

Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 32

EXANA320 – EXANA329

<http://www.matheux.c.la>

**Jacques Collot
Benoit Baudalet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard**

Juin 2012

EXANA320 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2011.

Calculer (en justifiant les calculs) :

a) $\int_{-7}^7 \sqrt{x^2} dx$

b) $\int \sin 5x \cos 5x e^x dx$

a) $\int_{-7}^7 \sqrt{x^2} dx = 2 \int_0^7 \sqrt{x^2} dx = 2 \int_0^7 x dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^7 = \boxed{49}$

b) $I = \int \sin 5x \cos 5x e^x dx = \frac{1}{2} \int \sin 10x e^x dx$

$$\begin{array}{l} f' = e^x \quad f = e^x \\ g = \sin 10x \quad g' = 10 \cos 10x \end{array} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \left(\sin 10x e^x - 10 \underbrace{\int \cos 10x e^x dx}_{=I'} \right)$$

$$I' = \int \cos 10x e^x dx$$

$$\begin{array}{l} f' = e^x \quad f = e^x \\ g = \cos 10x \quad g' = -10 \sin 10x \end{array} \Rightarrow I' = \cos 10x e^x + 10 \underbrace{\int \sin 10x e^x dx}_{=2I}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} (\sin 10x e^x - 10(\cos 10x e^x + 20I)) \Rightarrow \boxed{I = \frac{e^x}{202} (\sin 10x - 10 \cos 10x) + C}$$

Solution proposée par Dominique Druetz

a) $\int_{-7}^7 \sqrt{x^2} dx = \int_{-7}^7 |x| dx = 2 \int_0^7 x dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^7 = 49$

b)

$$I(x) = \int e^x \sin 5x \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int e^x \sin 10x dx$$

$$I(x) = \frac{1}{2} e^x \sin 10x - 5 \int e^x \cos 10x dx =$$

$$I(x) = \frac{1}{2} e^x \sin 10x - 5e^x \cos 10x - 50 \underbrace{\int e^x \sin 10x dx}_{2I(x)}$$

$$101 I(x) = \frac{1}{2} e^x \sin 10x - 5e^x \cos 10x + C$$

$$I(x) = \frac{1}{202} e^x (\sin 10x - 10 \cos 10x) + C$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

Intégration par partie deux fois:

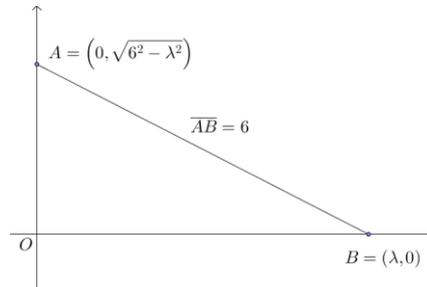
$$f = \sin 10x \rightarrow f' = 10 \cos 10x$$

$$g' = e^x \rightarrow g = e^x$$

$$f = \cos 10x \rightarrow f' = -10 \sin 10x$$

EXANA321 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2011.

Parmi tous les triangles rectangles dont l'hypoténuse est de longueur 6, quel est celui qui engendre, lorsqu'on le fait tourner autour d'un des côtés de l'angle droit, un cône de volume maximum? Quel est le volume de ce cône?



$$\text{Equation de la droite : } \frac{y}{\sqrt{6^2 - \lambda^2}} + \frac{x}{\lambda} = 1 \Rightarrow y = \sqrt{6^2 - \lambda^2} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{Le volume du cône est alors : } V = \pi(6^2 - \lambda^2) \int_0^\lambda \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^2 dx = \frac{\pi}{3} \lambda (6^2 - \lambda^2)$$

$$\text{Le cône sera maximum si } \frac{dV}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3} (6^2 - 3\lambda^2) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2\sqrt{3}}$$

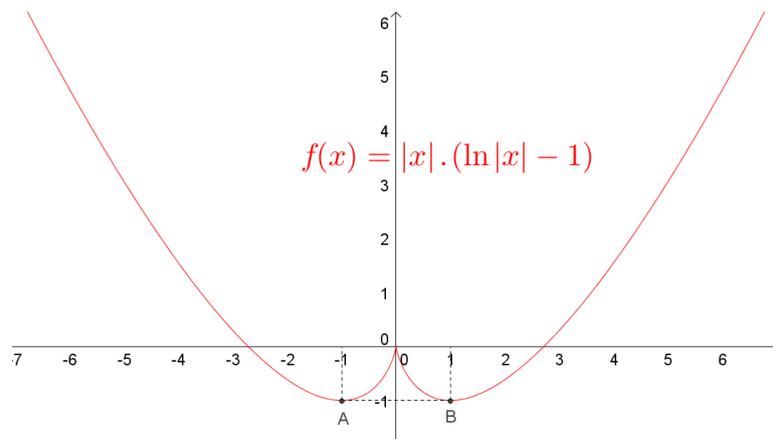
$$\begin{array}{c} \lambda \qquad 2\sqrt{3} \\ \hline \frac{dV}{d\lambda} \quad + \quad 0 \quad - \\ V \quad \nearrow \quad \text{Max} \quad \searrow \end{array}$$

$$\text{Le volume vaut alors : } \boxed{V_{\max} = 16\pi\sqrt{3}}$$

EXANA322 – FACS, ULB, Bruxelles, Septembre 2011.

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x|(\ln|x| - 1)$ pour tout réel non nul.

- f est-elle paire, impaire? Justifier.
 - Déterminer les zéros de f .
 - Que vaut la limite de $f(x)$
 - lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier.
 - lorsque x tend vers 0 par valeurs > 0 ? Justifier.
 - Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
 - Que vaut la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs > 0 ? Justifier.
 - Trouver les éventuels maxima, minima et point d'inflexion de f .
Justifier et calculer leurs coordonnées.
 - Esquissez le graphe de la fonction f .
-



a) $f(-x) = |-x|(\ln|-x| - 1) = |x|(\ln|x| - 1) = f(x) \Rightarrow$ Fonction paire.

b) $|x|(\ln|x| - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln|x| = 1 \Rightarrow x = \pm e \end{cases}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x|(\ln|x| - 1) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x|(\ln|x| - 1) = [0 \times \infty] = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot (\ln x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - 1}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

d) • $x > 0$

$$\Rightarrow f'(x) = (x(\ln x - 1))' = \ln x - 1 + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x \quad \left(\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty \right)$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{1}{x}$$

• $x < 0$

$$\Rightarrow f'(x) = (-x(\ln(-x) - 1))' = -(\ln(-x) - 1) - x \cdot \frac{1}{-x} \cdot (-1) = -\ln(-x) \quad \left(\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = +\infty \right)$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x}$$

e) $f'(x)$ s'annule en $x = \pm 1$,

$f''(x)$ n'a pas de solution (pas de point d'inflexion) et est toujours positive (concavité > 0)

x	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
f'		- 0	+ / -	0	+
f''		+ +	+ / +	+ +	+
f		\searrow min (-1, -1)	\nearrow / \searrow	min (1, -1)	\nearrow

EXANA323 – FACS, ULB, Bruxelles, Septembre 2011.

Calculer (en justifiant les calculs) :

a) $\int (x-3)^2 \ln x \, dx$

b) $\int_{-200\pi}^{50\pi} |\sin 5x| \, dx$

a) $I = \int (x-3)^2 \ln x \, dx$

$$f = \ln x \quad f' = \frac{1}{x}$$

$$g' = (x-3)^2 \quad g = \frac{(x-3)^3}{3} \Rightarrow I = \frac{(x-3)^3}{3} \ln x - \underbrace{\int \frac{(x-3)^3}{3x} \, dx}_{=I_1}$$

$$I_1 = \int \frac{(x-3)^3}{3x} \, dx = \int x^2 - 3x + 9 - \frac{9}{x} \, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x - 9 \ln x$$

$$\Rightarrow I = \frac{(x-3)^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 9x + 9 \ln x + C$$

b) La fonction $f(x) = |\sin(5x)|$ est paire et de période $\frac{\pi}{5}$.

L'intervalle $[-200\pi, 50\pi]$ correspond à 1250 périodes.

$$I = \int_{-200\pi}^{50\pi} |\sin 5x| \, dx = 1250 \int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin 5x \, dx = -1250 \cdot \frac{1}{5} \cdot [\cos 5x]_0^{\frac{\pi}{5}} = -250(\cos \pi - \cos 0) = 500$$

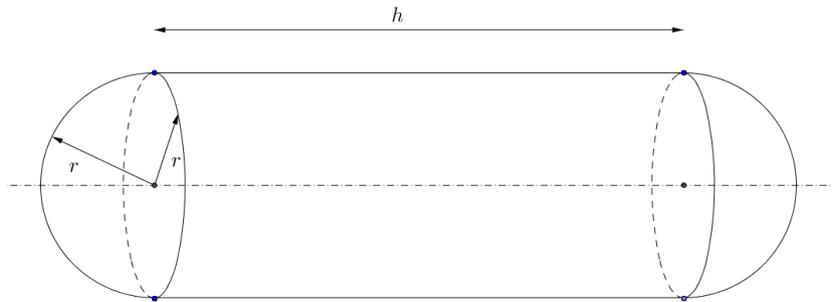
Solution proposée par Dominique Druetz

<p>a) $I(x) = \int (x-3)^2 \ln x \, dx$</p> $I(x) = \frac{(x-3)^3}{3} \ln x - \int \frac{(x-3)^3}{3x} \, dx$ $\int \frac{(x-3)^3}{3x} \, dx = \frac{1}{3} \int x^2 - 9x + 27 - \frac{27}{x} \, dx = \frac{x^3}{9} - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 9 \ln x + C$ $I(x) = \frac{(x-3)^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{3}{2}x^2 - 9x + 9 \ln x + C$ <p>b)</p> $\int_{-\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{5}} \sin 5x \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin 5x \, dx$ $\int_{-200\pi}^{50\pi} \sin 5x \, dx = 2 \cdot 625 \cdot \left[-\frac{1}{5} \cos 5x \right]_0^{\frac{\pi}{5}} = -250 \cdot (-1 - 1) = 500$	<p>Intégration par partie</p> $g' = (x-3)^2 \rightarrow g = \frac{(x-3)^3}{3}$ $f = \ln x \rightarrow f' = \frac{1}{x}$ <p>période de $\sin 5x = \frac{2\pi}{5}$</p> $\rightarrow \frac{250\pi}{\frac{2\pi}{5}} = 625 \text{ périodes}$
--	---

EXANA324 – FACS, ULB, Bruxelles, Septembre 2011.

Une capsule en forme de cylindre circulaire terminé à chaque extrémité par une demi-sphère, a un volume de 10 cm^3 .

Que vaut l'aire totale A de cette capsule, exprimée en fonction du rayon r des demi-sphères?
Pour quelle valeur de r cette aire est-elle minimum?



1) Rappel : Sphère de rayon r : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $A = 4\pi r^2$

2) $V = V_{\text{sphère}} + V_{\text{cylindre}} = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 10 \Rightarrow h = \frac{30 - 4\pi^2 r^3}{3\pi r^2}$

or $A = A_{\text{sphère}} + A_{\text{cylindre}} = 4\pi r^2 + 2\pi r h = 4\pi r^2 + 2\pi r \frac{30 - 4\pi^2 r^3}{3\pi r^2}$
 $= 4\pi r^2 + \frac{2}{3} \frac{30 - 4\pi r^3}{\pi r} = \frac{4\pi r^3 + 60}{3r}$

$\frac{dA}{dr} = \frac{4}{3}(2\pi r^3 - 15) \Rightarrow 2\pi r^3 = 15 \Rightarrow \boxed{r = \sqrt[3]{\frac{15}{2\pi}}} \Rightarrow A = 12\sqrt{\frac{25\pi}{4}}$

r	$\sqrt[3]{\frac{15}{2\pi}}$	
$\frac{dA}{dr}$	-	+
A	\searrow	\nearrow
	min	

Donc A est minimum pour $r = \sqrt[3]{\frac{15}{2\pi}}$. Dans ce cas : $h = \frac{30 - 4\pi^2 \frac{15}{2\pi}}{3\pi \sqrt[3]{\left(\frac{15}{2\pi}\right)^2}} = 0$

C'est-à-dire que la capsule est en fait bien une sphère.

24 aout 2012

EXANA325 – EPL, UCL, LLN, Juillet 2012 série 1.

Soit une fonction $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 (C est-à-dire dérivable et dont la dérivée première est continue) telle que $\phi(a) = -1$ et $\phi(b) = 1$.

a) Calculer l'intégrale :

$$\int_a^b \frac{\phi'(t)}{1 + \phi^2(t)} dt$$

b) En utilisant un raisonnement similaire, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{4 + \sin^2(t)} dt$$

c) Calculer la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(\sin(2x)))^2}{x^2}$$

d) Démontrez que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x$ est bijective.

On note $g = f^{-1}(x)$ la fonction réciproque. Exprimez g' et g'' en fonction de g .

Solution proposée par Nicole Berckmans

$$1. a) \begin{cases} x = \phi(t) \\ dx = \phi'(t) dt \\ \text{si } t = a, x = \phi(a) = -1 \\ \text{si } t = b, x = \phi(b) = 1 \end{cases} \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2}$$

$$b) \begin{cases} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \\ \text{si } t = \frac{\pi}{2}, x = 1 \\ \text{si } t = 0; x = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(\sin(2x)))^2}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(\sin(2x))}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 \right]^2 = (1 \times 1 \times 2)^2 = 4$$

$$\text{ou bien } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(\sin(2x)))^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^2}{x^2} = 4$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot x = 1 \times \lim_{x \rightarrow 0} x$$

3) f est bijective car $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ et donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} et donc injective. L'image de f est \mathbb{R} car $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

$$(f^{-1})' = g' = \frac{1}{f' \circ g} = \frac{1}{3g^2 + 1}$$

$$g'' = -(3g^2 + 1)^{-2} \cdot g' \cdot 6g = -\frac{6g}{(3g^2 + 1)^3}$$

15 aout 2012

EXANA326 – EPL, UCL, LLN, Juillet 2012 série 1.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

- a) Démontrer que f est prolongeable par continuité à l'origine.
- b) Démontrez que le graphe de f admet à l'origine des demi-tangentes à gauche et à droites distinctes.
- c) Étudiez les variations de f et tracez sa courbe représentative. On précisera le domaine de définition, les éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et de décroissance et les extrémums éventuels. On n'étudiera ni la concavité ni les points d'inflexion.

Solution proposée par Nicole Berckmans

$$a) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0_D} \left[\frac{0}{1+\infty} \right] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0_G} \left[\frac{0}{1+0} \right] = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f = 0; \text{ dés lors } f \text{ admet un prolongement continu en } x = 0. \\ \text{On pose } f(0) = 0.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{\sqrt{x}}} \not\equiv \text{ car } \begin{cases} f'(0)_G = 1 \Rightarrow T_G(0,0) \equiv y = x \\ f'(0)_D = 0 \Rightarrow T_D(0,0) \equiv y = 0 \end{cases}$$

c) Pas d'AV par a)

Pas d'AH car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$AO \equiv y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \frac{1}{2}x = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\frac{1}{1+e^{\sqrt{x}}} - \frac{1}{2} \right] = [\infty \times 0] \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+e^{\sqrt{x}}} - \frac{1}{2} = \left[\frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{(1+e^{\sqrt{x}})^2} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

f est non dérivable en $x = 0$ (voir b)

$$\text{Pour } x \neq 0: f'(x) = \frac{x + xe^{\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}}}{x(1+e^{\sqrt{x}})^2} = \frac{1 + e^{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{(1+e^{\sqrt{x}})^2}$$

Pour $x > 0$, $f'(x)$ est strictement positif.

Pour $x < 0$, montrons que le numérateur de $f'(x)$ est aussi strictement positif.

1^{ère} méthode : Posons $z = \frac{1}{x}$, étudions $g(z) = 1 + e^z(1+z)$

$$g'(x) = e^z(2+z) \quad \begin{array}{c|cc} x & & -2 \\ \hline g'(x) & - & 0 & + \\ g(x) & \searrow & g(-2) & \nearrow \end{array}$$

car $e^2 > 1$

Par conséquent $\forall z = g(z) > 0$ et donc $f'(x) > 0$

2^{ème} méthode : Si $f'(x) = 0$ alors $e^{\sqrt{x}} = -\frac{x}{x+1}$. Dans ce cas le graphe de

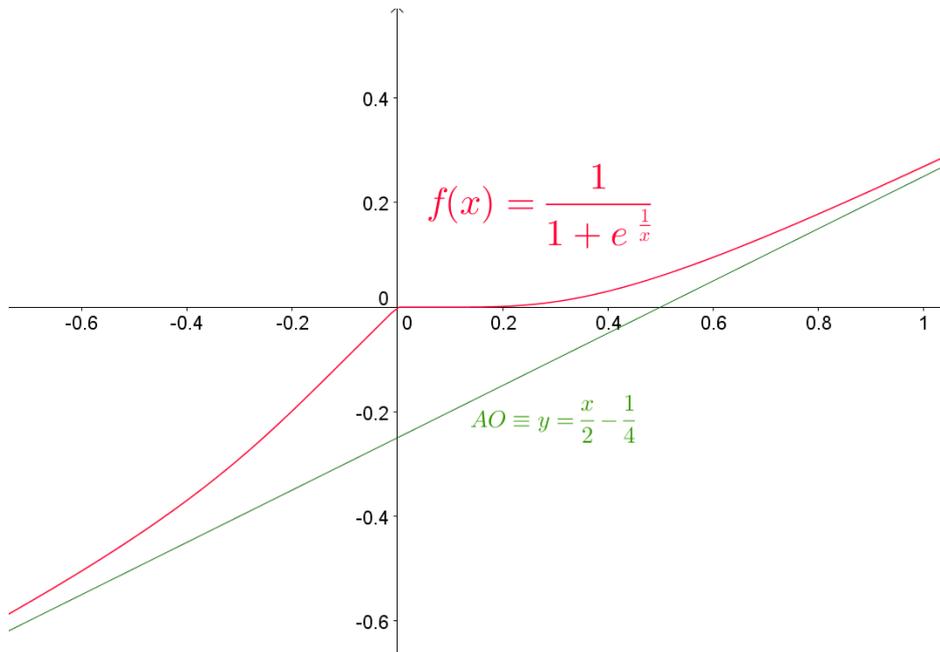
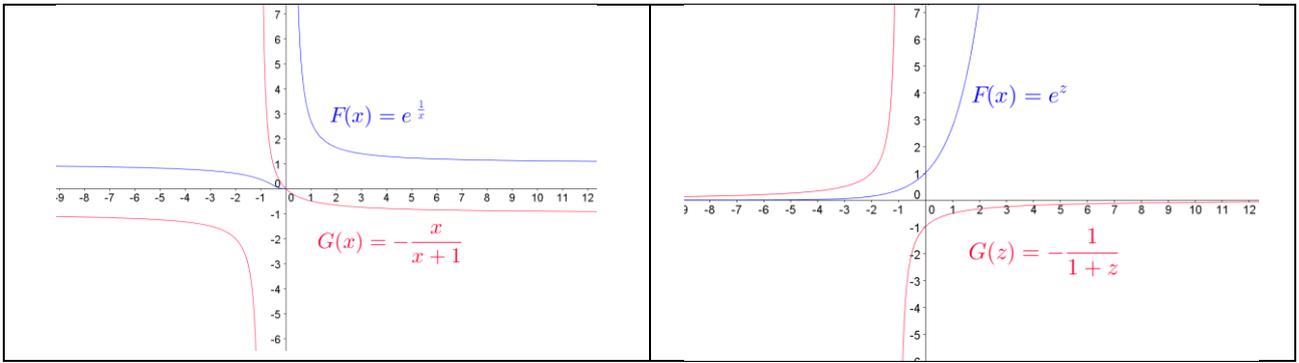
$$F(x) = e^{\sqrt{x}} \text{ coupe le graphe de } G(x) = -\frac{x}{x+1}. \text{ Ce qui n'est pas le cas}$$

lorsqu'on examine leur graphe. (Voir ci-dessous)

3^{ème} méthode : On aurait pu aussi comparer les graphes de $F(z) = e^z$ et $G(z) = \frac{-1}{1+z}$

(Voir ci-dessous)

$$\text{Le tableau de variations de } f(x) \text{ est donc : } \begin{array}{c|cc} x & & 0 \\ \hline f'(x) & & 1|0 \\ f(x) & \nearrow & 0 & \nearrow \end{array}$$



20 aout 2012

EXANA327 – EPL, UCL, LLN, Juillet 2012 série 1.

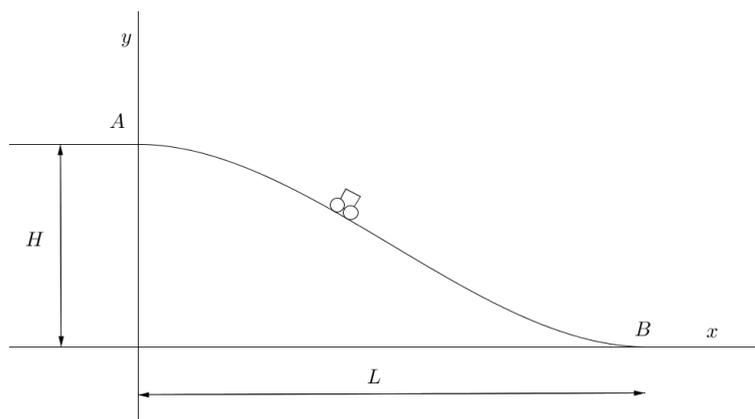
On désire concevoir une rampe qui permet à un chariot de descendre "en douceur" une marche de hauteur H sur une distance L . Pour cela, on veut que la rampe ait une pente horizontale aux points A et B .

1. Dans l'hypothèse où

$$f(x) = \sum_{n=0}^p a_n x^n$$

est un polynôme, quel est le degré minimal p de ce polynôme pour qu'il satisfasse aux différentes contraintes, i.e. qu'il passe par les points A et B et qu'il ait une pente horizontale en A et B .

2. Calculez les coefficients a_n de ce polynôme de degré minimal en fonction de H et L .



Solution proposée par Nicole Berckmans

1. Puisqu'il y a 4 conditions (contraintes) : $f(0) = H$, $f(L) = 0$, $f'(0) = 0$, $f'(L) = 0$
le polynôme est de degré 3.

2. $f'(x)$ est de degré 2 et possède les racines 0 et L .

$$f'(x) = ax(x-L); f(x) = \frac{ax^3}{3} - \frac{aLx^2}{2} + K$$

$$f(0) = H \Rightarrow K = H$$

$$f(L) = 0 \Rightarrow \frac{aL^3}{3} - \frac{aL^3}{2} + H = 0; \text{ d'où } a = \frac{6H}{L^3}$$

$$\text{Conclusion : } f(x) = 2\frac{H}{L^3}x^3 - 3\frac{H}{L^2}x + H$$

$$a_3 = 2\frac{H}{L^3}, a_2 = -3\frac{H}{L^2}, a_1 = 0, a_0 = H$$

20 aout 2012

EXANA328 – EPL, UCL, LLN, Juillet 2012 série 2.

1. Etudiez la dérivabilité à l'origine de la fonction f définie par

$$f(x) = \cos \sqrt{x}$$

2. Calculez les intégrales suivantes.

a)
$$\int_{-1}^1 (x^2 - \sqrt{|x|}) x^2 dx$$

b)
$$\int_{-2}^2 (x^3 - \sqrt[3]{x}) x^2 dx$$

3. Le théorème de Rolle s'énonce ainsi : si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. Utilisez ce résultat pour prouver que l'équation

$$x^3 - 3x + 2012 = 0$$

ne possède pas deux solutions distinctes dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Solution proposée par Nicole Berckmans

1).
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2} = f'(0)$$

2) a) f est paire et donc

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 (x^2 - \sqrt{|x|}) \sqrt[3]{x^2} dx = 2 \int_0^1 (x^2 - \sqrt{x}) \sqrt[3]{x^2} dx = 2 \int_0^1 x^{8/3} - x^{7/6} dx \\ &= 2 \left[\frac{x^{11/3}}{11/3} - \frac{x^{13/6}}{13/6} \right]_0^1 = 2 \left[\frac{3}{11} - \frac{6}{13} \right] = -\frac{54}{143} \end{aligned}$$

b) f est impaire et donc $\int (x^3 - \sqrt[3]{x}) x^2 dx = 0$

3) $f(x) = x^3 - 3x + 2012$; $f'(x) = 3x^2 - 3$. Sur $[-1, 1]$, f est une fonction strictement décroissante par conséquent f est injective. Si on veut utiliser le théorème de Rolle, on pourrait dire que si f admettait 2 racines différentes a et b dans $[-1, 1]$ alors il existerait $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$ ce qui n'est pas le cas dans $]-1, 1[$

EXANA329 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2011 Série 2.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x}(\ln x - x^2 - 1)$$

- Donnez le domaine de définition de f .
- Démontrez que la dérivée de f s'annule pour une seule valeur a et que cette valeur est comprise entre 1 et 2.
- Étudiez les variations de f et tracer sa courbe représentative. On précisera les éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et de décroissance et les extrémums éventuels. On n'étudiera ni la concavité ni les points d'inflexion.

Solution proposée par Nicole BERCKMANS

a) $\text{dom } f = \mathbb{R}_0^+$

b) $f'(x) = \frac{2-x^2-\ln x}{x^2}$; $f'(1) = 1 > 0$ et $f'(2) = \frac{2-\ln 2}{4} < 0$ car $\ln 2 > \ln 1 = 0$.

f' est continue sur $[1, 2]$ et dès lors en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, on peut dire que f' s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]1, 2[$.

Puisque $f''(x) = \frac{2\ln x - 5}{x^3}$ est strictement négatif sur $[1, 2]$, on peut affirmer que sur cet intervalle f' est strictement décroissante. On en déduit dès lors qu'il existe une seule valeur a dans $[1, 2]$ tel que $f'(a) = 0$.

Autre raisonnement] Les courbes $y = \ln(x)$ et $y = -x^2 + 2$ se coupent une seule fois sur $[1, 2]$

c) $AV \equiv x = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \left[\frac{-\infty - 0 - 1}{0^+} \right] = -\infty$

$AH \not\equiv$ car $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x}{x} - x - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right) - \infty - 0 = -\infty$

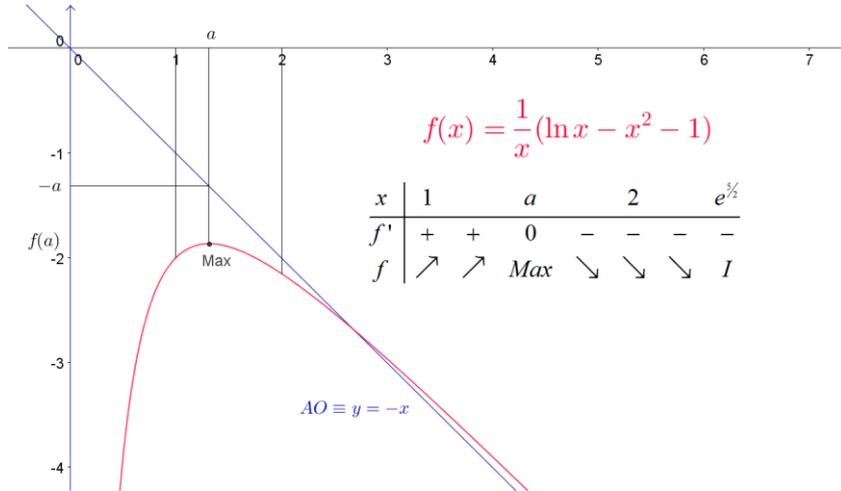
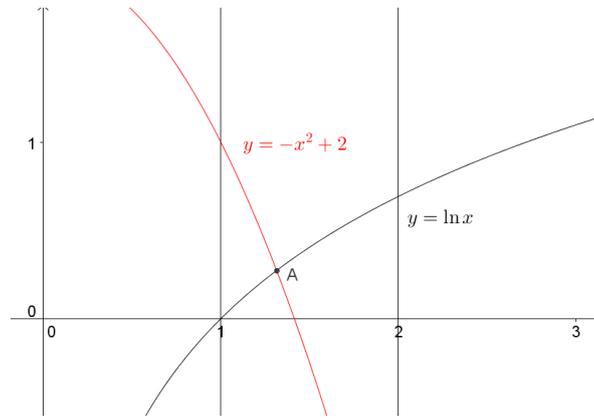
$AO \equiv y = -x$

car $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x^2}{x^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = -1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{2x} = -1$

et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x - 1}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

rem: $f'(a) = 0 \Rightarrow \ln a = 2 - a^2$; $f(a) = \frac{\ln a - a^2 - 1}{a} = \frac{1 - 2a^2}{a} < 0$ car $1 < a < 2$

Le maximum est situé en dessous de l'AO et la courbe coupe l'AO en un point situé entre le max et le point I



Aout 09