Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 29

EXANA290 – EXANA299

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Décembre 2010

EXANA290 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2010.

Calculer en détaillant les calculs :

a) $\int_1^e x^2 \ln x \, dx$

b) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(x^2 + \sin^9 x\right) dx$

Solution proposée par Steve Tumson

$$a)\ F = \int x^2 \ln x \, dx \xrightarrow{PARTIE} \begin{cases} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx & v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases} \Rightarrow F = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

$$\to F(x) = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C \Rightarrow \int_1^e x^2 \ln x dx = F(e) - F(1) = \boxed{\frac{1}{9}\left(2e^3 + 1\right)}$$

$$b)\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(x^2 + \sin^9 x\right) dx = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^2 \, dx + \underbrace{\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin^9 x \, dx}_{0} = 2\int_0^{\pi/3} x^2 \, dx = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{3}\right)^3 = \boxed{\frac{2\pi^3}{81}}$$

En effet, l'intégration d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique centré en zéro donne un résultat nul (un petit dessin suffit à s'en convaincre intuitivement).

De même, pour une fonction paire, on peut doubler l'intégrale sur le demi-intervalle à partir de zéro.

Janvier 2011

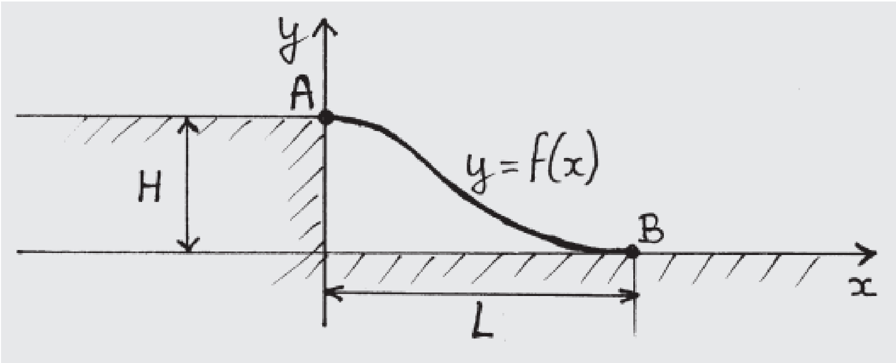
EXANA291 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2010.

On veut installer une rampe permettant à des chariots de franchir une marche de hauteur H $\left(\text{Voir figure ci-dessous}\right)$

Pour éviter les secousses, on demande que le profil $y = f\left(x\right)$ de cette rampe (qui s'étend de A à B) ait une tangente horizontale aux points A et B.

Existe-t-il une fonction de type $f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ satisfaisant à ces contraintes?

Si oui calculer les coefficients a, b, c et d en fonction de H et L.



Solution proposée par Steve Tumson

Il suffit de réunir les conditions suivantes pour $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$: $\begin{cases} f(L) = 0 \\ f(0) = H \\ f'(0) = 0 \\ f'(L) = 0 \end{cases}$

Nous avons donc 4 équations (conditions) et 4 inconnues (a, b, c, d), si le système est soluble, il existera bien une telle fonction f répondant aux conditions.

$$\begin{cases} f(L) = aL^3 + bL^2 + cL + d = 0 \\ f(0) = d = H \\ f'(0) = c = 0 \\ f'(L) = 3aL^2 + 2bL + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aL^3 + bL^2 + H = 0 \\ 3aL^2 + 2bL = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2H}{L^3} \\ b = -\dfrac{3H}{L^2} \end{cases}$$

La fonction répondant aux critères est donc :

$$\boxed{f(x) = \frac{2H}{L^3}x^3 - \frac{3H}{L^2}x^2 + H}$$

Janvier 2011

EXANA292 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2010.

Soit f la fonction réelle définie par

$$f\left(x\right)=e^{-2x}-e^{-4x} \qquad \forall \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$ en détaillant les calculs.

b) Déterminer les asymptotes éventuelles de f. (justifier)

c) Déterminer les zéros éventuels de f.

d) Calculer $f'\left(x\right)$ et $f''\left(x\right)$

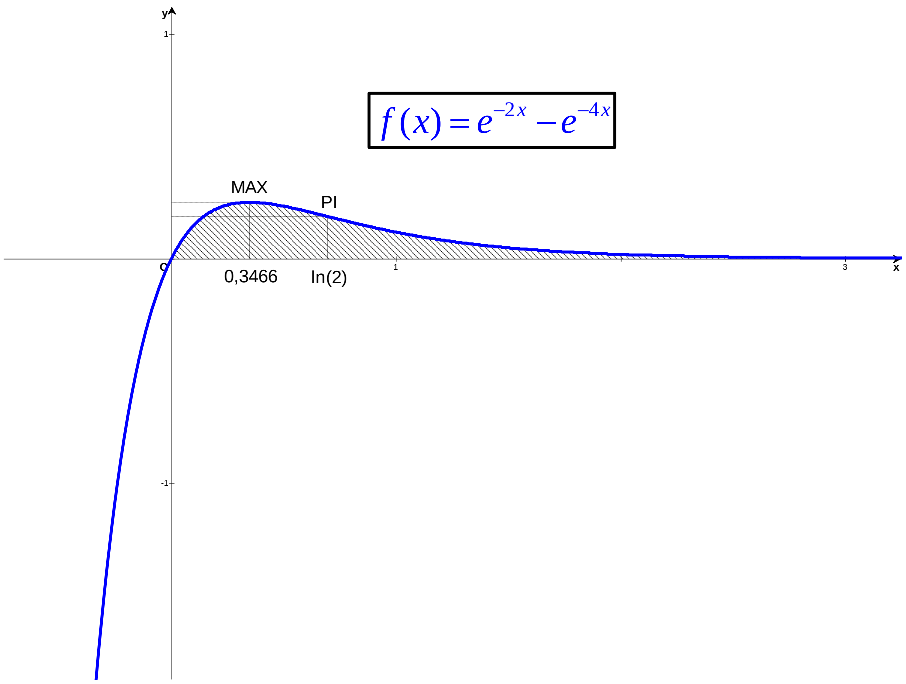
e) Déterminer les éventuels extrema de f. pour chacun d'eux, préciser sa nature et justifier.

f) Déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe $y=f\left(x\right)$

g) En utulisant l'approximation $\ln 2\approx 0.69$, tracer le graphe de f dans un repère orthonormé, en indiquant les coordonnées exactes des points remarquables rencontrés de b) à f) et les asymptotes éventuelles.

h) En prenant comme unité d'aire l'aire du rectangle défini par $0\le x\le 1$ et $0\le y\le 1$, calculer l'aire $A\left(k\right)$ de la région comprise entre le graphe de f et l'axe Ox pour x et entre 0 et k, puis calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} A\left(k\right)$

Solution proposée par Steve Tumson



$a)$ Limites infinies :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-2x}\left(\lim_{x\to+\infty} 1 - \lim_{x\to+\infty} e^{-2x}\right) = 0(1-0) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-2x}\left(\lim_{x\to-\infty} 1 - \lim_{x\to-\infty} e^{-2x}\right) = -\infty$$

$b)$ Asymptotes :

Le domaine de fonction suggère l'absence d'asymptote verticale.

Les calculs précédents indiquent une asymptote horizontale $\equiv y = 0$.

$c)$ Zéro : $\bullet\ e^{-2x} = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$

$d)$ Calculs des dérivées :

$$\to \frac{df}{dx} = -2e^{-2x} + 4e^{-4x} = 2e^{-2x}\left(2e^{-2x} - 1\right) \qquad \to \frac{d^2 f}{dx^2} = 4e^{-2x} - 16e^{-4x} = 4e^{-2x}\left(1 - 4e^{-2x}\right)$$

$e)$ Extrema :

$$\frac{df}{dx} = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\ln 2}{2}}$$

On étudie la variation de f : $\frac{df}{dx} = \underbrace{2e^{-2x}}_{>0}\left(2e^{-2x} - 1\right) \Rightarrow$

		$\frac{\ln 2}{2}$	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

$f)$ Inflexion :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{x = \ln 2}$$

Le tableau de variation final indique la présence d'un point d'inflexion :

		$\frac{\ln 2}{2}$		$\ln 2$	
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
	$\cup$	$\cap$	$\cap$	PI	$\cup$

$$h)\ F(x) = \int f(x)\,dx = \frac{1}{4}e^{-4x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C \Rightarrow A(k) = \int_0^k f(x)\,dx = F(k) - F(0) = \frac{1}{4}e^{-4k} - \frac{1}{2}e^{-2k} + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} A(k) = \frac{1}{4}\underbrace{\lim_{k\to\infty} e^{-4k}}_{0} - \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{k\to\infty} e^{-2k}}_{0} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4} \text{ d'unité d'aire}}$$

$g)$ Courbe :

EXANA293 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2010.

Calculer en détaillant les calculs :

a) $\int_0^{\sqrt{2\pi}} x.\sin\left(x^2\right) dx$

b) $\int_{-1}^{1} x^4.\left| x^5 \right| dx$

$$a)\ F(x) = \int x\sin\left(x^2\right)dx = \frac{1}{2}\int \sin\left(x^2\right)d\left(x^2\right) = -\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right) + C$$

$$\rightarrow \int_0^{\sqrt{2\pi}} x\sin\left(x^2\right)dx = F\left(\sqrt{2\pi}\right) - F(0) = -\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\right) + \frac{1}{2}\cos\left(0\right) = \boxed{0}$$

$$b) I = \int_{-1}^{1} x^4\left|x^5\right|dx = 2\int_0^1 x^4\left|x^5\right|dx$$ Puisque l'expression $x^4\left|x^5\right|$ est paire

$$\rightarrow I = 2\int_0^1 x^4x^5\,dx$$ $\left|x^5\right| = x^5$ car nous intégrons maintenant sur $x \geq 0$

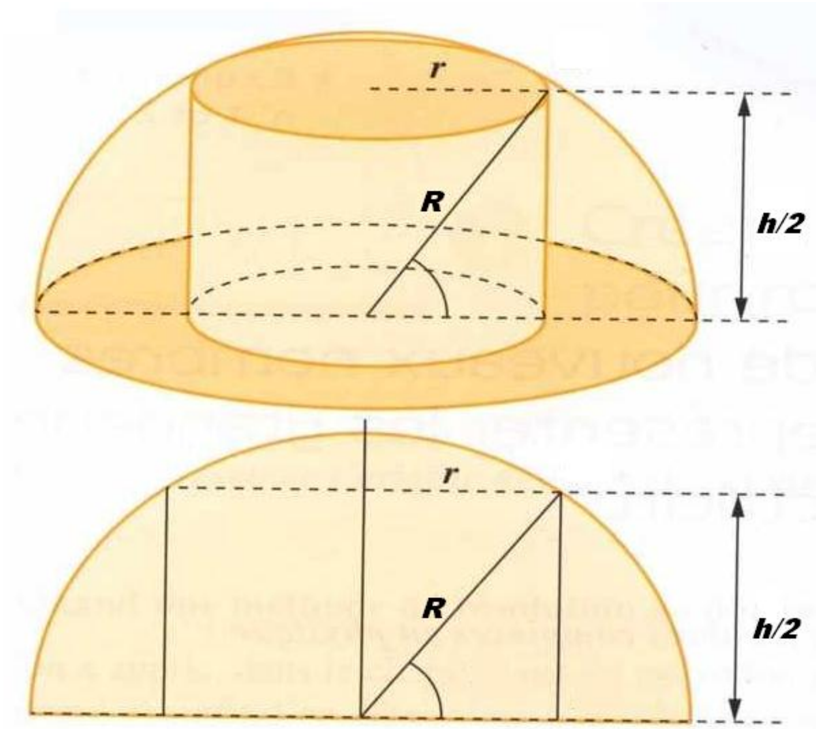
$$\rightarrow I = 2\int_0^1 x^9\,dx = 2\left[\frac{x^{10}}{10}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{5}}$$

Janvier 2011

EXANA294 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2010.

Quelle est la hauteur du cylindre de volume maximum inscrit dans une sphère de rayon R donné? Que vaut le rapport entre le volume de la sphère et celui de ce cylindre?

Solution proposée par Steve Tumson



Il suffit d'exprimer r en fonction de h :

$$V_{cyl} = \pi r^2 h = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h = \pi R^2 h - \frac{\pi}{4}h^3$$

$$V_{cyl}\max \Rightarrow \frac{dV_{cyl}}{dh}(h = h_{\max}) = 0 \Leftrightarrow \pi R^2 - \frac{3\pi}{4}h_{\max}^2 = 0 \Rightarrow \boxed{h_{\max} = \frac{2R}{\sqrt{3}}}$$

Est-ce bien un maximum ? Oui car $\frac{d^2V_{cyl}}{dh^2}(h = h_{\max}) = -\frac{3\pi}{2}h_{\max} < 0.$

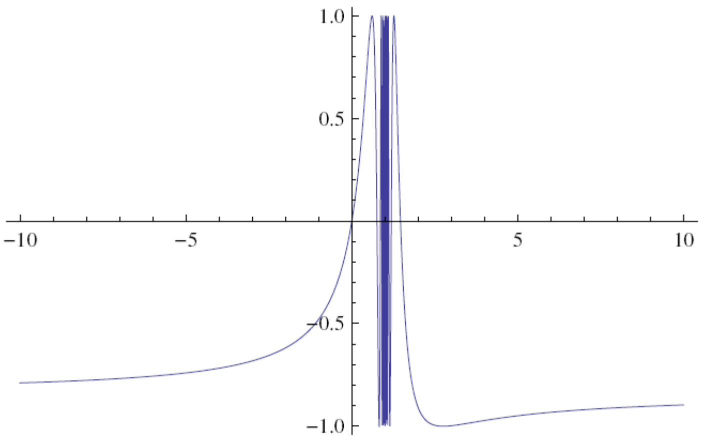
$$V_{cyl}\max = \frac{2\pi R^3}{\sqrt{3}} - \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}} = \frac{V_{sph}}{\sqrt{3}} \qquad \rightarrow V_{cyl} = \frac{V_{sph}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{V_{sph}}{V_{cyl}} = \sqrt{3}}$$

EXANA295 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2010.

On considère la fonction

$$f(x) = \sin \frac{x}{1-x}$$

En utilisant une calculatrice graphique, on obtient la représentation ci-contre



i Etudiez le graphe de la fonction $g(x) = \frac{x}{1-x}$

– déterminer le domaine de définition,

– déterminer les asymptotes éventuelles,

– étudiez la croissance/décroissance et déterminer les extrema éventuels,

– esquissez le graphique

ii Déterminez le domaine de définition de f. Justifier.

iii Déterminer l'ensemble des valeurs de f. Justifier.

iv Préciser le comportement de f au voisinage de $x = 1$. Que vaut $\lim_{x \to 1} f(x)$?

v Déterminer les asymptotes éventuelles du graphe de f.

vi Calculer $f'(x)$

vii Déterminer tous les extrema locaux en précisant la nature de ceux -ci ainsi que les abscisses et les ordonnées correspondantes.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ)

http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes i Etudions la fonction $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$

– La fonction est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

– D'une part, on a

$$\lim_{x\to 1^{\pm}}\frac{x}{1-x}=\mp\infty$$

Ce qui se traduit par l'existence de l'asymptote verticale $x=1$

D'autre part, on calcule également

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x}=-1$$

et la fonction possède donc l'asymptote horizontale $y=-1$ en $\pm\infty$. Puisque

$$\frac{x}{1-x}=-1+\frac{1}{1-x}$$

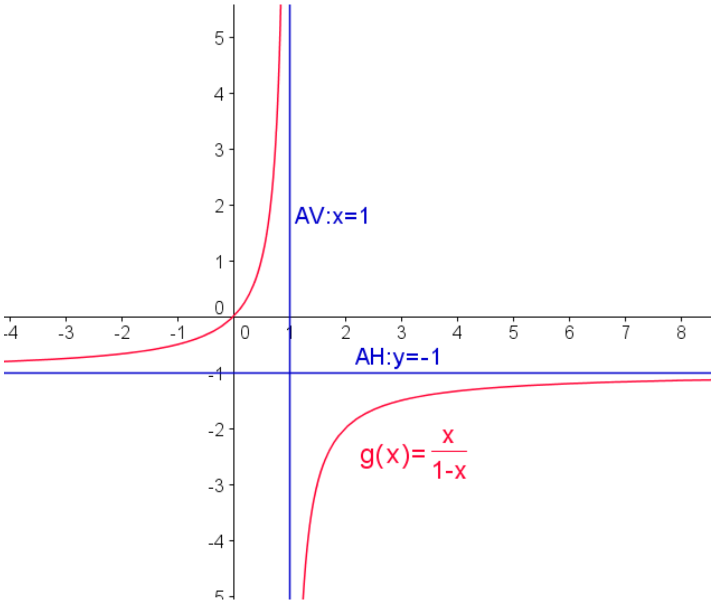
cette asymptote est approchée par valeurs supérieures au voisinage de $-\infty$ et par valeurs inférieures au voisinage de $+\infty$.

– Pour identifier d'éventuels extrema, on calcule

$$g'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}>0 \qquad \forall x\neq 1$$

La fonction est donc strictement croissante sur son domaine de définition et il n'existe pas d'extremum.

– En utilisant les informations précédentes, on peutr esquisser le graphique de la fonction g



ii La fonction $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$ étant définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et la fonction sinus étant définie sur $\mathbb{R}$, la fonction $f(x)=\sin\dfrac{x}{1-x}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

iii Comme le montre le graphique la fonction f prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1,1]$. C'est évidement une conséquence du fait que la fonction sinus prend ses valeurs dans cet intervalle. Cependant, pour que les valeurs de f couvrent tout l'intervalle $[-1,1]$, il faut aussi que $g(x)$, l'argument de la fonction sinus, varie "suffisamment". C'est le cas puisque, en observant le graphique de g, on constate que cette fonction prend toutes les valeurs réelles sauf en -1. En particulier, l'ensemble des valeurs de g inclut l'intervalle $[0,2\pi]$, soit une période complète de la fonction sinus.
L'ensemble des valeurs de la fonction f est donc l'intervalle $[-1,1]$.

iv Puisque $\lim\limits_{x\to1^{\pm}}\dfrac{x}{1-x}=\mp\infty$, on a $\lim\limits_{x\to1^{\pm}}\sin\dfrac{x}{1-x}=\lim\limits_{u\to\mp\infty}\sin u$
et cette dernière limite n'existe pas, vu la périodicité de la fonction sinus.
Au voisinage de 1, la fonction f oscille donc, comme la fonction sinus, entre les valeurs $+1$ et -1, ce qui correspond bien au comportement présenté sur le graphe de f.

v Il résulte de ce qui précède que la fonction f ne présente pas d'asymptote verticale en $x=1$. Au vu du domaine de f, seule la recherche d'asymptote(s) horizontale(s) ou oblique(s) au voisinage de l'infini s'impose encore.

On a $$\lim_{x\to\pm\infty}\sin\frac{x}{1-x}=\lim_{u\to-1}\sin u=\sin(-1)=-\sin 1$$
Dès lors, le graphe de f possède une asymptote horizontale d'équation $y=-\sin 1$ en $+\infty$ et $-\infty$. Puisque $\dfrac{x}{1-x}>-1$ au voisinage de $-\infty$ et que la fonction sinus est croissante voisinage de -1, on a aussi $f(x)>-1$ et l'asymptote horizontale est approchée par valeurs supérieures au voisinage de $-\infty$. A l'inverse, le graphe de f est situé sous l'asymptote au voisinage de $+\infty$

vi Pour tout $x\neq1$, il vient
$$f'(x)=\left(\sin\frac{x}{1-x}\right)'=\cos\frac{x}{1-x}\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\cos\frac{x}{1-x}.\frac{1}{(1-x)^2}$$

vii Les zéros de $f\,'$ sont ceux de la fonction $\cos\frac{x}{1-x}$, soit les solutions x de l'équation

$$\frac{x}{1-x}=\frac{\pi}{2}+k\pi, \qquad k\in\mathbb{Z}$$

Cette équation possède uen infinité de solutions

$$x_k=\frac{(1+2k)\pi}{2+(1+2k)\pi}, \qquad k\in\mathbb{Z}$$

La fonction cosinus changeant de signe chaque fois qu'elle s'annule, ces solutions correspondent toutes à des extrema locaux de f, avec une alternance minimum/maximum, comme le confirme le calcul de f en ces points :

$$f(x_k)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\cos k\pi=(-1)^k$$

Plus précisément, la fonction f possède une infinité de maxima locaux aux abscisses x_k pour lesquelles k est pair, soit, en posant $k=2l$, en

$$x_{2l}=\frac{(1+4l)\pi}{2+(1+4l)\pi}, l\in\mathbb{Z} \qquad \text{où} \qquad f(x_{2l})=1$$

De même, la fonction f possède une infinité de minima locaux aux abscisses x_k pour lesquelles k est impair, soit, en posant $k=2l+1$, en

$$x_{2l}=\frac{(3+4l)\pi}{2+(3+4l)\pi}, l\in\mathbb{Z} \qquad \text{où} \qquad f(x_{2l+1})=-1$$

26 décembre 2010

EXANA296 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2010.

Soit

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\, dx \qquad \text{où} \qquad n \in \mathbb{N}$$

i Calculer I_0

ii Calculer I_1

iii Etablissez une relation de récurrence du type $I_n = nI_{n-1} - \alpha$ (valable pour tout n entier ≥ 1) où α désigne une contante à déterminer.

iv Sans calculer explicitement les intégrales, montrez, en effectuant un changement de variable, que l'intégrale

$$\int_1^\beta \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$$

est égale à I_n pour une valeur de β à déterminer.

v Montrer que $I_n \leq \dfrac{1}{1+n}$

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ)
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

i Pour $n = 0$, il vient : $\qquad I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \dfrac{1}{e}$

ii Pour $n = 1$, on a $\qquad I_1 = \int_0^1 xe^{-x} dx$

qui peut être évaluée en utilisant la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f(x)g'(x) = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

En posant

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = e^{-x} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

Il vient

$$I_1 = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + I_0 = -\frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{2}{e}$$

iii La relation de récurrence recherchée peut être obtenue en intégrant par partie l'expression

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

En posant

$$\begin{cases} f(x) = x^n \\ g'(x) = e^{-x} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} f'(x) = nx^{n-1} \\ g(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

il vient, pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 nx^{x-1} e^{-x} dx$$

$$= -e^{-1} + n\int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$$

qui est la forme annoncée avec $\alpha = \frac{1}{e}$

iv Dans l'expression $\int_1^\beta \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

Introduisons le changement de variable : $\ln x = t$ soit $x = e^t$

En tenant compte de $\frac{dx}{x} = t$ ou $dx = e^t dt$

on a $\int_1^\beta \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx = \int_0^{\ln\beta} \frac{t^n}{e^{2t}} e^t dt = \int_0^{\ln\beta} t^n e^{-t} dt$

Si $\beta = e,$ il vien donc, en remplaçant la variable d'intégration t par x

$$\int_1^\beta \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx = \int_0^1 x^n e^{-x} dx = I_n$$

26 décembre 2010

EXANA297 – ERM, 2005, série 1

Etudier la fonction (de la variable réelle x)

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{1+x}}$$

(Domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes représentation graphique.)

---

1) $Dom\ f=\leftarrow,-1[\,\cup\,[\,0,\rightarrow$

2) Zéro : $x=0$

3) $AV\equiv x=-1$

AO à droite $\equiv y=x$

AO à gauche $\equiv y=-x$

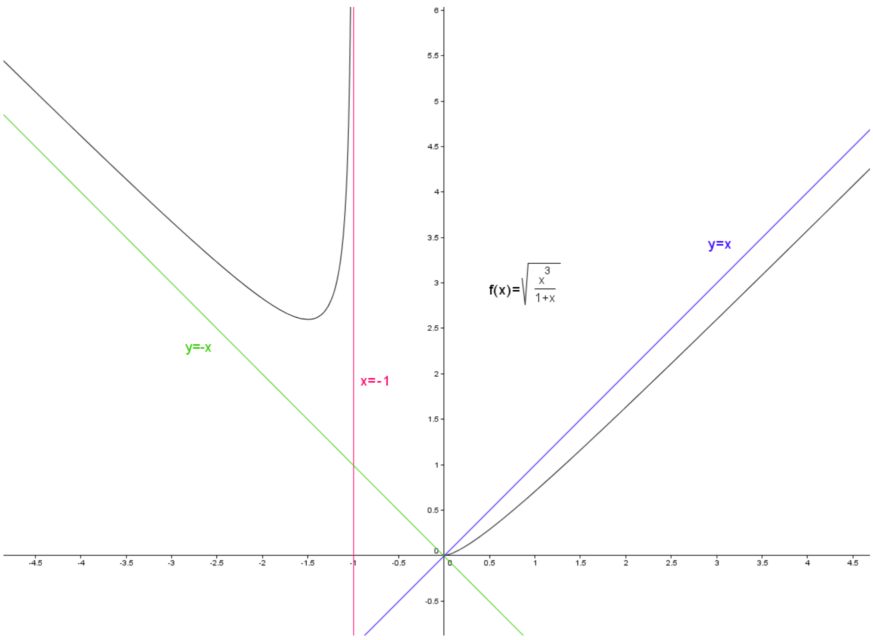
4) $f'(x)=\dfrac{x+\frac{3}{2}}{x(x+1)}\sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}$

TS :

	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$\sqrt{\frac{x^3}{1+x}}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\therefore$	$\therefore$	0	$+$	$+$
$x+\frac{3}{2}$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$\therefore$	$+$	$+$	$+$
$x(x+1)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$\therefore$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$\therefore$	$\therefore$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$Max:$ $\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{27}}{2}\right)$	$\nearrow$	$AV\equiv$ $x=-1$		$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

5) $f''(x)=\dfrac{3}{4x^2(x+1)^2}\sqrt{\dfrac{x^3}{1+x}}$

La dérivée seconde est toujours positive sur le domaine de f. Elle est donc de concavité positive. Il n'y a pas de point d'inflexion.



6 octobre 2010

EXANA298 – ERM, 2005, série 1.

Calculer :

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5\sin x + 4\cos x + 5}\,dx$$

$$\text{b) } L = \lim_{x \to 0} \frac{x\ln(1+x) - x^2}{e^x - e^{-x} - 2x}$$

Remarque : on admet que $\ln 3 = 1.1$ et que $\ln 5 = 1.6$

(a) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5\sin x + 4\cos x + 5}$

$$\text{On pose : } x = 2\arctan t \Rightarrow \begin{cases} t = \tan\dfrac{x}{2} \to \begin{cases} x = 0 \to t = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{2} \to t = 1 \end{cases} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{1}{5\dfrac{2t}{1+t^2} + 4\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 5} \frac{2}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{2dt}{t^2 + 10t + 9} = \int_0^1 \frac{dt}{(t+9)(t+1)}$$

On décompose en fractions rationnelles :

$$\frac{1}{(t+9)(t+1)} = \frac{A}{t+9} + \frac{B}{t+1} \Rightarrow 1 = A(t+1) + B(t+9) \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \to B = \dfrac{1}{4} \\ t = -9 \to A = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4}\left[-\int_0^1 \frac{1}{t+9} + \frac{1}{t+1}\,dx\right] = \frac{1}{4}\left[-\ln(t+9) + \ln(t+1)\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(-\ln 10 + \ln 9 + \ln 2\right) = \boxed{\frac{1}{4}\ln\frac{9}{5}}$$

$$\text{(b) } L = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x)-x^2}{e^x - e^{-x} - 2x} \xrightarrow{\textit{Hospital}} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}-2x}{e^x + e^{-x} - 2}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x}}_{=1} \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\ln(1+x)-x-2x^2}{e^x + e^{-x} - 2} \xrightarrow{\textit{Hospital}} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)+\dfrac{1+x}{1+x}-1-4x}{e^x - e^{-x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-4x}{e^x - e^{-x}} \xrightarrow{\textit{Hospital}} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1+x}-4}{e^x + e^x} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

22 avril 2011

EXANA299 – ERM, 2006, Série 3.

Etudier la fonction (de la variable réelle x)

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to f(x)=\frac{\ln x}{\ln(2x)}$$

(Domaine, zéros, croissance et décroissancen extremums, points d'inflexion, asymptotes, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x), \lim\limits_{x\to0^+} f'(x),$ représentation graphique). Remarque : $e\approx 2.7$.

---

1) $Dom\ f=\mathbb{R}^+\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$

2) Zéro : Pas de zéro

3) $AV\equiv x=\frac{1}{2}$

$AH\equiv y=1$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\ln 2x}\xrightarrow{Hospital}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{2x}.2}=1$$

4) $f'(x)=\frac{\ln 2}{x.\ln^2(2x)}$.

La dérivée première est toujours positive. Donc f est toujours croissante sur le domaine.

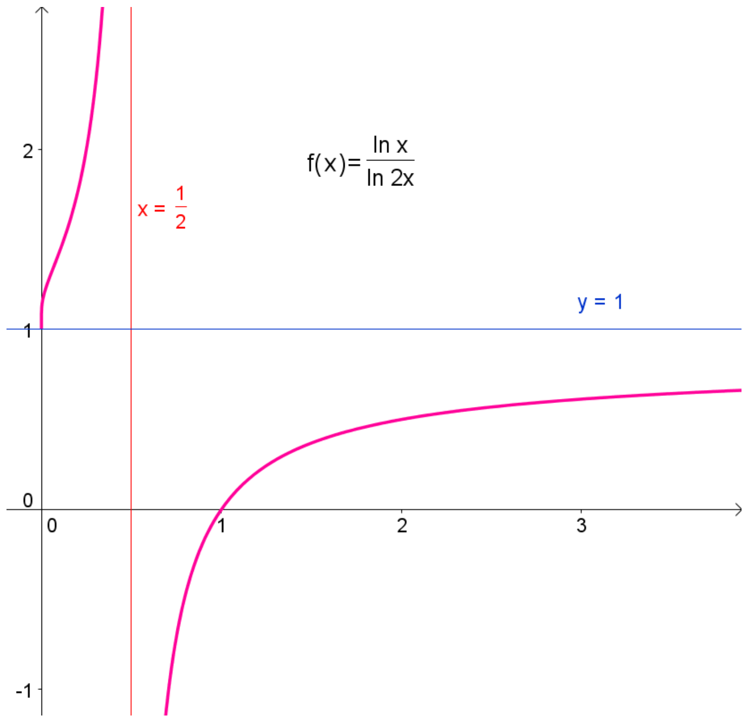
Et comme $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=+\infty,$ la tangente à f est verticale en $x=0$

5) $f''(x)=-\frac{\ln 2}{x^2}.\frac{\ln 2x+2}{\ln^3(2x)}$

TS :

	0		$1/2e^2$		$1/2$		$+\infty$
$-(\ln 2x+2)$	$\therefore$	$+$	0	$-$	-2	$-$	$-$
$\ln^2(2x)$	$\therefore$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$\therefore$	$-$	$-$
$f(x)$		$\cap$	I $\left(\frac{1}{2};\frac{2+\ln 2}{2}\right)$	$\cup$		$\cap$	$\cap$

Il a un point d'inflexion. $I:\left(\frac{1}{2};\frac{2+\ln 2}{2}\right)$



Aout 09