Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 25

EXANA250 – EXANA259

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Aout 09

EXANA250 – EPL, UCL, Louvain, juillet 09, série 1.

1. Calculez une primitive de

$$(x+2)\sqrt{x^2+4x}$$

2. Calculez la limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\tan(x)}{x^3}$$

3. Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative admet la droite d'équation $y = x$ -1 comme asymptote en $+\infty$, c'est-à-dire que $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0.$

Précisez si chacune des cinq assertions suivantes est vraie ou fausse. Justifiez.

(A) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

(B) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

(C) $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=0$

(D) $\exists\, a\in\left[0,+\infty\right[\ \mid\ \forall x\in\left[a,+\infty\right[,\ f(x)\geq 5$

(E) $\exists\, b\in\left[0,+\infty\right[\ \mid\ \forall x\in\left[b,+\infty\right[,\ f(x)\leq x$

Solution proposée par Steve Tumson

1.

$$\int (x+2)\sqrt{x^2+4x}\,dx = \int \sqrt{x^2+4x}\,d\left(\frac{x^2+4x}{2}\right) = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+4x}\,d\left(x^2+4x\right)$$

$$\xrightarrow{y=x^2+4x} \frac{1}{2}\int \sqrt{y}\,dy = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{3}\sqrt{y^3} + C = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+4x\right)^3} + C$$

2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \tan(x)}{x^3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOSPITAL} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \left(1+\tan^2 x\right)}{3x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOSPITAL} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - \left(2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)\right)}{6x} = \frac{0}{0}$$

En appliquant une dernière fois Hospital :

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - \left(2\tan x + 2\tan^3 x\right)}{6x} \xrightarrow{HOSPITAL} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x - \left(2\left(1+\tan^2 x\right) + 6\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)\right)}{6} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

3.

(A) Vrai. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$

(B) Faux. Il suffit de trouver un contre-exemple, citons simplement $f(x)=|x|$ qui admet $y=x$ comme assymptote oblique en $+\infty$ $\left(\text{soit } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\right)$ et $y=-x$ comme asymptote oblique en $-\infty$ $\left(\text{soit } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\right)$. L'assertion n'est donc pas nécessairement vrai sans information supplémentaire à notre disposition !

(C) Faux. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \lim\limits_{x\to+\infty} x + \overbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} 1}^{+1} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = -1$

(D) Vrai car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(E) Vrai car pour des abscisses très grandes, $f(x) \simeq x-1 < x$

EXANA251 – EPL, UCL, Louvain, juillet 09, série 1.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

1. Donnez le domaine de définition de f.
2. Calculez f' et f'' puis dressez un tableau de variation de f contenant
   a) les racines et le signe de f', les extrema et les domaines de croissance/décroissance de f ;
   b) les racines et le signe de f'', les points d'inflexion et les domaines de concavité haut/bas de f.
3. Trouvez la pente de la tangente aux points où le graphe de f coupe l'axe Ox.
4. Tracez le graphe de f.

Solution proposée par Steve Tumson

1. Domaine : $2 + \cos x \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

2. Notons tout d'abord que cette fonction est périodique de plus petite période $p = 2\pi$.

De plus, cette fonction est impaire puisque $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{2+\cos(x)} = -f(x)$.

$\rightarrow$ Nous pouvons donc nous contenter de n'étudier cette fonction que sur l'intervale $[0,\pi]$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{\cos x(2+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$$

$\rightarrow$ Le signe de $f'(x)$ est déterminé par le signe de $2\cos x + 1$

$\forall x \in [0,\pi]$ la racine de $2\cos x + 1 \Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{-2\sin(x)(2+\cos x)^{\cancel{2}} - (2\cos x + 1)\left(2\cancel{(2+\cos x)}(-\sin x)\right)}{(2+\cos x)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2\sin(x)\overbrace{(\cos x - 1)}^{\leq 0}}{\underbrace{(2+\cos x)^3}_{>0}}$$

$\rightarrow$ Le signe de $f''(x)$ est déterminé par l'inverse du signe de $\sin(x)$.

$\forall x \in [0,\pi]$ les racines de $\sin(x)(\cos x - 1) \Rightarrow x = 0$ et $x = \pi$

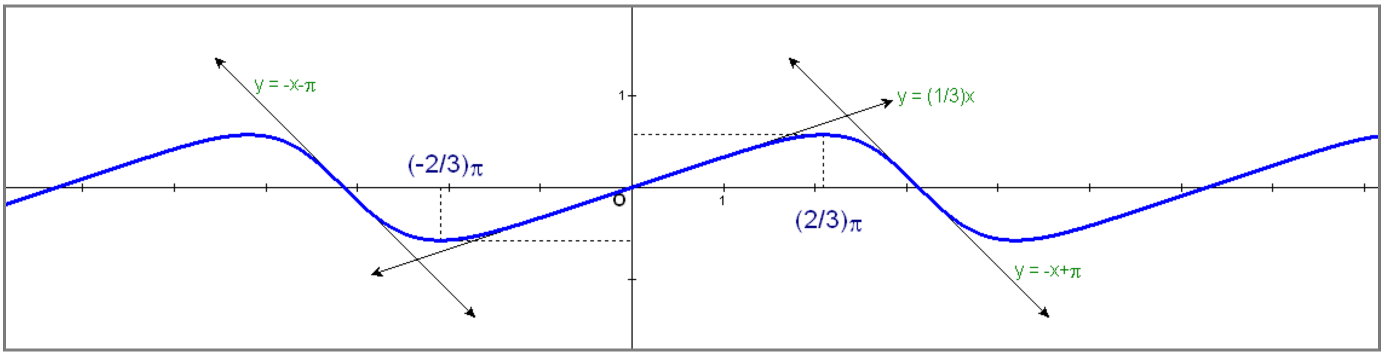
	0		$2\pi/3$		π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0
Variation	$\nearrow$	$\nearrow$	*MAX*	$\searrow$	$\searrow$
Concavité	*PI*	$\cap$	$\cap$	$\cap$	*PI*

3. Le tableau précédent nous montre que les points d'inflexion n'apparaissent qu'aux endroits ou la courbe coupe l'axe des Ox.

Pour $x = 0 \rightarrow (y - f(0)) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{3}x \Rightarrow$ Pente $= \dfrac{1}{3}$

Pour $x = \pi \rightarrow (y - f(\pi)) = f'(\pi)(x - \pi) \Leftrightarrow y = -(x - \pi) \Rightarrow$ Pente $= -1$

4.Voir le graphe ci dessous.



Aout 09

EXANA252 – EPL, UCL, Louvain, juillet 09, série 1.

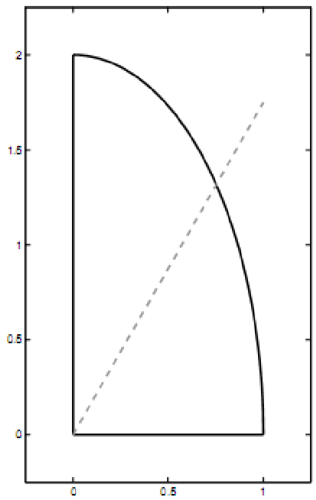
Pour leur goûter, Giff et Stivy se partagent un quart de tarte d'une forme un peu particulière : il s'agit de la surface du plan délimité par les axes Ox et Oy et la courbe d'équation $y = 2\sqrt{1-x^2}$. Comme ils sont d'une extrême politesse, ils souhaitent couper ce quart de tarte en deux morceaux de surface rigoureusement égales, à l'aide d'un seul coup de couteau passant par l'origine.

1. Calculez une primitive de la fonction $2\sqrt{1-x^2}$ en utilisant le changement de variable $x = \cos u$.

   Note : vous devez obtenir une primitive égale à $F(x) = x\sqrt{1-x^2} - \arccos x$.

2. Calculez d'abord la surface totale du quart de tarte. Consédirez ensuite le coup de couteau passant par l'origine correspondant à la droite d'équation $y = mx$. Calculez en fonction de m les surfaces des deux morceaux obtenus.

3. Calculez le coefficient angulaire m consuidant à deux parts de surfaces égales.



Solution proposée par Steve Tumson

1. $F(x)=\int 2\sqrt{1-x^2}\,dx \xrightarrow{x=\cos u} 2\int\sqrt{1-\cos^2 u}\,(-\sin u)\,du=-2\int \sin^2 u\,du=-2\int\frac{1}{2}(1-\cos(2u))du=\sin(u)\cos(u)-u+C$

$$\xrightarrow{u=ar\cos(x)} F(x)=\underbrace{\sin\left(Arc\cos(x)\right)}_{\sqrt{1-x^2}}\underbrace{\cos\left(Arc\cos(x)\right)}_{x}-Arc\cos(x)+C=\boxed{x\sqrt{1-x^2}-Arc\cos(x)+C}$$

En effet, $\sin(Arc\cos(x))$: on pose $t=Arc\cos(x)\Leftrightarrow x=\cos(t)$

$\Rightarrow \sin(t)=\sqrt{1-\cos^2(t)}=\sqrt{1-x^2}$

2. $S_{totale}=\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx=F(1)-F(0)=-\cancel{Arc\cos(1)}+Arc\cos(0)=\boxed{\frac{\pi}{2}}$

NB : il est évident que la fonction donnée est celle d'un quart d'une ellipse centrée d'axes de longueur 1 et 2.

En effet $y=2\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow y^2=4\left(1-x^2\right)\Leftrightarrow\left(\frac{x}{1}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$

On sait par ailleurs qu'une ellipse d'axes a et b a une aire égale à πab, puisque dans l'énoncé nous avons un quart d'ellipse, on retrouve bien $S=\frac{1}{4}\pi(1)(2)=\frac{\pi}{2}$

Notons maintenant I le point d'intersection entre la droite et l'ellipse de coordonnées $(x_I;y_I)$, commençons par calculer les coordonées de ce point en résolvant l'équation $2\sqrt{1-x_I^{\,2}}=mx_I$.

Nous ne travaillons que pour des abscisses positives et un coefficient angulaire m positif, on peut élever au carré :

$$4\left(1-x_I^{\,2}\right)=m^2x_I^{\,2}\Leftrightarrow x_I=\pm\frac{2}{\sqrt{m^2+4}}\xrightarrow{x>0} x_I=\frac{2}{\sqrt{m^2+4}}\Rightarrow y_I=f\left(x_I\right)=\frac{2m}{\sqrt{m^2+4}}$$

L'aire sous la droite est donnée par :

$$S_{\inf}=\int_0^{x_I}(mx)\,dx+\int_{x_I}^{1}\left(2\sqrt{1-x^2}\right)dx=\cancel{\frac{mx_I^2}{2}-x_I\sqrt{1-x_I^{\,2}}}+Arc\cos(x_I)=\boxed{Arc\cos\left(\frac{2}{\sqrt{m^2+4}}\right)}$$

On en déduit que $S_{\sup}=S_{\text{totale}}-S_{\inf}=\frac{\pi}{2}-Arc\cos\left(\frac{2}{\sqrt{m^2+4}}\right)$

3.

Pour avoir deux parts égales, la surface des deux morceaux doit valoir $\frac{S_{\text{totale}}}{2}=\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow Arc\cos\left(\frac{2}{\sqrt{m^2+4}}\right)=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{m^2+4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow m=\pm2\Rightarrow\boxed{m=2}$$

Aout 09

EXANA253 – EPL, UCL, Louvain, juillet 09, série 2.

1. Calculez la limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos(x)-2\cos(2x)}{\sin^2(x)}$$

2. Calculez l'intégrale définie

$$\int_1^2 x^2\ln(x)dx$$

3. (a) Soient a, b deux nombres réels et f une fonction intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. Démontrez que

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$$

(b) Déduisez-en la valeur de

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$$

Solution proposée par Steve Tumson

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos(x)-2\cos(2x)}{\sin^2(x)}=\dfrac{0}{0}$

$$\xrightarrow{HOSPITAL}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)+4\sin(2x)}{\sin(2x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\sin(2x)}+4\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(2x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos(x)}+4=\boxed{\frac{7}{2}}$$

2. $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln(x)dx \to F(x)=\int x^2\ln(x)dx \xrightarrow{PARTIE} \frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{x^3}{9}+C=\frac{x^3}{3}\left(\ln(x)-\frac{1}{3}\right)+C$

$$\Rightarrow\int_1^2 x^2\ln(x)dx=F(2)-F(1)=\frac{8}{3}\left(\ln(2)-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(\ln(1)-\frac{1}{3}\right)=\boxed{\frac{8\ln(2)}{3}-\frac{7}{9}\simeq 1{,}0708}$$

3. (a) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ posons $X=a+b-x \Leftrightarrow x=a+b-X \quad \forall X\in\mathbb{R}$

– la différentielle s'écrit alors $dx=d\left(a+b-X\right)=-dX$

– la borne $x=a$ correspond à la borne $X=a+b-a=b$

– la borne $x=b$ correspond à la borne $X=a+b-b=a$

On peut ainsi réécrire $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx=\int_{X=b}^{X=a} f\left(a+b-X\right)\left(-dX\right)=\int_{X=a}^{X=b} f\left(a+b-X\right)dX$

Or la valeur d'une intégrale définie ne dépend pas de la variable d'intégration.

Par exemple, on peut écrire : $\int_\alpha^\beta g\left(2x+3\right)dx=\int_\alpha^\beta g\left(2X+3\right)dX=\int_\alpha^\beta g\left(2t+3\right)dt$

Donc dans notre cas, on peut écrire $\displaystyle\int_{X=a}^{X=b} f\left(a+b-X\right)dX=\int_{x=a}^{x=b} f\left(a+b-x\right)dx$

Finalement : $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx=\int_{x=a}^{x=b} f\left(a+b-x\right)dx$

(b) $$I=\int_0^\pi\frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx=\int_0^\pi\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx=\int_0^\pi\frac{\pi\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx-\underbrace{\int_0^\pi\frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx}_{I}$$

$$\Rightarrow 2I=\pi\int_0^\pi\frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx=-\pi\int_0^\pi\frac{1}{1+\cos^2(x)}d\left(\cos(x)\right)=-\pi\left[\arctan(\cos(x))\right]_0^\pi$$

$$\Leftrightarrow 2I=-\pi\left[\underbrace{\arctan(-1)}_{-\pi/4}-\underbrace{\arctan(1)}_{\pi/4}\right]=\frac{\pi^2}{2}\Rightarrow\boxed{I=\frac{\pi^2}{4}}$$

EXANA254 – EPL, UCL, Louvain, juillet 09, série 2.

1. Soit g la fonction définie par $g(t) = 2t + \ln t \quad \left(t \in \left]0, +\infty\right[\right)$.

   (a) Dressez le tableau des variations de g sur $\left]0, +\infty\right[$. En particulier, calculez $\lim\limits_{t \to 0} g(t)$ et $\lim\limits_{t \to \infty} g(t)$.

   (b) Déduisez-en l'existence d'un nombre réel α strictement positif tel que $g(\alpha) = 0$.

   (c) Etudiez le signe de g.

   Note : pour la seconde partie de cette question, admettez que $\alpha = 0,42$.

2. Soit h la fonction définie par $h(t) = t^2 - t + t \ln t \quad \left(t \in \left]0, +\infty\right[\right)$.

   (a) Dressez le tableau des variations de h sur $\left]0, +\infty\right[$. Enparticulier, calculez $\lim\limits_{t \to 0} h(t)$ et $\lim\limits_{t \to \infty} h(t)$.

   (b) Déterminez une valeur approchée de $h(\alpha)$ à 10^{-1} près.

   (c) Démontrez que l'équation $h(t) = 0$ admet une solution unique β, dont vous donnerez la valeur exacte.

   (d) Représenter le graphe de h dans un repère orthonormal.

Solution proposée par Steve Tumson

1. (a) $\frac{dg(t)}{dt} = 2 + \frac{1}{t} > 0$ pour $t \in \left]0, +\infty\right[$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to 0^+} g(t) = -\infty \\ \lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = +\infty \end{cases}$$

(b) Sur l'intervalle $t \in \left]0, +\infty\right[$, la fonction g passe de $-\infty$ à $+\infty$ et est toujours croissante $\left(\frac{dg(t)}{dt} > 0 \quad \forall t > 0\right)$.

La fonction coupe donc inévitablement une et une seule fois l'axe des abscisses.

(c) Du raisonnement tenu au point (b), on déduit : $\begin{cases} g(t) < 0 & \forall t \in \left]0, \alpha\right[\\ g(t) = 0 & t = \alpha \\ g(t) > 0 & \forall t \in \left]\alpha, +\infty\right[\end{cases}$

2. (a) $\frac{dh(t)}{dt} = 2t \cancel{-1} + \ln t + t\frac{\cancel{1}}{t} = 2t + \ln t = g(t)$ pour $t \in \left]0, +\infty\right[$

Variations :

$$\begin{cases} \frac{dh(t)}{dt} = g(t) < 0 & \forall t \in \left]0, \alpha\right[\\ \frac{dh(t)}{dt} = g(t) = 0 & t = \alpha \\ \frac{dh(t)}{dt} = g(t) > 0 & \forall t \in \left]\alpha, +\infty\right[\end{cases}$$

Limites :

$$\lim_{t \to 0^+} h(t) = 0.\infty \xrightarrow{HOSPITAL} \lim_{t \to 0^+} \frac{t - 1 + \ln(t)}{1/t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1 + 1/t}{-1/t^2} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{HOSPITAL} \lim_{t \to 0^+} \frac{-1/t^2}{2/t^3} = -\frac{1}{2} \lim_{t \to 0^+} t = 0$$

$\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = +\infty$: en effet, on a vu au point précédent que $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{dh(t)}{dt} = +\infty$

ce qui signifie qu'il n'y a pas d'asymptote oblique ou horizontale ;

or, nous avons aussi $h(t)$ croissante dans cet intervalle car $\frac{dh(t)}{dt} > 0 \quad \forall t \in \left]\alpha, +\infty\right[$.

(b) Vu qu'il est impossible d'évaluer $\ln(0,42)$ (avec les outils dont disposent les étudiants sortis de rhéto en tout cas ;)), il faut essayer de se servir de la seule information utile que l'on ait : $g(\alpha) = 0$.

On peut alors réécrire :

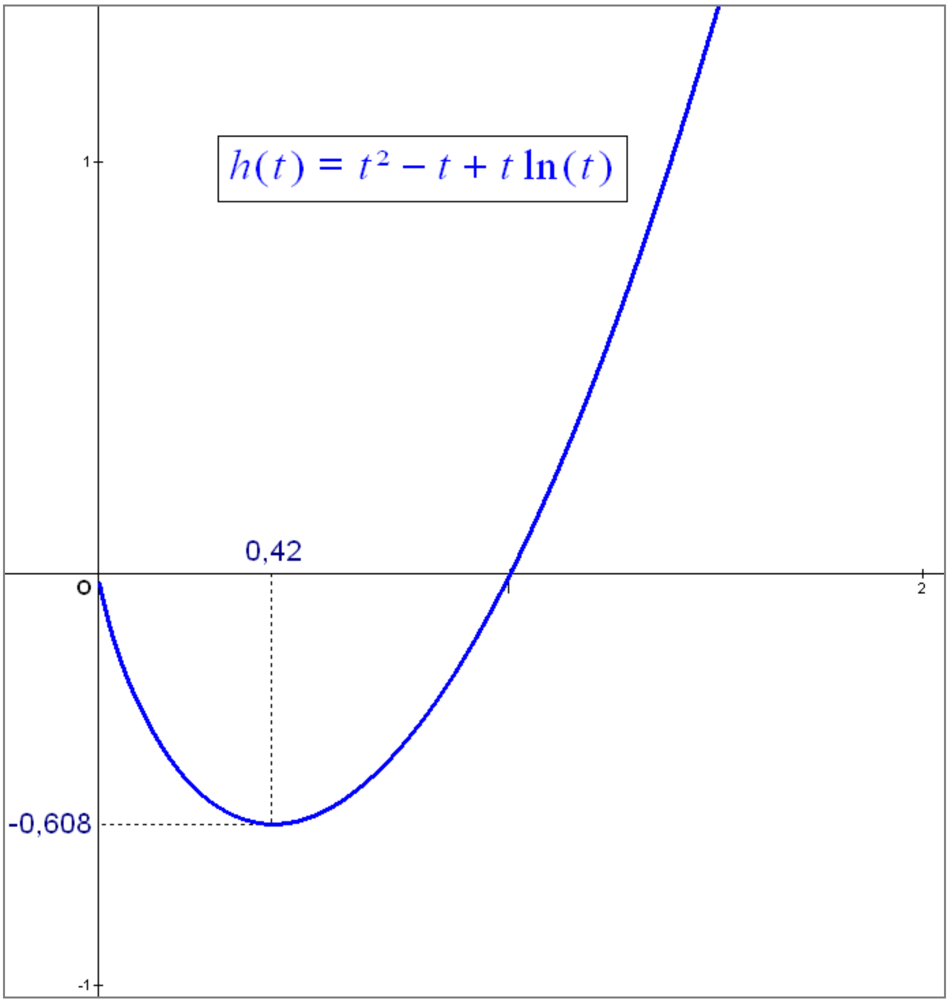
$$h(t) = t^2 - t + \underbrace{t \ln t + 2t^2}_{t(2t + \ln t)} - 2t^2 = -t^2 - t + t.g(t) \Rightarrow h(\alpha) = -\alpha^2 - \alpha + \alpha.\underbrace{g(\alpha)}_{0} = -\alpha(\alpha + 1) \simeq -0,6$$

(c) On sait que :

$\begin{cases} \frac{dh(t)}{dt} > 0 \quad \forall t \in \left]\alpha, +\infty\right[\\ \lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = +\infty \\ h(\alpha) \simeq -0,6 \end{cases} \rightarrow$ $\begin{cases} \text{En } t = \alpha, \text{ l'image de } t \text{ est sous l'axe des abscisses. On sait qu'ensuite,} \\ \text{la fonction est toujours croissante et qu'elle tend vers l'infini : } g \text{ doit} \\ \text{donc couper une et une seule fois l'axe des abscisses pour un certain } \beta > \alpha. \end{cases}$

$$h(t) = t^2 - t + t\ln(t) = 0 \xrightarrow{t \neq 0} \ln t = 1 - t \Leftrightarrow t = 1$$

(d) Voir le graphe ci-dessous.



Aout 09

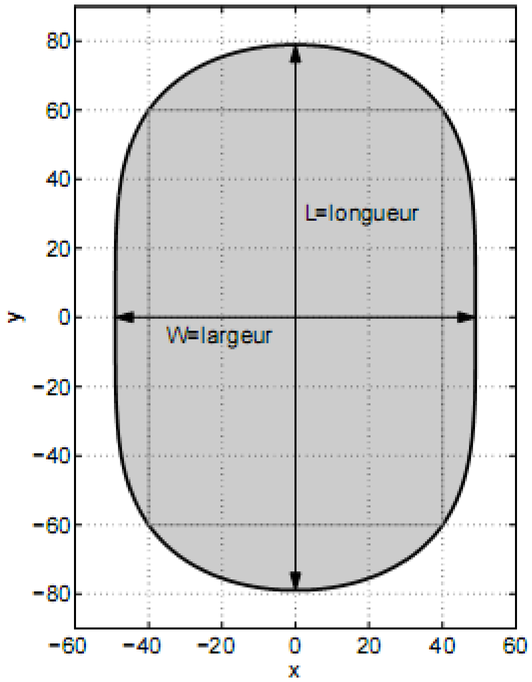
EXANA255 – EPL, UCL, Louvain, juillet 09, série 2.

Le nouveau stade de Louvain-la-Neuve, représenté graphiquement ci-dessous, correspond à la surface du plan Oxy décrite par l'inégalité $y^4 \le 3a^4 - 8b^2x^2$, où a et b sont deux paramètres positifs à déterminer. Les abscisses et les ordonnées sont mesurées en mètres.

1. Calculez en fonction des paramètres a et b les dimensions du stade le long des axes Ox et Oy (largeur W et longueur L). Quelles sont les unités des paramètres a et b ?

2. On considère un terrain de football rectangulaire dont les côtés sont parallèles aux axes Ox et Oy, symétriques par rapport à ces axes, et inscrit à l'intérieur du stade.
   Calculez quelle est la plus grande surface possible pour ce terrain, en fonction des paramètres a et b.

3. Déterminez les valeurs des paramètres a et b de façon à ce que le terrain optimal calculé au point précédent possède des dimensions réglementaires, à savoir une longueur de 120 mètres et une largeur de 80 mètres.



Solution proposée par Steve Tumson

1. Longueur selon Ox $\rightarrow$ points appartenant au contour du stade pour lesquels $y = 0$.

$$\Rightarrow 0 = 3a^4 - 8b^2x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3a^4}{8b^2} \Leftrightarrow \boxed{x = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}\frac{a^2}{b} = W}$$

Longueur selon Oy $\rightarrow$ points appartenant au contour du stade pour lesquels $x = 0$.

$$\Rightarrow y^4 = 3a^4 \Leftrightarrow \boxed{y = \pm\sqrt[4]{3}a = L}$$

Puisque tous les facteurs de l'inéquations doivent avoir les mêmes unités pour que le problème ait un sens physique, il faut a et b en mètres. On peut aussi déduire cela par les expressions des longueurs venant d'être trouvées.

2. Le problème montre clairement la double symétrie du stade, on peut donc le simplifier en optimisant un quart de terrain pour les $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Un point se trouvant sur le contour du stade est soumis à la relation $y^4 = 3a^4 - 8b^2x^2$.

Ses coordonnées peuvent donc s'écrire $\left(x_C = \sqrt{\frac{3a^4 - y^4}{8b^2}}, y_C = y \right)$.

La surface du rectangle définissant le quart de stade est donc $S = x_C y_C = y\sqrt{\frac{3a^4 - y^4}{8b^2}}$

Pour l'optimiser, il faut annuler sa dérivée :

$$\frac{dS}{dy} = \sqrt{\frac{3a^4 - y^4}{8b^2}} - y\frac{4y^3}{8b^2}\left(2\sqrt{\frac{3a^4 - y^4}{8b^2}}\right)^{-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{3a^4 - y^4}{8b^2} - \frac{2y^4}{8b^2} = 0 \Leftrightarrow 3y^4 = 3a^4$$

$$\Rightarrow y = \pm a \xrightarrow{y>0} \boxed{y = a < L}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{a^4}{4b^2}} = \pm\frac{a^2}{2b} \xrightarrow{x>0} \boxed{x = \frac{a^2}{2b} < W}$$

La surface ainsi optimisée du <u>quart</u> de terrain vaut ainsi $\frac{a^3}{2b}$.

La surface totale optimisée est donc : $\boxed{S_{\max} = \frac{2a^3}{b}}$

3. Il faut $\begin{cases} y = 60 \Rightarrow \boxed{a = 60} \\ x = 40 \Rightarrow \boxed{b = \frac{a^2}{2x} = 45} \end{cases}$

EXANA256 – EPL, UCL, Louvain, septembre 09.

1. Introduire l'intégrale définie

$$\int_{-1}^{1} x^2\left(2x^3+3\right)^{\frac{1}{3}}dx$$

2. Calculez la limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(1-\cos x\right)}{x^4}$$

3. Soient g une fonction continue de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, a un nombre réel et f la fonction définie de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par

$$f\left(x\right)=\left(x-a\right)g\left(x\right)$$

Démontrez rigoureusement que f est dérivable au point a, et déterminez $f'\left(a\right)$

---

1) Posons $t=2x^3+3\to\begin{cases} dt=6x^2dx\to x^2dx=\dfrac{dt}{6} \\ \text{si } x=-1\to t=1 \\ \text{si } x=1\quad\to t=5 \end{cases}$

L'intégrale devient : $I=\displaystyle\int_1^5\frac{t^{\frac{1}{3}}}{6}dt=\frac{1}{6}\left[\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_1^5=\frac{1}{8}.\left(5\sqrt[3]{5}-1\right)\simeq\boxed{0.9437}$

2) $L=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(1-\cos x\right)}{x^4}\xrightarrow{Hospital}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(1-\cos x\right).\sin x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(1-\cos x\right)}{4x^2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{=1}$

$\displaystyle\xrightarrow{Hospital}\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(1-\cos x\right)\sin x}{8x}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\cos\left(1-\cos x\right)}^{=1}}{8}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{=1}=\boxed{\frac{1}{8}}$

3) La fonction $f\left(x\right)$ est dérivable en le réel a, si et seulement si

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}$ est réelle. Ce qui nous donne ici :

$\displaystyle f'\left(a\right)=\lim_{x\to a}\frac{\left(x-a\right)g\left(x\right)-\left(a-a\right)g\left(a\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(x-a\right)g\left(x\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}g\left(x\right)=g\left(a\right)$

En a, on obtient alors : $\boxed{f'\left(a\right)=g\left(a\right)}$

Octobre 09

EXANA257 – EPL, UCL, Louvain, septembre 09.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) Déterminer f' et dresser le tableau des variations de f

c) Démontrez que la droite $\Delta : y = -x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$, et déterminez la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.

d) Tracez la courbe $\mathcal{C}_f$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - \dfrac{1}{2}x^2 - x - 1$

a) Déterminez $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

b) Calculez g'. En utilisant les résultats de la partie 1., déterminez le signe de g' et dressez le tableau des variations de g

c) Déterminez les positions respectives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et tracez $\mathcal{C}_g$

---

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

b) $f'(x) = e^x - 1$ $\qquad f'(x) = 0$ si $e^x = 1 \to x = 0$

<u>Tableau des variations</u>

		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

c) Appliquons les formules de Gauchy

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - x - 1}{x} = -1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) + x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x - x - 1 + x\right) = -1 \end{array}\right\} \to AV :\ y = -x - 1$$

Pour déteminer la position de l'asymptote par rapport à $f(x)$, étudions le signe de :

$f(x) - y$ quand x tend vers $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - y\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(e^x - x - 1 + x + 1\right) = \lim_{x\to-\infty} e^x \text{ qui est toujours positif.}$$

La fonction $f(x)$ est donc située au-dessus de l'asymptote

2) a) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

b) $g'(x) = e^x - x - 1$ dont la racine est $x = 0$

On note que en fait : $g'(x) = f(x)$. Donc comme nous avons vu au point 1. que $f(x)$ est toujours positive cela implique que $g(x)$ est toujours croissante.

De plus, on vérifie facilement que $x = 0$ est aussi un point d'inflexion pour $g(x)$, puisque $g''(x) = e^x - 1 \rightarrow g''(0) = 0$

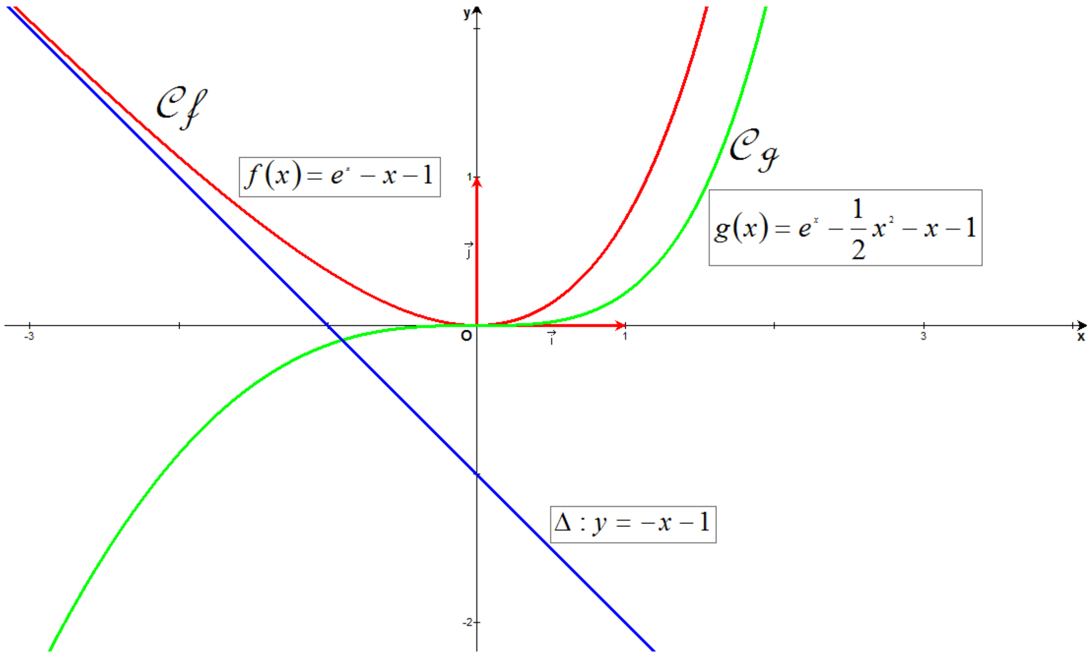
Tableau des variations

		0	
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	I	$\nearrow$

c) Position des courbes

La différence $g(x) - f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ est toujours négative sauf pour $x = 0$ où les fonctions sont égales.

Conclusion, $\mathcal{C}_g$ est toujours située en dessous de $\mathcal{C}_f$



Octobre 09

EXANA258 – EPL, UCL, Louvain, septembre 09.

On considère une bouée constituée d'un cylindre central auquel on a opposé à chaque extrémité un cône droit à base circulaire de même hauteur que le cylindre central. On note h la hauteur (en m) du cylindre et de chaque cône, et r le rayon (en m) des sections circulaires du cylindre et de la base de chaque cône. On cherche à concevoir une bouée la plus volumineuse possible.

1. Considérez tout d'abord un des deux cônes droits séparément : en le représentant comme un solide de révolution, démontrez à l'aide du calcul d'une intégrale que son volume est égal à $\frac{1}{3}\pi r^2 h$
2. Calculez en fonction de r et de h le volume total et la surface totale de la bouée, en sachant que la surface latérale du cône considéré au point précédent vaut $\pi r\sqrt{h^2+r^2}$.
3. Une disposition réglementaire impose que la surface de la bouée soit égale à 2π mètres carrés. Déterminez alors les dimensions r et h correspondant de la bouée possédant le plus grand volume possible.
   Conseil : exprimez la hauteur h en fonction du rayon r

1) Pour engendrer le cône par rotation autour de l'axe des x, il faut faire tourner la surface délimitée par la droite d'équation $y = \frac{r}{h}x$, la droite verticale $x = h$ et l'axe des x.

$$V_{cône} = \pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

2) La surface totale de la bouée est donnée par 2 fois la surface latérale du cône plus la surface latérale du cylindre :

$$S_{bouée} = 2S_{cône} + S_{cylindre} = 2\pi r\sqrt{h^2+r^2} + 2\pi rh = 2\pi r\left(\sqrt{h^2+r^2}+h\right)$$

Pour le volume :

$$V_{bouée} = 2V_{cône} + V_{cylindre} = \frac{2}{3}\pi r^2 h + \pi r^2 h = \frac{5}{3}\pi r^2 h$$

3) La surface latérale doit être égale à 2π m^2 :

$$2\pi r\left(\sqrt{h^2+r^2}+h\right) = 2\pi \rightarrow -\frac{1}{r}+h = \sqrt{h^2+r^2} \rightarrow \frac{1}{r^2} - \frac{2h}{r} + \cancel{h^2} = \cancel{h^2} + r^2 \rightarrow \frac{2h}{r} = \frac{1}{r^2} - r^2$$

$$\rightarrow \frac{2h}{r} = \frac{1-r^4}{r^2} \rightarrow h = \frac{1-r^4}{2r}$$

Le volume devient : $V_{bouée} = \frac{5}{3}\pi r^2 \frac{1-r^4}{2r} = \frac{5\pi}{3}.\left(r - r^5\right)$

Calculons la dérivée du volume : $V'_{bouée} = \frac{5\pi}{3}\left(1-5r^4\right)$ qui sera nulle si : $1-5r^4 = 0$

$$\rightarrow \boxed{r = \sqrt[4]{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt[4]{5^3}}{5} \simeq 0.67\ m}$$

La hauteur est $\boxed{h = \frac{1-r^4}{2r} = \frac{1-\frac{1}{5}}{2\frac{\sqrt[4]{5^3}}{5}} = \frac{2\sqrt[4]{5}}{5} \simeq 0.60\ m}$

EXANA259 – Compléments.

Calculer les limites suivantes :

$$L_1 = \lim_{x\to 1}\left[\sin\frac{\pi}{2}\left(x^2-4x+4\right)\right]^{\frac{x}{(x-1)^2}}$$

$$L_2 = \lim_{x\to 3}\left[\cos\left(x^2-5x+6\right)\right]^{\frac{1}{(x-3)^2}}$$

$L_1 = \lim\limits_{x\to 1}\left[\sin\frac{\pi}{2}\left(x^2-4x+4\right)\right]^{\frac{x}{(x-1)^2}}$ C'est une forme 1^∞. Transformons en forme $\infty\times 0$.

$$L_1 = \lim_{x\to 1} e^{\frac{x}{(x-1)^2}\ln\left[\sin\frac{\pi}{2}\left(x^2-4x+4\right)\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{(x-1)^2}\ln\left[\sin\frac{\pi}{2}\left(x^2-4x+4\right)\right]}$$

Occupons nous de l'exposant :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x-1)^2}\ln\left[\sin\frac{\pi}{2}(x-2)^2\right] = \lim_{x\to 1}\frac{\ln\left[\sin\frac{\pi}{2}(x-2)^2\right]}{\dfrac{(x-1)^2}{x}}$$

$$\xrightarrow{\text{Hospital}}\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2}(x-2)^2}.\cos\frac{\pi}{2}(x-2)^2.\pi(x-2)}{\dfrac{2(x-1)x-(x-1)^2}{x^2}} = \lim_{x\to 1}\frac{\pi\, x^2(x-2)\cot\frac{\pi}{2}(x-2)^2}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\pi\, x^2(x-2)}{(x+1)}.\lim_{x\to 1}\frac{\cot\frac{\pi}{2}(x-2)^2}{x-1} = \frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\cot\frac{\pi}{2}(x-2)^2}{x-1}$$

$$\xrightarrow{\text{Hospital}}\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{-\dfrac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}(x-2)^2}.\pi(x-2)}{1} = -\frac{\pi^2}{2}$$

Et finalement : $\boxed{L_1 = e^{-\frac{\pi^2}{2}}}$

$$L_2 = \lim_{x\to 3}\left[\cos\left(x^2-5x+6\right)\right]^{\frac{1}{(x-3)^2}}$$

C'est un forme 1^∞. Transformons en forme $\infty.0$

$$L_2 = \lim_{x\to 3} e^{\frac{1}{(x-3)^2}\ln\left(\cos\left(x^2-5x+6\right)\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}\ln\left(\cos\left(x^2-5x+6\right)\right)}$$

Occupons nous de l'exposant :

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}\ln\left(\cos\left(x^2-5x+6\right)\right) = \lim_{x\to 3}\frac{\ln\left(\cos\left(x^2-5x+6\right)\right)}{(x-3)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{\cos\left(x^2-5x+6\right)}\left(-\sin\left(x^2-5x+6\right)\right)(2x-5)}{2(x-3)}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 3}\frac{1}{\cos\left(x^2-5x+6\right)}}_{=1}\underbrace{\lim_{x\to 3}\frac{-(2x-5)}{2}}_{=-\frac{1}{2}}\lim_{x\to 3}\frac{\sin\left(x^2-5x+6\right)}{x-3}$$

$$\xrightarrow{\text{Hospital}} -\frac{1}{2}\lim_{x\to 3}\frac{\cos\left(x^2-5x+6\right).(2x-5)}{1} = -\frac{1}{2}$$

Finalement : $\boxed{L_2 = e^{-\frac{1}{2}}}$