Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 28

EXANA280 – EXANA289

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Juillet 2010

EXANA280 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2010, 2ème série.

1. Calculer une primitive de

$$\frac{2x-1}{(x-3)^2+4}$$

2. Calculer les deux limites

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{y\to +\infty} e^{-y}y$$

Indication. L'une de ces limites se déduit aisément de l'autre.

3. Le théorème des accroissements finis s'énonce comme suit :

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c\in\,]a,b[$ tel que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Utiliser ce résultat pour démontrer que

$$\frac{1}{5}<\ln\left(\frac{5}{4}\right)<\frac{1}{4}$$

---

1. $I=\int\frac{2x-1}{(x-3)^2+4}dx=\frac{1}{4}\int\frac{2x-1}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+1}dx$

On pose : $t=\frac{x-3}{2}\to dx=2dt$

$$\to I=\frac{1}{4}\int\frac{2(2t+3)-1}{t^2+1}2dt=\frac{1}{2}\int\frac{4t+5}{t^2+1}dt=\int\frac{2t}{t^2+1}dt+5\int\frac{1}{t^2+1}dt$$

$$=\ln\left(t^2+1\right)+\frac{5}{2}\arctan t=\ln\left(\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+1\right)+\frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)$$

$$=\ln\left((x-3)^2+4\right)+\ln\frac{1}{4}+\frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)=\boxed{\ln\left((x-3)^2+4\right)+\frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)+k}$$

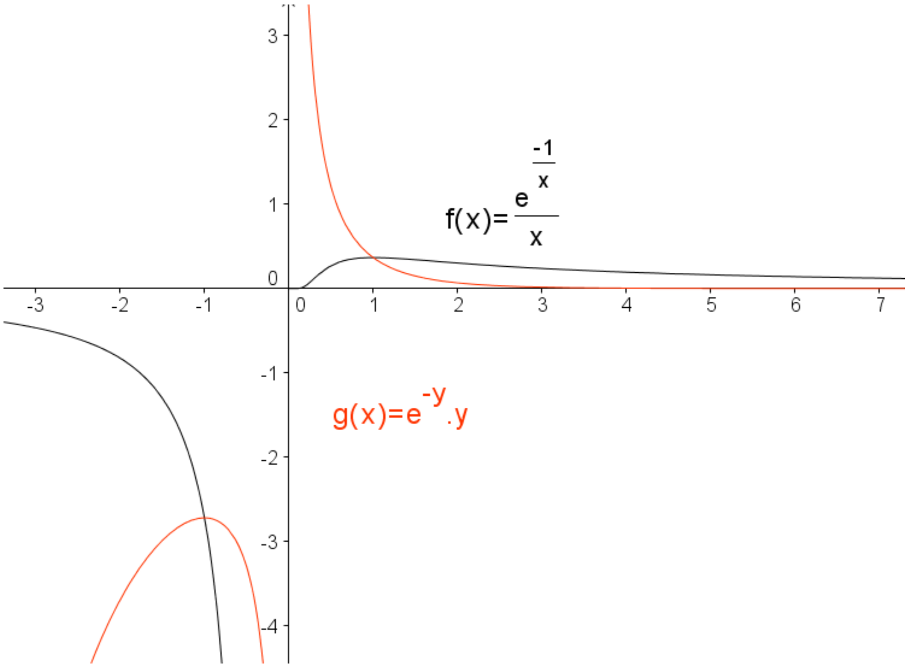
2. Commençons par la deuxième :

$$\lim_{y\to+\infty} e^{-y}.y = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{y}} \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^{y}} = 0$$

La première limite est : $\lim_{x\to+0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

Posons : $y = \frac{1}{x} \to$ si x tend vers +0, alors y tend vers $+\infty$

$\to \lim_{x\to+0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{y\to+\infty} e^{-y}.y$ qui nous venons de l'établir vaut 0.



3. Les inégalités peuvent s'écrire : $\frac{1}{5} < \frac{\ln 5 - \ln 4}{5-4} < \frac{1}{4}$

Soit la fonction $f(x) = \ln x$ et soit $c \in \left]4,5\right[$

En vertu du théorème, on a : $f'(c) = \frac{\ln 5 - \ln 4}{5-4}$

Or $(\ln x)' = \frac{1}{x} \to \frac{1}{c} = \frac{\ln 5 - \ln 4}{5-4} = \ln 5 - \ln 4.$

Les inégalités s'écrivent alors : $\frac{1}{5} < \frac{1}{c} < \frac{1}{4}$ qui sont vérifiées puique $c \in \left]4,5\right[$

EXANA281 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2010, 2ème série.

Au cours de cet exercice, on fera appel au résultat suivant, qui indique qu'un inégalité entre deux fonctions est préservée lorsqu'on intégre ses deux membres :

Si u et v sont deux fonction continues telles que $u(t) \leq v(t)$ pour tout ≥ 0, on a

$$\int_0^x u(t)\, dt \leq \int_0^x v(t)\, dt \text{ pour tout } x \geq 0$$

---

1. (a) Prouver que, pour tout nombre réel $t \geq 0$,

$$1 - t \leq \frac{1}{1+t}$$

puis en déduire qu'on a pour tout nombre réel $x \geq 0$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x).$$

(b) Soit g la fonction définie, sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$$

Démontrer que, pour tout nombre réel $t \geq 0$,

$$g'(t) \leq 0$$

puis en déduire qu'on a pour tout nombre réel $x \geq 0$

$$g(x) \leq 0.$$

2. On souhaite étudier le fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Démontrer à l'aide du point 1. que f est décroissante sur l'interalle $]0, +\infty[$.

(b) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

(c) Démontrer que f est dérivable (à droite) en 0 et calculer $f'(x)$. Déterminer si f est continue en 0.

(d) Donner l'équation de la tangente T à la courbe **C** représentative de f au point d'abscisse 0 puis, grâce au point 1., préciser la position de **C** par rapport à T.

(e) Tracer dans un repère orthonormé la droite T et la courbe **C** représentative de f, en utilisant les informations obtenues précédemment ainsi que le fait que la courbe **C** ne possède aucun point d'inflexion).

(Il est possible de répondre à la question 2. sans avoir démontré les inégalité du point 1.)

1.(a) $1-t\le\frac{1}{1+t}\Rightarrow\frac{1}{1+t}-1+t\ge0\Rightarrow\frac{1+t^2-1}{1+t}\ge0\Rightarrow\frac{t^2}{1+t}\ge0$

Comme $t\ge0,$ cette dernière expression est toujours vérfiée.

Dès lors : $\int_0^x(1-t)\,dt\le\int_0^x\frac{1}{1+t}\,dt$

implique en vertu du théorème donné en préambule :

$$\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x\ge\left[\ln(1+t)\right]_0^x\Rightarrow x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)$$

(b) $g(t)=\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)\Rightarrow g'(x)=\frac{1+t-t}{(1+t)^2}-\frac{1}{1+t}=\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{1+t}=-\frac{t}{(1+t)^2}$

Sur l'intervalle $[0,\infty[$, $t\ \le0$ et donc $g'(t)\le0.$

Autrement dit, la fonction g est toujours décroissante sur cet intervalle.

Reprenons sous la forme : $g'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{1+t}.$

On a donc : $\frac{1}{(1+t)^2}\le\frac{1}{1+t}\Rightarrow\int_0^x\frac{1}{(1+t)^2}\,dt\le\int_0^x\frac{1}{1+t}\,dt\Rightarrow-\left[\frac{1}{1+t}\right]_0^x\le\left[\ln(1+x)\right]_0^x$

$\Rightarrow-\frac{1}{1+x}+1\le\ln(1+x)\Rightarrow\frac{x}{1+x}\le\ln(1+x)\Rightarrow g(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)\le0$

2) (a) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x} & \text{si} \quad x>0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$

Nous constatons que le numérateur n'est autre que la fonction $g(x)$ étudiée plus haut.

Nous savons que $g(x)\leq 0$ sur $]\,0,\infty\,[$ $\quad$ (note : $g(0)=0$).

Nous en déduisons que $f(x)$ est décroissante sur $]\,0,\infty\,[$.

$$(b)\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}\xrightarrow{\text{Hospital}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=0$$

$$(c)\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\xrightarrow{\text{Hospital}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}\xrightarrow{\text{Hospital}}\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2+4x}=-\frac{1}{2}.$$

Par conséquent : $f'(x)=-\dfrac{1}{2}$

Une fonction est continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Donc calculons : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\xrightarrow{\text{Hospital}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$

Or $f(0)=1$ donc la fonction f est continue en 0.

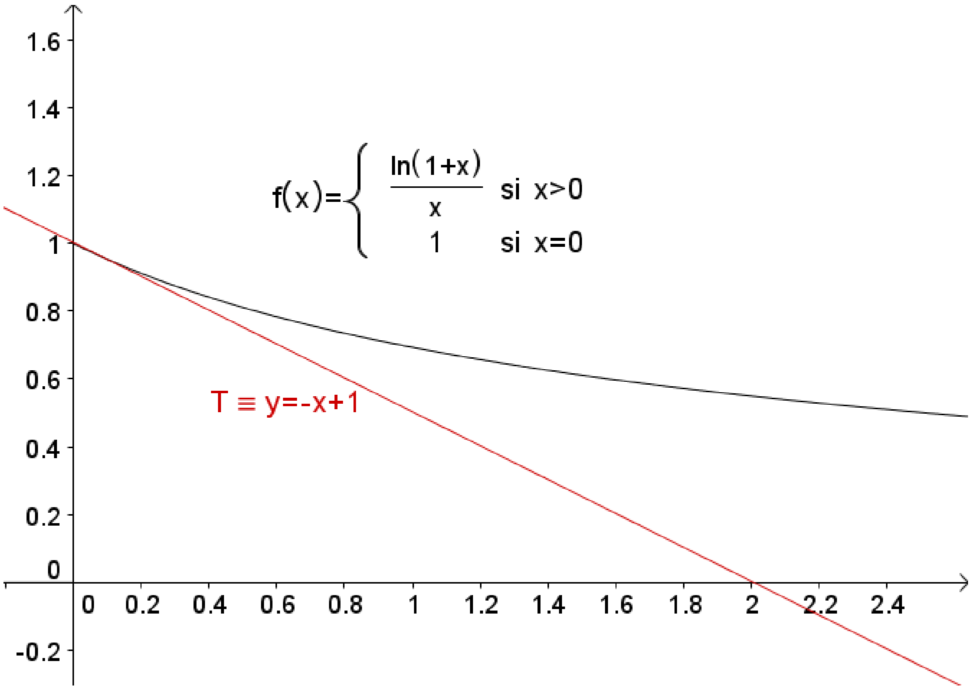
(d) Equation de la tangente : $T\equiv y=-\dfrac{1}{2}x+1.$

Pour déterminer la position de T par rapport à la courbe C, calculons la distance

$$d(C,T)=\frac{\ln(1+x)}{x}-\left(-\frac{1}{2}x+1\right)=\frac{\ln(1+x)-\left(-\frac{1}{2}x^2+x\right)}{x}$$

Or nous avons démontré au point 1.(a) que $-\dfrac{1}{2}x^2+x\leq\ln(1+x)$

Donc pour $x>0$, $d(C,T)>0$ et la courbe C est donc située au-dessus de T.

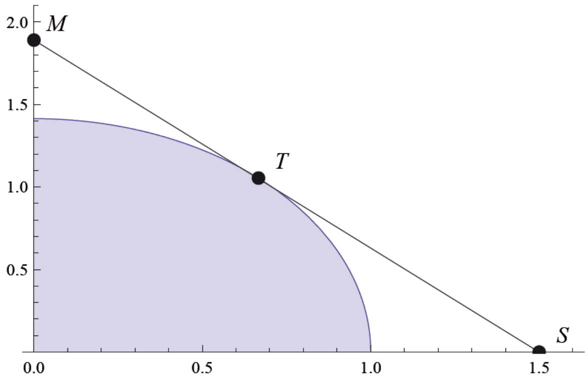


Le 20 septembre 2010

EXANA282 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2010, 2ème série.

Sur la figure ci-dessous, la zone grisée représente un bâtiment en forme de demi-dôme, et correspond à la surface comprise entre l′axe Ox, l′axe Oy et le graphe de la fonction

$$f(x) = \sqrt{2 - 2x^2}$$



Le segment MS représente une échelle, qui doit nécessairement

1. prendre appui sur le sol (l'axe Ox) au point S,
2. prendre appui sur le mur vertical (l'axe Oy) au point M,
3. être tangente au bâtiment en un point T.

Quelle est la plus petite longueur possible pour une échelle remplissant les trois conditions ci-dessus ?

1. Soit a l′abscisse inconnue du point de tangence T. Calculer l′ordonnnée de T puis donner, en fonction de a, l′équation de la tangente au demi-dôme
2. En déduire les coordonnées des points M et S puis calculer, en fonction de a, le *carré* de la longueur de l'echelle MS.
3. Calculer le minimum du carré de la longueur de l'échelle et en déduire la longueur minimale possible pour l'échelle.

Les coordonnées de T sont $\left(a, \sqrt{2-2a^2}\right)$

Le coefficient angulaire est donnée par : $y' = \frac{-4x}{2\sqrt{2-2x^2}} \to m = \frac{-2a}{\sqrt{2-2a^2}}$

L'équation de la tangente est : $t \equiv y - y_a = m\left(x - x_a\right)$

$$\Rightarrow t \equiv y = \frac{-2a}{\sqrt{2-2a^2}}\left(x-a\right) + \sqrt{2-2a^2} \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{2-2a^2}}\left(-ax+1\right)$$

On obtient alors facilement les coordonnées de M et de S.

$$y = 0 \to x = \frac{1}{a} \qquad \to M\left(\frac{1}{a}, 0\right)$$

$$x = 0 \to y = \frac{2}{\sqrt{2-2a^2}} \to S\left(0, \frac{2}{\sqrt{2-2a^2}}\right)$$

Et donc : $\quad | MS |^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{2-2a^2} = \frac{1-a^2+2a^2}{a^2\left(1-a^2\right)} = \frac{1+a^2}{a^2\left(1-a^2\right)}$

Pour minimiser cette longueur, il suffit d'annuler sa dérivée :

$$\frac{d}{da}| MS |^2 = \frac{2a^3\left(1-a^2\right)-\left(1+a^2\right)\left(2a-4a^3\right)}{a^4\left(1-a^2\right)^2} = \frac{\cancel{2a^2} - 2a^4 - 2 - \cancel{2a^2} + 4a^2 + 4a^4}{a^3\left(1-a^2\right)^2}$$

$$= \frac{2a^4 + 4a^2 - 2}{a^3\left(1-a^2\right)^2}$$

La dérivée est nulle si : $a^4 + 2a^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = -1-\sqrt{2} & \text{A rejeter} \\ a^2 = -1+\sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{\sqrt{2}-1} \end{cases}$

Il reste à calculer la longueur de l'échelle :

$$| MS |^2 = \frac{1+a^2}{a^2\left(1-a^2\right)} = \frac{1-1+\sqrt{2}}{\left(-1+\sqrt{2}\right)\left(1+1-\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2\sqrt{2}+2+2+\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(3\sqrt{2}+4\right) = \frac{6}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$$

Finalement : $\boxed{| MS | = \sqrt{3+2\sqrt{2}}}$

EXANA283 – Polytech, Umons, Mons, juillet 2010, groupe C.

1. Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$$

2. En déduire que l'équation $x^3 - 9x - m(x^2 - 1) = 0$ où m est un paramètre réel, a 3 solutions réelles quel que soit m.

Solution proposée par Fabienne Zoetard

1. Etude de la fonction

Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ de plus la fonction est impaire.

Zéros : $x^3 - 9x = 0 \to x(x^2 - 9) = 0 \to (x = 0 \cup x = -1 \cup x = 1)$

$$\text{AV :} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^3 + 9x}{x^2 - 1} = \dfrac{-8}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^3 + 9x}{x^2 - 1} = \dfrac{-8}{0^-} = +\infty \end{array}\right\} \to AV_2 \equiv x = 1 \text{ et par symétrie } S_0,\ AV_1 \equiv x = -1$$

AH : Pas de AH car le degré du numérateur est plus grand que celui de dénominateur.

$$\to \lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$$

AO : Par division euclidienne : $f(x) = x - \dfrac{8x}{x^2 - 1}$ (1)

Donc $f(x)$ se comporte comme x en l'infini car $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8x}{x^2 - 1} = 0 \to AO \equiv y = x$

Ou bien comme : $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + 9x}{x^3 - x} = 1$ et comme la fonction admet 0 comme centre de symétrie: $AO \equiv y = x$

Dérivée première :

A partir de (1): $f'(x) = 1 - \dfrac{8(x^2 - 1) - 8x.2x}{(x^2 - 1)^2} = 1 + \dfrac{8(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} \geq 0$

La dérivée première étant toujours positive la fonction est toujours croissante sur son domaine.

Dérivée seconde :

$$f''(x)=8\frac{2x\left(x^2-1\right)^2-\left(x^2+1\right)2\left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^2}=8.2x.\left(x^2-1\right)\frac{x^2-1-2x^2-2}{\left(x^2-1\right)^4}$$

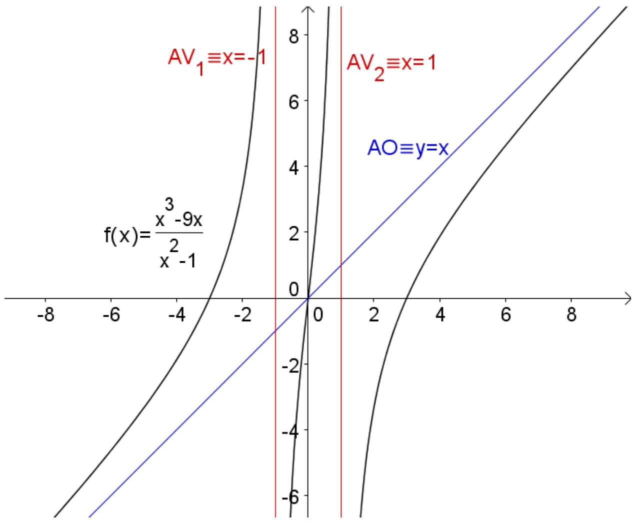
$$=-16x\frac{x^2+3}{\left(x^2-1\right)^3}$$

TS

x		-1		0		1	
$-16x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x^2+3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\left(x^2-1\right)^3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	/	$-$	0	$+$	/	$-$

<u>Conclusion</u> :

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	/	$+$	$+$	$+$	/	$+$
$f''(x)$	$+$	/	$-$	0	$+$	/	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	/	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	/	$\nearrow$
	$\cup$	AV	$\cap$	I	$\cup$	AV	$\cap$



2. Est-ce que $x^3-9x-m\left(x^2-1\right)=0 \quad (2)$ a toujours 3 solutions?

Remarquons que ni $+1$ ni -1 ne sont solutions de cette équation donc, on peut écrire :

$$\frac{x^3-9x}{x^2-1}-m=0\rightarrow f(x)-m=0\rightarrow f(x)=m$$

Or la droite $y=m$ coupera le graphe de $f(x)$ quelque soit la valeur de m

EXANA284 – EPL, UCL, Louvain, Septembre 2010.

1) Calculer la dérivée de l'expression suivante par rapport à la variable y, x étant une constante :

$$\sqrt{y\cos 3x}\ + x\tan\left(y^2\right)$$

2) Calculer la limite

$$\lim_{t\to 0}\frac{3\sin t-\sin 3t}{t-\sin t}$$

3) Calculer la valeur de l'intégrale définie

$$\int_{-2}^{\frac{5}{2}}\frac{1}{\sqrt{9-(x-1)^2}}\,dx$$

4) Le théorème des accroissements finis s'énonce comme suit :

Si f est une fonction continue sur $[\ a,b\ ]$ et dérivable sur $]\ a,b\ [$, alors il existe $c\in\ ]\ a,b\ [$ tel que

$$f\,'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Utiliser ce résultat pour démontrer que

$$|\sin x-\sin y|\leq|x-y| \text{ pour tout } x \text{ et } y\in\mathbb{R}$$

Solution proposée par Nicole BERCKMANS

1) $\frac{d}{dy}\left(\sqrt{y\cos 3x}+x\tan\left(y^2\right)\right)=\frac{1}{2\sqrt{y\cos 3x}}.\cos 3x+\frac{2xy}{\cos^2\left(y^2\right)}$

2) $\lim_{t\to 0}\frac{3\sin t-\sin 3t}{t-\sin t}=\begin{bmatrix}\frac{0}{0}\end{bmatrix}\xrightarrow{Hospital}\lim_{t\to 0}\frac{3\cos t-3\cos 3t}{1-\cos t}$

$$\xrightarrow{Hospital}\lim_{t\to 0}\frac{-3\sin t+9\sin 3t}{\sin t}\xrightarrow{Hospital}\lim_{t\to 0}\frac{-3\cos t+27\cos t}{\cos t}=24$$

3) $I=\int_{-2}^{\frac{5}{2}}\frac{1}{\sqrt{9-(x-1)^2}}\,dx$ On pose $x-1=3\sin t$, d'où $\begin{cases} dx=3\cos t\,dt \\ x=-2 \text{ donc } t=-\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{5}{2} \quad \text{donc } t=\frac{\pi}{6}\end{cases}$

Ce qui donne $I=\int_{-\pi/2}^{\pi/6}\frac{3\cos t\,dt}{3\cos t}=\left[\ t\ \right]_{-\pi/2}^{\pi/6}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3}$

4) Il suffit de considérer que la fonction est $f(z)=\sin z$

On a alors : $\sin x-\sin y=(x-y)\cos c$ or $|\cos c|\leq 1$ et donc $|\sin x-\sin y|\leq|x-y|$

EXANA285 – EPL, UCL, Louvain, Septembre 2010.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=e^x+|x|-2x-3$$

1) a) La fonction f est-elle continue en tout point de son domaine.

   Est-elle dérivable en tout point de son domaine? Justifier vos réponses.

   b) Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f.

   Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote D, dont on précisera l'équation.

   c) Etudier les variations de la fonction f.

   d) Préciser la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à D, et construire la courbe $(\mathcal{C})$.

2) Soit $\alpha<0$ un paramètre réel négatif.

   a) Déterminer l'aire $A(\alpha)$ du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite D et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=0$, puis calculer la limite de $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} A(\alpha)$.

3) Soit f_1 la restriction de f à l'intervalle $I=[\,0,+\infty\,[$.

   a) Démontrer que f_1 est une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle J, que l'on précisera.

   b) On considère la fonction réciproque f_1^{-1}, définie sur le domaine J.

   Construire sa courbe représentative $(\mathcal{C}_1)$.

   c) La fonction f_1^{-1} est-elle continue en tout point de son domaine J ?

   Est-elle dérivable en tout point de son domaine J.

   d) Démontrer que l'équation $f_1(x)=0$ admet une solution unique, que l'on encadrera par deux entiers consécutifs.

Solution proposée par Nicole BERCKMANS

1) a) La fonction f peut se mettre sous la forme : $\begin{cases} f(x) = e^x - x - 3 \text{ si } 0 \le x \\ f(x) = e^x - 3x - 3 \text{ si } x \le 0 \end{cases}$

La fonction f est continue sur tout son domaine. $(dom\ f = \mathbb{R})$

Elle n'est pas dérivable en $x = 0$ car $\begin{cases} f_D'(0) = 0 \\ f_G'(0) = -2 \end{cases}$

b) La fonction f admet un AO à gauche: $AO \equiv y = -3x - 3$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (-3x - 3) = 0$

Il n'y a pas d'asymptote en $+\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

c) Si $x < 0$: $f'(x) = e^x - 3 < 0$ et $f''(x) = e^x > 0$

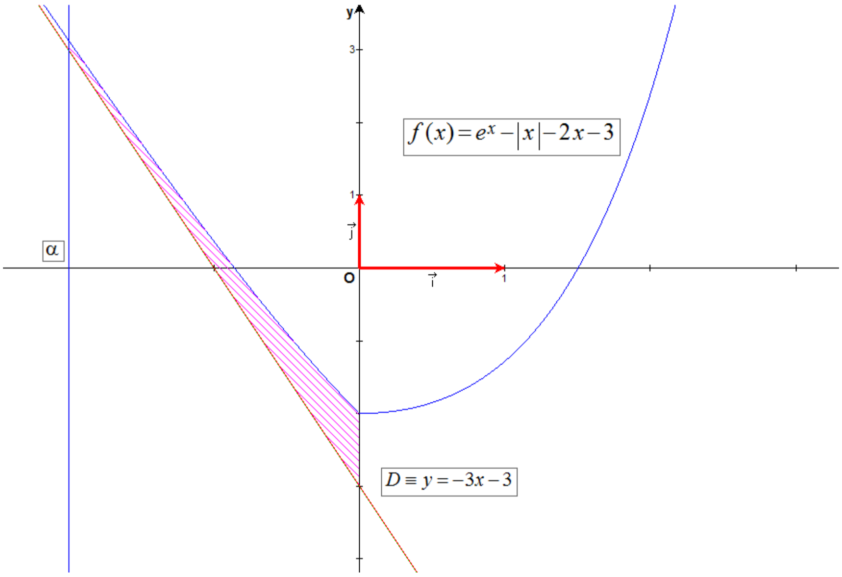
Si $x > 0$: $f'(x) = e^x - 1 > 0$ et $f''(x) = e^x > 0$

Tableau des variations:

		0	
f'	$-$	$-2/0$	$+$
f''	$+$	$+$	$+$
f	$\searrow$ $\cup$	Point anguleux $(0,-2)$	$\nearrow$ $\cup$

d) Pour $x \le 0$: $f(x) - (-3x - 3) = e^x > 0$

D'où la courbe $(\mathcal{C})$ est située au-dessus de l'asymptote $D \equiv y = -3x - 3$



2) $a)$ $A(\alpha)=\int_{\alpha}^{0}\left(e^{x}-3x-3\right)-(-3x-3)\,dx=\left[\,e^{x}\,\right]_{\alpha}^{0}=1-e^{\alpha}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-e^{\alpha}\right)=1$

3) $a)$ $f_1 : I=[\,0,\to[$ vers l'intervalle $J=[\,-2,\to[$

f_1 est injectif car $f_1^{'}(x)=e^{x}-1\geq 0$ (donc f_1 est strictement croissante).

$b)$ Voir graphe ci-dessous

$c)$ $f_1^{-1} : J\to I$ est continue mais non dérivable en -2 car $\left(f_1^{-1}\right)'(-2)=\left[\dfrac{1}{f_1^{'}(0)}\right]=\left[\dfrac{1}{0^{+}}\right]=+\infty$

f_1^{-1} est dérivable sur $]-2,\to[$

$d)$ $f_1(x)=0$ admet une solution en vertu du théorème des valeurs intermédiaires car

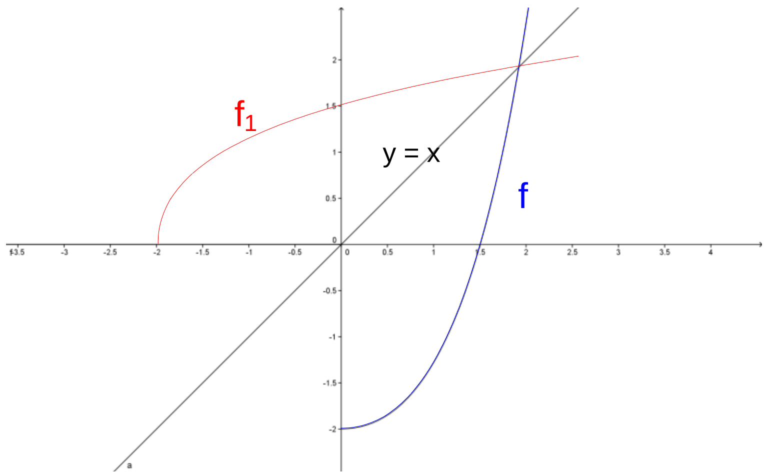
$f_1(0)=-2<0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=+\infty$

Encadrons la racine :

$f_1(0)=-2<f_1(1)=e-4<0<f_1(2)=e^{2}-5.$

En effet : $e^{2}-5>2.7^{2}-5=7.29-5>0$

La racine est donc située entre 1 et 2 : $1<x<2$



8 septembre 2010

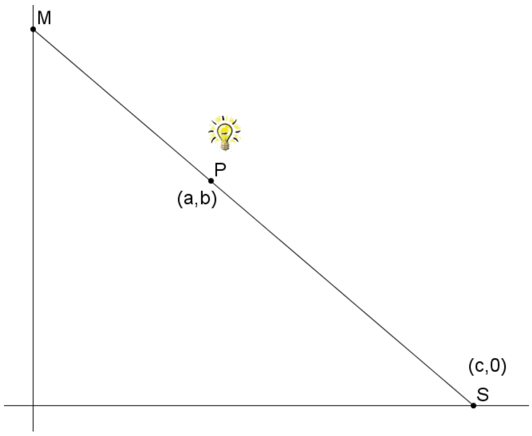
EXANA286 – EPL, UCL, Louvain, Septembre 2010.

Sur la figure ci-dessous, le point P, situé un peu sous l'ampoule, a pour coordonnées (a,b), où a et b sont deux paramètres. On souhaite changer l'ampoule et, pour cela, il est nécessaire d'installer une échelle.

a) s'appuyant sur le sol (représenté par l'axe Ox) au point S,

b) s'appuyant contre le mur verticale (l'axe Oy) au point M,

c) passant exactement par le point P.



Quelle est, en fonction des paramètres a et b, la longueur de la plus petite échelle possible remplissant les trois conditions ci-dessus?

1) Soit c l'abscisse inconnue du point de contact S avec le sol. Calculer en fonction de a, b et c l'ordonnée du point de contact M avec le mur, puis le *carré* de la longueur de l'échelle MS.

2) Calculer en fonction de a et b le minium du carré de la longueur de l'échelle en déduire la longueur de la plus petite échelle.

Solution proposée par Nicole BERCKMANS

1) $M\left(0,\dfrac{cb}{c-a}\right)$ et donc $MS^2=c^2+\dfrac{c^2b^2}{(c-a)^2}$

2) $\dfrac{d}{dc}\left(MS^2\right)=2c+\dfrac{2cb^2(c-a)^2-2(c-a)c^2b^2}{(c-a)^4}=2c\left(1+\dfrac{b^2c-b^2a-cb^2}{(c-a)^3}\right)=2c\dfrac{(c-a)^3-ab^2}{(c-a)^3}$

Cette dérivée s'annule en $c=0$ (à exclure) et pour $c_0=a+\sqrt[3]{ab^2}$

On note que le numérateur est négatif pour $c=a$ et positif pour $c\to+\infty$

Tableau des variations :

	a		c_0	
$\dfrac{d}{dc}\left(MS^2\right)$	/	$-$	0	$+$
MS^2		$\searrow$	min	$\nearrow$

On a donc bien un minimum pour $c=c_0$ et alors

$$MS^2=\left(a+\sqrt[3]{ab^2}\right)^2\left(1+\frac{b^2}{\left(ab^2\right)^{2/3}}\right)=\sqrt[3]{a^2}\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)^2.\frac{\sqrt[3]{a^2b}+b}{\sqrt[3]{a^2b}}$$

$$=\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)^2.\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right).\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}}$$

Finalement : $\boxed{MS=\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)^{3/2}}$

8 septembre 2010

EXANA287 – Polytech, Umons, Mons, Juillet 2010 Groupe D.

Déterminez et représentez graphiquement l'ensemble des points (x, y) du plan, avec $y<0$, qui satisfont l'inéquation :

$$\frac{x(y-1)}{y-2}>1$$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

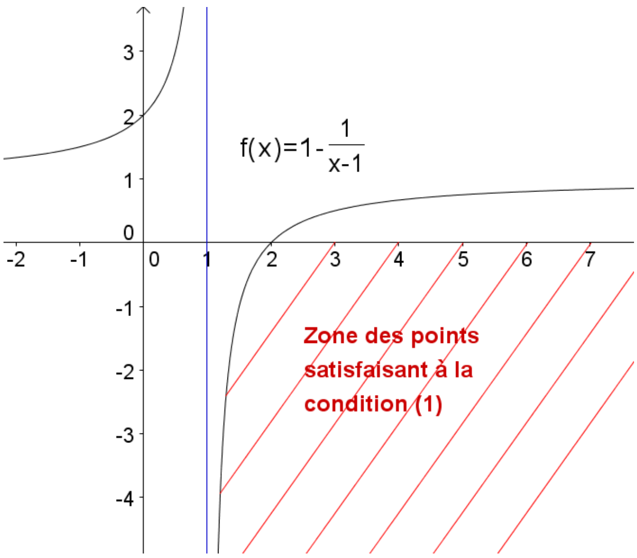
$y-2$ est toujours négatif, donc $\frac{x(y-1)}{y-2}>1 \Rightarrow x(y-1)<y-2 \Rightarrow y(x-1)<x-2$

si	$x=1$	$y.0<-1$	impossible
si	$x>1$	$y<\frac{x-2}{x-1}$	condition (1)
si	$x>1$	$y>\frac{x-2}{x-1}$	condition (2)

Regardons le graphe de : $y=\frac{x-2}{x-1}$.

La zone qui satisfait à la condition (1) est indiquée.

Il n'y a pas de zone qui satisfait à la condition (2).



---

6 octobre 2010

EXANA288 – Polytech, Umons, Mons, Juillet 2010 Groupe D.

On désire dessiner un sentier dans un parc dont le plan est représenté sur la figure ci-dessous.

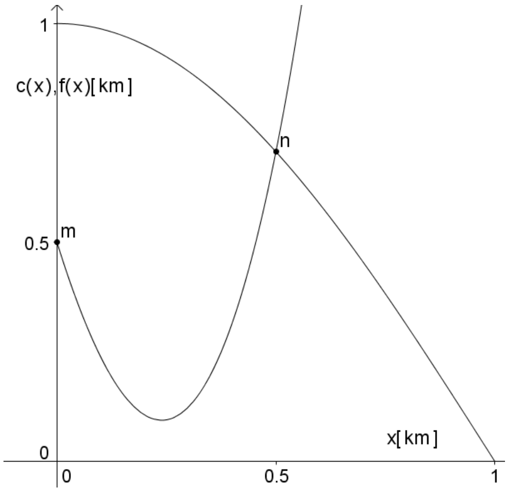
La surface du parc est délimitée par le trait gras. La courbe $c(x)$ est donnée par $\cos\frac{\pi}{2}$.

Souhaitant notamment que le sentier passe par les entrées représentées par les points m et n et qu'il divise la surface du parc en deux parties égales, le jardinier a opté pour la courbe $f(x)$ également dessinée sur la figure.

Sachant que :

$$f(x) = axe^{x} + bx + c$$

déterminez a, b et c



Solution proposée par Fabienne Zoetard

Soient donc $\begin{cases} y = axe^x + bx + c & (1) \\ y = \cos\dfrac{\pi x}{2} & (2) \end{cases}$

$m \in$ courbe 1 $\quad\Rightarrow\quad c = \dfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad (1)$ s'écrit $y = axe^x + bx + \dfrac{1}{2}$

$n \in$ courbe 2 $\quad\Rightarrow\quad$ ordonnée de n : $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Or $n \in$ aussi à la courbe 1, donc : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = a\dfrac{1}{2}\sqrt{e} + b\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad a\sqrt{e} + b = \sqrt{2} - 1 \quad (3)$

Exprimons l'égalité demandée entre les aires :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\pi x}{2}\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \left(axe^x + bx + \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(axe^x + bx + \frac{1}{2}\right)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \cos\frac{\pi x}{2}\,dx$$

$$\frac{\cancel{2}}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \cancel{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(axe^x + bx + \frac{1}{2}\right)dx + \frac{\cancel{2}}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

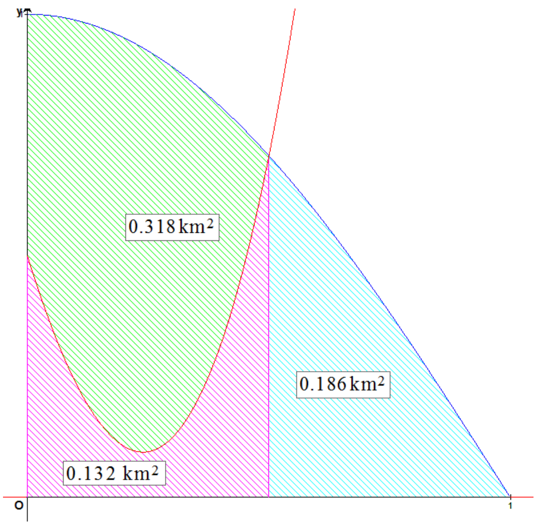
$$\frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{4} - 0\right) - \frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\right) = a\left[xe^x - e^x\right]_0^{\frac{1}{2}} + b\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left[x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a\left(\frac{1}{2}\sqrt{e} - \sqrt{e} - 0 + 1\right) + b\frac{1}{8} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\sqrt{2} - 1\right) = a\left(1 - \frac{\sqrt{e}}{2}\right) + \frac{b}{8} + \frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad a\left(1 - \frac{\sqrt{e}}{2}\right) + \frac{b}{8} = \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{2} - 1\right) - \frac{1}{4} \qquad (4)$$

Faisons $(3) - 8(4)$: $\quad a\left(-8 + 4\sqrt{e}\right) = \sqrt{2} - 1 - \dfrac{8}{\pi}\left(\sqrt{2} - 1\right) + 2 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = 5.58042664 \\ b = -8.7863545 \end{array}}$

Donc la courbe 1 est : $\boxed{f(x) = 5.580.xe^x - 8,786x + \dfrac{1}{2}}$



6 octobre 2010

EXANA289 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2010.

Soit f la fonction réelle définie par :

$$f(x) = (1 - e^{-x})(7 - e^{-x}) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer les zéros de f

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ en détaillant les calculs.

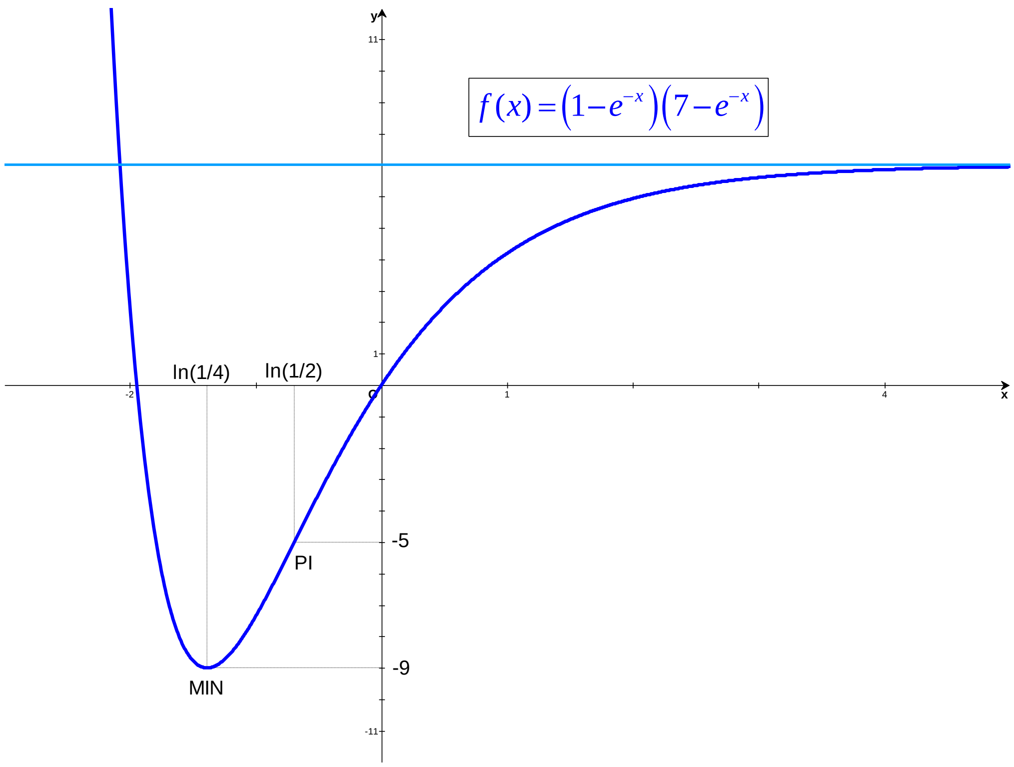
c) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$

d) Trouver les éventuels extrema de f. Pour chacun d'eux, préciser sa nature et justifier.

e) Trouver les éventuels points d'inflexion de la courbe $y = f(x)$ (justifier).

f) En utilisant les approximations $\ln 2 \approx 0.7$ et $\ln 7 \approx 1.9$, tracer le graphe de f dans un repère orthogonal en indiquant les unités sur les axes, les coordonnées exactes des points remarquables apparaissant dans les réponses a) à c) et les asymptotes éventuelles.

Solution proposée par Steve Tumson



$f(x)=\left(1-e^{-x}\right)\left(7-e^{-x}\right) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

$a)$ Racines : $\quad \bullet\ e^{-x}=1 \Leftrightarrow \boxed{x=0} \qquad \bullet\ e^{-x}=7 \Leftrightarrow \boxed{x=-\ln 7}$

$b)$ Limites infinies :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\left(\lim_{x\to+\infty}1-\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\right)\left(\lim_{x\to+\infty}7-\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\right)=(1-0)(7-0)=7 \rightarrow \text{Asymptote horizontale}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\left(\lim_{x\to-\infty}1-\lim_{x\to-\infty}e^{-x}\right)\left(\lim_{x\to-\infty}7-\lim_{x\to-\infty}e^{-x}\right)=(1-\infty)(7-\infty)=\infty$$

$c)$ Calculs des dérivées :

NB : Puisqu'il est plus facile de dériver une somme qu'un produit, distribuons $f(x)$

$$f(x)=\left(1-e^{-x}\right)\left(7-e^{-x}\right)=e^{-2x}-8e^{-x}+7$$

$$\rightarrow \frac{df}{dx}=-2e^{-2x}+8e^{-x}=2e^{-x}\left(4-e^{-x}\right) \qquad \rightarrow \frac{d^2f}{dx^2}=4e^{-2x}-8e^{-x}=4e^{-x}\left(e^{-x}-2\right)$$

$d)$ Extrema :

$$\frac{df}{dx}=0 \Leftrightarrow e^{-x}=4 \Leftrightarrow x=-\ln 4 \Leftrightarrow \boxed{x=-2\ln 2}$$

On étudie la variation de f : $\dfrac{df}{dx}=\underbrace{2e^{-x}\left(4-e^{-x}\right)}_{>0} \Rightarrow$

		$-2\ln 2$	
$f\,'$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

$e)$ Inflexion :

$$\frac{d^2f}{dx^2}=0 \Leftrightarrow e^{-x}=2 \Leftrightarrow \boxed{x=-\ln 2}$$

Le tableau de variation final indique la présence d'un point d'inflexion :

		$-2\ln 2$		$-\ln 2$	
$f\,'$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f\,''$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
	$\cup$	$\cup$	$\cup$	PI	$\cap$

$d)$ Courbe :