Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 3

EXANA030 – EXANA039

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

1 avril 03

EXANA030 – Compléments.

Démontrer par dérivée logarithmique que $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=e$$

EXANA031 – Exemple.

Calculer $\lim\limits_{t\to 0}(1-3t)^{-\frac{2}{t}}$

<u>Méthode 1</u> :

$$\lim_{t\to 0}(1-3t)^{-\frac{2}{t}} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\left(-\frac{2}{t}\right)\ln(1-3t)} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{-2\frac{1}{1-3t}(-3)}{1}}$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{6}{1-3t}} = \boxed{e^6}$$

<u>Méthode 2</u> :

Soit $-3t = \dfrac{1}{y}$ $\quad t\to 0 \Leftrightarrow y\to\infty$

$$\to \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{6y} = \boxed{e^6}$$

EXANA032 – Exemple.

Calculer $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-x+2}$

Méthode 1:

$$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{\mathrm{x}}\right)^{\text{-x+2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(-x+2)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x-2}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{(2-x)^2}(-1)}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2(2-x)^2}{x^2}} = \boxed{e^{-2}}$$

Méthode 2:

Soit $t=\frac{x}{2}$ $\quad x\to\infty \iff t\to\infty$

$$\Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^2 \lim\limits_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = \boxed{e^{-2}}$$

EXANA033 – Exemple.

Calculer $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$

Méthode 1:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = \boxed{e^{-1}}$$

Méthode 2:

Soit $t=-\frac{1}{x}$ $\qquad x\to\infty \iff t\to 0$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}} = \boxed{e^{-1}}$$

EXANA034 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2001.

Calculer $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a\sqrt{ax}-x^2}{a-\sqrt{ax}}$

Soit L la limite

$A)$ $\underline{a>0}$ Indétermination de type $\dfrac{0-0}{0-0}$

$$L=\lim_{x\to a}\frac{a\sqrt{ax}-x^2}{a-\sqrt{ax}}=\lim_{x\to a}\frac{\left(a\sqrt{ax}-x^2\right)\left(a+\sqrt{ax}\right)}{a^2-ax}=\lim_{x\to a}\frac{a^2\sqrt{ax}-ax^2+a^2x-x^2\sqrt{ax}}{a^2-ax}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{ax}\left(a^2-x^2\right)-ax\left(x-a\right)}{a\left(a-x\right)}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{ax}\left(a+x\right)+ax}{a}=\lim_{x\to a}\frac{a\left(2a\right)+a^2}{a}=3a$$

$B)$ $\underline{a<0}$ Pas d'indétermination

$$L=\lim_{x\to a}\frac{a\sqrt{ax}-x^2}{a-\sqrt{ax}}=\lim_{x\to a}\frac{-a^2-a^2}{a+a}=-a$$

Corrigé le 3 avril 2006 (Sabine Bouzette)

EXANA035 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2001.

Calculer $$f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$$

$$f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$$

On a : $\dfrac{x-1}{x+3}=1-\dfrac{4}{x+3}$

Soit $y=-\dfrac{4}{x+3} \quad\Rightarrow\quad x=-\dfrac{4}{y}-3$

$$x\to\infty \quad\Leftrightarrow\quad y\to 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x)=\lim_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{4}{y}-3+2}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-4}\lim_{y\to 0}(1+y)^{-1}$$

$$=\boxed{e^{-4}}$$

EXANA036 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2001

Un commerçant désire réaliser un emballage sans couvercle $\left(\text{avec fond}\right)$ ayant la forme d'un cylindre droit à base elliptique. Les designers lui conseillent d'utiliser une base elliptique décrite par

$$4x^2 + y^2 \leq a^2$$

où $a > 0$ est un paramètre à déterminer. Soit h la hauteur du cylindre droit.

a) Exprimer la surface S de la base elliptique sous forme d'une intégrale et montrer qu'elle vaut : $\dfrac{1}{2}\pi a^2$

b) Déterminer les paramètres a et h correspondant à l'emballage de volume V fixé présentant la surface extérieure $\left(\text{surface latérale + fond}\right)$ minimale. Justifier que le minimum obtenu est absolu.
Le périmètre de la base elliptique est donné par

$$P = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2\theta}\, d\theta = 4\alpha\pi^2 a$$

où α est approximativement égal à 0.49

---

a) La surface cherchée est égale à 4 fois la surface engendrée par $y = \sqrt{a^2 - 4x^2}$

Donc,

$$\frac{S}{4} = \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{a^2 - 4x^2}\, dx = a\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{a}\right)^2}\, dx \qquad (1)$$

Posons $t = \dfrac{2x}{a} \Rightarrow x = \dfrac{at}{2} \Rightarrow dx = \dfrac{a}{2}dt$

avec $x = \dfrac{a}{2} \Rightarrow t = 1$ et $x = 0 \Rightarrow t = 0$

(1) devient:

$$\frac{S}{4} = \frac{a^2}{2}\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt \qquad (2)$$

Posons $t = \sin\theta \Rightarrow dt = \cos\theta\, d\theta$

avec $t = 1 \Rightarrow \theta = 0$ et $t = 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$

(2) devient :

$$\frac{S}{4} = \frac{a^2}{2}\int_0^1 \cos^2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^1 \frac{\cos 2\theta + 1}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{4}\left[\int_0^1 \cos 2\theta\, d\theta + \int_0^1 d\theta\right] = \frac{a^2}{4}\left[\frac{1}{2}\int_0^1 \cos 2\theta\, d2\theta + \int_0^1 d\theta\right]$$

$$= \frac{a^2}{4}\left[\sin 2\theta + \theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2\pi}{8} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = \frac{a^2\pi}{2}}$$

$b)$ Surface latérale $= 4\alpha\pi^2 a h$

Surface du fond $= \dfrac{a^2\pi}{2}$

Surface totale $\quad S_t = 4\alpha\pi^2 a h + \dfrac{a^2\pi}{2}$

Volume : $V = \dfrac{a^2\pi h}{2} \Rightarrow h = \dfrac{2V}{a^2\pi}$

Donc, $\quad S_t = \dfrac{8\alpha\pi V}{a} + \dfrac{a^2\pi}{2}$

La surface minimale sera donnée par :

$$\frac{dS_t}{da} = -\frac{8\alpha\pi V}{a^2} + a\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2\sqrt[3]{\alpha V}$$

Et finalement : $h = \dfrac{2V}{\pi 4\sqrt[3]{\alpha^2 V^2}} \Rightarrow \boxed{h = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt[3]{\dfrac{V}{\alpha^2}}}$

Il s'agit bien d'un minimum absolu puisque :

- si $a < 2\sqrt[3]{\alpha V} \Rightarrow \dfrac{dS_t}{da} = \pi\dfrac{a^3 - 8\alpha V}{a^2} < 0$
- si $a > 2\sqrt[3]{\alpha V} \Rightarrow \dfrac{dS_t}{da} = \pi\dfrac{a^3 - 8\alpha V}{a^2} > 0$

EXANA037 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2001

Déterminer les limites suivantes en discutant les cas où le paramètre α est négatif, nul, positif :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} \sin \alpha x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} \sin \alpha x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} \sin \alpha x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} \sin \alpha x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} \sin \alpha x}{x^2}$$

$$a)\ F(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} \sin \alpha x}{x^2}$$

1) $\alpha = 0 \quad \to \quad F(x) = 0$

2) $\alpha > 0$

$$F(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} \sin \alpha x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}}}{x} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin \alpha x}{x} = (+\infty).\alpha = +\infty$$

3) $\alpha < 0$

$$F(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} \sin \alpha x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}}}{x} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}}}{x}$$

Posons $y = \dfrac{1}{x} \quad x \to 0^+ \ \Rightarrow\ y \to +\infty$

$$F(x) = \alpha \lim_{y\to +\infty} y\, e^{\alpha y} = \alpha \lim_{y\to +\infty} e^{\alpha y + \ln y} = \alpha\, e^{\lim\limits_{y\to+\infty} (\alpha y + \ln y)} = \alpha\, e^{\lim\limits_{y\to+\infty} \alpha y \left(1 + \frac{\ln y}{\alpha y}\right)}$$

$$= \alpha . e^{-\infty} = 0$$

$b)\ F(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{\frac{\alpha}{x}} \sin \alpha x}{x^2}$

1) $\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x) = 0$

2) $\alpha > 0$

$$F(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} \sin \alpha x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}}}{x} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}}}{x}$$

Posons $y = \dfrac{1}{x} \quad x \to 0^- \ \Rightarrow \ y \to -\infty$

$$F(x) = \alpha \lim_{y\to -\infty} y\, e^{\alpha y} = \alpha \lim_{y\to -\infty} e^{\alpha y + \ln y} = \alpha\, e^{\lim\limits_{y\to-\infty} (\alpha y + \ln y)} = \alpha\, e^{\lim\limits_{y\to-\infty} \alpha y \left(1 + \frac{\ln y}{\alpha y}\right)}$$

$$= \alpha . e^{-\infty} = 0$$

3) $\alpha < 0$

De la limite précédente, on déduit :

$$F(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} \sin \alpha x}{x^2} = \alpha . e^{+\infty} = +\infty$$

$c)\ F(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\frac{\alpha}{x}} \sin \alpha x}{x^2}$

On constate que les limites à gauche et à droite pour $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$ sont différentes. Il n'y a donc pas de limites pour $x \to 0$.

Pour $\alpha = 0, \quad F(x) = 0.$

$d)\ F(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{\frac{\alpha}{x}} \sin \alpha x}{x^2}$

$$F(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} \sin \alpha x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} \sin \alpha x}{e^{\ln x^2}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\left(\frac{\alpha}{x} - \ln x^2\right)} \lim_{x\to +\infty} \sin \alpha x$$

$$= e^{0-\infty} \lim_{x\to +\infty} \sin \alpha x = 0 \qquad \text{pour } \alpha > 0 \text{ et } \alpha < 0$$

Pour $\alpha = 0, \ F(x) = 0$

$e)\ F(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{\frac{\alpha}{x}} \sin \alpha x}{x^2}$

$$F(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} \sin \alpha x}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} \sin \alpha x}{e^{\ln x^2}} = \lim_{x\to -\infty} e^{\left(\frac{\alpha}{x} - \ln x^2\right)} \lim_{x\to -\infty} \sin \alpha x$$

$$= e^{0-\infty} \lim_{x\to -\infty} \sin \alpha x = 0 \qquad \text{pour } \alpha > 0 \text{ et } \alpha < 0$$

Pour $\alpha = 0, \ F(x) = 0$

EXANA038 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2001

Étudier la fonction :

$$f(x) = \frac{x^3}{a(x^2 - a^2)} \qquad a \in \Re_0 \ \ (a \neq 0)$$

en discutant, s'il y a lieu, en fonction des valeurs du paramètre a.

En particulier, déterminer :

a) Le domaine de définition de f.

b) Le domaine de continuité de f.

c) Les asymptotes éventuelles.

d) Croissance, décroissance, extrema.

e) Concavité, point d'inflexion.

Esquisser le graphe de f.

---

a) Une fonction est définie en α, si $f(\alpha)$ est un réel.

Le domaine de définition de $f(x)$ est donc $\text{dom } f(x) = \Re \setminus \{-a; a\}$

b) Une fonction est continue en α, si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$

Comme $\lim\limits_{x\to\pm a} f(x) = \pm\infty$ le domaine de continuité est

$\text{dom}_C\ f(x) = \Re \setminus \{-a; a\}$

c) <u>AV</u>

Comme $\lim\limits_{x\to\pm a} f(x) = \pm\infty$, on a deux $\boxed{\text{AV : } y = a \quad et \quad y = -a}$

<u>AO</u>

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{ax(x^2 - a^2)} = \frac{1}{a}$$

$$p = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{a(x^2 - a^2)} - \frac{x}{a}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + a^2x}{a(x^2 - a^2)}\right) = 0$$

$$\to \boxed{AO \equiv y = \frac{x}{a}}$$

c) Dérivée première :

$$\left(\frac{x^3}{a\left(x^2-a^2\right)}\right)' = \frac{3x^2\,a\left(x^2-a^2\right)-x^3\,a\,2x}{a^2\left(x^2-a^2\right)^2} = \frac{x^2\left(x^2-3a^2\right)}{a\left(x^2-a^2\right)^2}$$

Dérivée seconde :

$$\left(\frac{x^2\left(x^2-3a^2\right)}{a\left(x^2-a^2\right)^2}\right)' = \frac{1}{a}\,\frac{\left(2x\left(x^2-3a^2\right)+x^2\,2x\right)\left(\left(x^2-a^2\right)^2\right)-x^2\left(x^2-3a^2\right)2\left(x^2-a^2\right)2x}{\left(x^2-a^2\right)^4}$$

$$= \frac{2\,a\,x\left(x^2+3a^2\right)}{\left(x^2-a^2\right)^3}$$

Ce qui permet de construire les tableaux de variation :

$a>0$		$-\sqrt{3}a$		$-a$		0		a		$\sqrt{3}a$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\therefore$	$-$	0	$-$	$\therefore$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$\therefore$	$+$	0	$-$	$\therefore$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$\therefore$	$\searrow$	I	$\searrow$	$\therefore$	$\searrow$	m	$\nearrow$
Concavité		$\cap$			$\cup$		$\cap$			$\cup$	

$a<0$		$-\sqrt{3}a$		$-a$		0		a		$\sqrt{3}a$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\therefore$	$+$	0	$+$	$\therefore$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$\therefore$	$-$	0	$+$	$\therefore$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$\therefore$	$\nearrow$	I	$\nearrow$	$\therefore$	$\nearrow$	M	$\searrow$
Concavité		$\cup$			$\cap$		$\cup$			$\cap$	

E) Les concavités sont données dans les tableaux de variation.

Si $a>0$, le maximum est donné pour $x=-\sqrt{3}a$

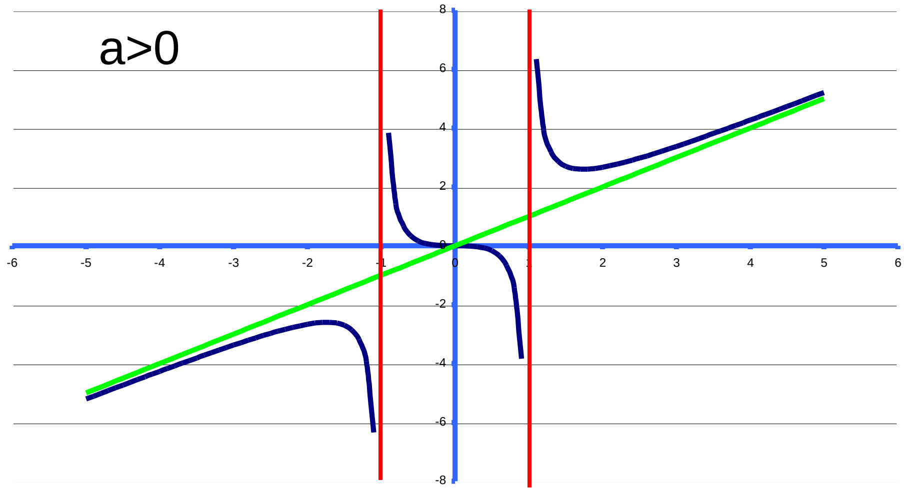
$\rightarrow\ y=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (indépendant de a).

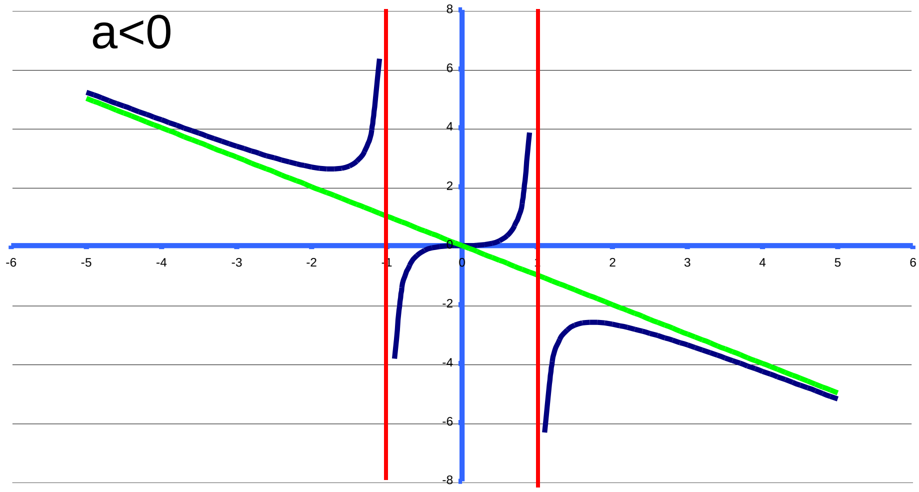
Donc : $M:\left(-\sqrt{3}a;-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad m:\left(\sqrt{3}a;\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Si $a<0$: M:$\left(-\sqrt{3}a;\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad m:\left(\sqrt{3}a;-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Le point d'inflexion se trouve à l'origine.

Les graphiques suivants donnent la fonction dans le cas où $a=1$ *et* $a=-1$.





Corrigé le 2 avril 2006 (Sabine Bouzette)

EXANA039 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2001

En ajustant la valeur du paramètre a, déterminer une fonction $g(x)$ définie sur $I =]-1\,;1[$, possédant des asymptotes verticales en -1 et $+1$, dont la dérivée sur I est donnée par la fonction $f(x)$ et tel que $g(0)=1$

$$f(x) = \frac{x^3}{a\left(x^2-a^2\right)} \qquad a \in \Re_0 \ \left(a \neq 0\right)$$

Intégrons $f(x)$

$$g(x) = \int \frac{x^3}{a\left(x^2-a^2\right)}dx = \frac{1}{a}\left[\int xdx + \int \frac{a^2x}{\left(x^2-a^2\right)}dx\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[\int xdx + \int \frac{dx}{x-a} + \int \frac{dx}{x+a}\right]$$

$$= \frac{1}{a}\frac{x^2}{2} + \frac{a}{2}\ln\left|x^2-a^2\right| + C$$

Si $g(x)$ a des asymptotes en -1 et 1, on a $\quad a=1 \ \textit{ou} \ a=-1$

C est déterminé sachant que $\quad g(0)=1$

$$a=1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\left|-1\right| + C = 1 \quad \rightarrow \quad C=1$$

$$a=-1 \quad \rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|-1\right| + C = 1 \quad \rightarrow \quad C=1$$

Donc $g(x) = \frac{1}{2}\left(x^2+\ln\left|x^2-1\right|+1\right)$ ou $g(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2+\ln\left|x^2-1\right|-1\right)$

avec $x \in \ ]-1,1[$
