta^2x^2} \leq 1$$

Il suffit de vérifier que le minimum de la fonction est ≥ 1 et que le maximum est ≤ 1

a) $\text{Max}\left(\alpha.x.e^{-\beta^2x^2}\right) \leq 1$

D'après le point i, nous savons que $\text{Max}\left(x.e^{-\beta^2x^2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\beta^2 e}}$ puisque $\beta^2 > 0$

$$\rightarrow \frac{\alpha}{\sqrt{2\beta^2 e}} \leq 1 \rightarrow \alpha \leq |\beta|\sqrt{2e}$$

a) $\text{Min}\left(\alpha.x.e^{-\beta^2x^2}\right) \geq -1$

D'après le point i, nous savons que $\text{Min}\left(x.e^{-\beta^2x^2}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2\beta^2 e}}$ puisque $\beta^2 > 0$

$$\rightarrow -\frac{\alpha}{\sqrt{2\beta^2 e}} \geq -1 \rightarrow \alpha \leq |\beta|\sqrt{2e}$$

Nous pouvons conclure que la fonction sera définie sur $\mathbb{R}$ si $\boxed{\alpha \leq |\beta|\sqrt{2e}}$

Le 2 juillet 2009

EXANA249 – FACSA, ULG, Liège, juillet 09.

i. Calculer $\int_0^{\pi} x\,dx$

ii. Calculer $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$

iii. Calculer $\int_0^{\pi} x\cos^2 x\,dx$

iv Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ a-t-on

$$\int_0^{\pi} x\cos^n x\,dx < 0 \quad ?$$

Justifier sans effectuer explicitement le calcul de l'intégrale;

$$i.\ I_0 = \int_0^{\pi} x.dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

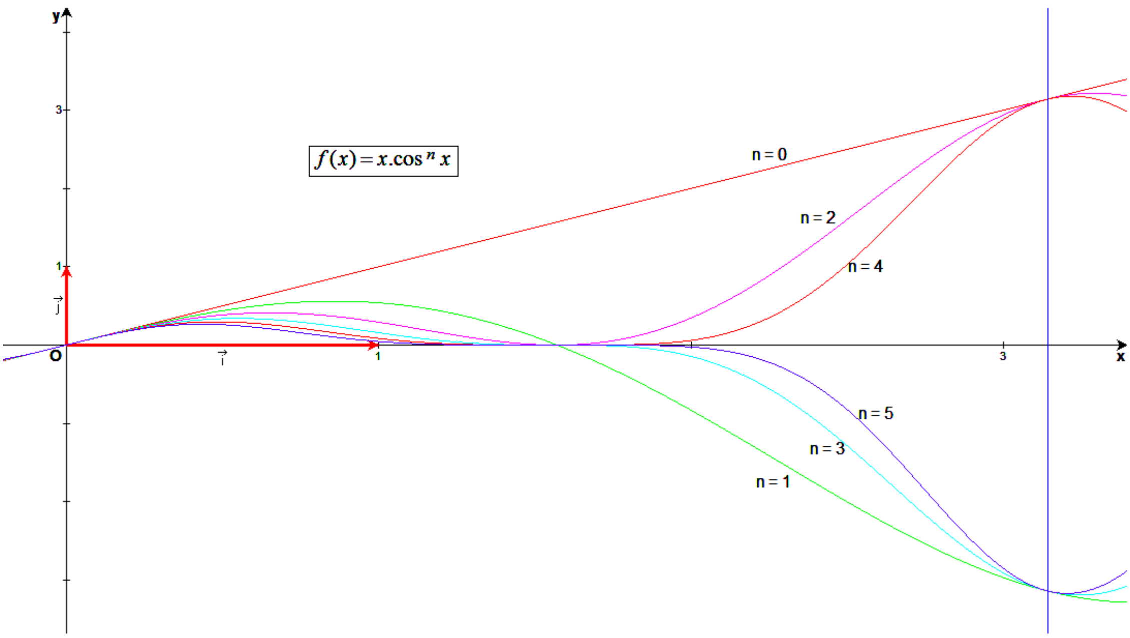
$$ii.\ I_1 = \int_0^{\pi} x.\cos x.dx$$

Par parties : $\begin{matrix} f = x & f' = 1 \\ g' = \cos x & g = \sin x \end{matrix}$

$$I_1 = [x.\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x.dx = 0 + [\cos x]_0^{\pi} = -2$$

$$iii.\ I_2 = \int_0^{\pi} x.\cos^2 x.dx = \int_0^{\pi} x.\frac{1+\cos 2x}{2}.dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x.dx + \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} 2x.\cos 2x.d2x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{8}[2x.\sin 2x + \cos 2x]_0^{2\pi} = \frac{\pi^4}{4} + \frac{1}{8}(0+1-1) = \frac{\pi^4}{4}$$



iv La figure ci dessus donne quelques graphes de la fonction pour diverses valeurs de *n*.

Il est immédiat que pour n pair, l'intégrale sera toujours positive.

Etudions le cas n impair.

La fonction $f(x) = x.\cos^n x$ présente le tableau de signes suivant

	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$	0	+	0	−	$-\pi$

Il suffit que la condition : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \leq \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx \right|$ soit vérifiée

Ce qui signifie simplement que la partie négative de l'aire doit être plus petite que la partie positive.

Considérons la fonction $g(x) = |f(\pi - x)| = |(\pi - x)\cos^n(\pi - x)| = |(\pi - x)\cos^n x|$

Il est immédiat que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) < g(x)$ puisque dans ce cas $\pi - x > x$

Or nous savons que si $\forall x \in [a,b]$, $f(x) < g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$.

$$\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} |(\pi - x)\cos^n x| dx = \underbrace{\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - x)\cos^n x.dx \right|}_{I} \qquad (1)$$

Faisons un changement de variable dans I :

$$t = \pi - x \rightarrow dt = -dx \rightarrow \begin{cases} \text{si } x = 0 \rightarrow t = \pi \\ \text{si } x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow I = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} t\cos^n(\pi - t).dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\cos^n t.dt$$

Remplaçons dans (1): $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos^n x.dx < \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\cos^n t.dt \right|$ qui est la condition demandée.

En conclusion : $\int_0^{\pi} x.\cos^n x.dx < 0$ si $n \in \mathbb{N}$ est impair.

Le 2 juillet 2009