Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 35

EXANA350 – EXANA359

http://www.matheux.c.la

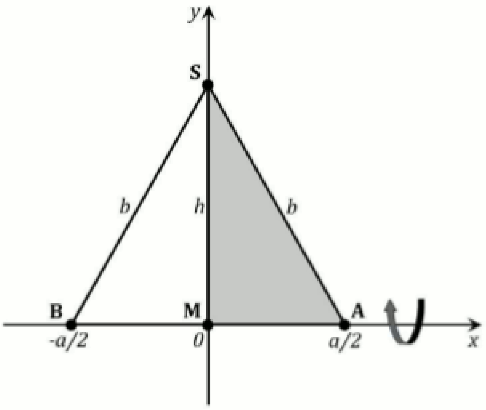
Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

Avril 2013

EXANA350 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2012.

Parmi tous les triangles isocèles ayant un périmètre de 40 cm, déterminer celui qui maximise le volume du solide révolution obtenu en faisant tourner le triangle autour de sa base (donner les longueurs des côtés de ce triangle).

Solution proposée par Jan Frans Broeckx



Notation

Appelons a la longueur de la base du triangle isocèle, b la longueur des deux autres côtés et h sa hauteur.

Nous choisissons a comme la variable libre, avec comme condition $0 < a < 20$.

Fonction objectif

Le volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du triangle isocèle ABS est égal à deux fois celui engendré par la rotation autour du même axe du triangle rectangle AMS. En termes d'intégrales :

$$V = 2\pi \int_0^{a/2} (f(x))^2 dx$$

où $y = f(x)$ est l'équation de la droite SA :

$$f(x) = h\left(1 - \frac{2}{a}x\right)$$

On trouve donc pour le volume :

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^{a/2} (f(x))^2 dx = 2\pi h^2 \int_0^{a/2} \left(1 - \frac{2}{a}x\right)^2 dx \\
&= 2\pi h^2 \int_0^{a/2} \left(\frac{4}{a^2}x^2 - \frac{4}{a}x + 1\right) dx \\
&= 2\pi h^2 \left[\frac{4}{a^2}\frac{x^3}{3} - \frac{4}{a}\frac{x^2}{2} + x\right]_0^{a/2} \\
&= 2\pi h^2 \left(\frac{4}{a^2}\frac{a^3}{24} - \frac{4}{a}\frac{a^3}{8} + \frac{a}{2}\right) = 2\pi h^2 \left(\frac{a}{6} - \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{3} a h^2
\end{aligned}$$

Contrainte

$$\begin{aligned}
a + 2b = 40 \iff 2b = 40 - a &\iff 2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} = 40 - a \qquad (\text{avec } 0 < a < 20) \\
&\iff 4\left(h^2 + \frac{a^2}{4}\right) = (40 - a)^2 \\
&\iff 4h^2 + a^2 = a^2 - 80a + 1600 \\
&\iff h^2 = 400 - 20a \\
&\iff h^2 = 20(20 - a)
\end{aligned}$$

Optimisation

On obtient la fonction objectif comme fonction de la seule variable a en remplaçant $h^2 = 20(20-a)$ dans l'expression pour le volume :

$$V(a) = \frac{\pi}{3}a.20(20-a) = \frac{20\pi}{3}a(20-a)$$

Elle sera maximale si sa dérivée première s'annule :

$$V'(a) = \frac{20\pi}{3}(-a+20-a) = \frac{40\pi}{3}(10-a)$$

$$V'(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 10$$

A cette valeur de a correspond $b = \frac{1}{2}(40-a) = 15$

Vérifions qu'il s'agit bien d'un maximum :

a	0		10		20
$V'(a)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$V(a)$	0	↗	max	↘	0

Réponse

Le volume engendré est maximal si $a = 10$ cm et $b = 15$ cm ; ce volume maximal est égal à :

$$V_{max} = \frac{2000\pi}{3} \cong 2094 \text{ cm}^3$$

12 décembre 2012

EXANA351 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2012

Soit la fonction f définie par $f(x)=|x^3|e^{-x^2}$ pour tout x réel.

a) f est-elle paire? impaire? Justifier.

b) Déterminer les éventuels zéros de f.

c) Déterminer la limite de f losque x tend vers $+\infty$? Justifier.

d) Déterminer mes éventuelles asymptotes du graphe de f.

e) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

f) Combien le graphe de f possède-t-il de points de maximum? de minimum? Justifier et calculer leurs abscisses.

g) Calculer les abscisses de tous les points d'inflexion du graphe f. Justifier.

h) Esquisser le graphe de la fonction f en indiquant les différents points apparaissant dans vos réponses aux questions précédentes.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

a) La fonction est **paire** puisque $f(-x)=|-x^3|e^{(-x)^2}=|x|^3e^{-x^2}=f(x)$

Dans la suite (points b-g) on peut donc se limiter à étudier la fonction pour des arguments $x\in\mathbb{R}^+$; le graphe de la fonction pour des arguments négatifs s'obtient de celui pour des arguments positifs par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.

b) $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ (étant donné que l'exponentielle ne s'annule nulle part)

c) Limite :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x^2} = [\infty.0] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \text{Hospital}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2xe^{x^2}} = \frac{3}{2}\lim_{x\mp\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \text{Hospital}\\ &= \frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{x^2}} = \frac{3}{4}\lim_{x\to+\infty}e^{-x^2} = 0\end{aligned}$$

d) Ce dernier résultat montre que le graphe de f possède une **asymptote horizontale** à droite d'équation $y=0$; la fonction étant paire, cette même droite est également asymptote horizontale à gauche.

e) Dérivée première et dérivée seconde pour $x\in\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(x^3e^{-x^2}\right)' = 3x^2e^{-x^2}+x^3\left(-2xe^{-x^2}\right) = (3x^2-2x^4)e^{-x^2} = x^2(3-2x^2)e^{-x^2}\\ f''(x) &= \left((3x^2-2x^4)e^{-x^2}\right)' = (6x-8x^3)e^{-x^2}-2x(3x^2-2x^4)e^{-x^2}\\ &= 2x(2x^4-7x^2+3)e^{-x^2}\end{aligned}$$

f) Croissance, décroissance, maxima, minima dans $\mathbb{R}^+$:

$$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x=0\\ 3-2x^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\sqrt{\frac{3}{2}}\cong 1{,}2247\end{array}\right.$$

x	0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-3/2} = \frac{3\sqrt{6}}{4}e^{-3/2} \cong 0{,}4099$$

Le graphe de la fonction possède dans $\mathbb{R}^+$ un **maximum** de coordonnées $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,; \frac{3\sqrt{6}}{4}e^{-3/2}\right)$.

Etant donné que la fonction est paire, le point de coordonnées $(0\,;0)$ est un **minimum** du graphe de *f*.

g) Concavité et points d'inflexion dans $\mathbb{R}^+$:

$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

$$\text{ou} \quad 2x^4 - 7x^2 + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\sqrt{3}$	
$f''(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	min	$\upuparrows$	PI	$\downdownarrows$	PI	$\upuparrows$

Calculons la valeur de la fonction et de sa dérivée première dans les deux points d'inflexion :

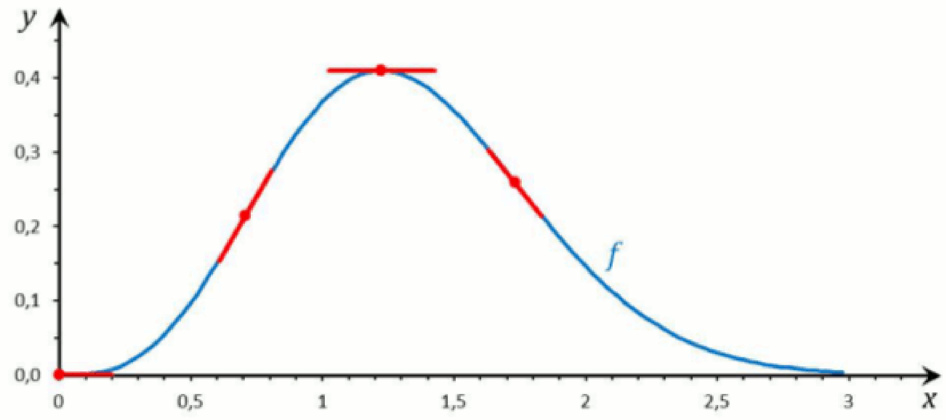
$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-1/2} \cong 0{,}2144 \qquad f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}e^{-3} \cong 0{,}2520$

$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-1/2} \cong 0{,}6065 \qquad f'(\sqrt{3}) = -9e^{-3} \cong -0{,}4480$

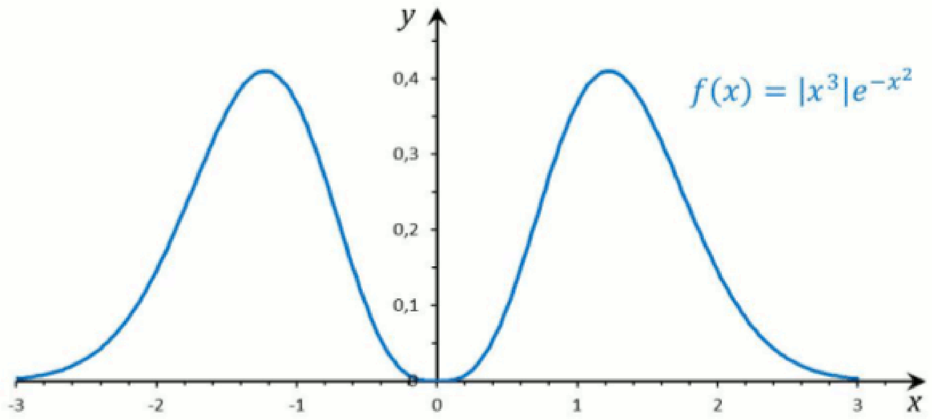
Le graphe de la fonction possède dans $\mathbb{R}^+$:

- un **point d'inflexion** de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\, \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-1/2}\right)$ où le coefficient angulaire de la tangente est égal à $e^{-1/2}$;
- un **point d'inflexion** de coordonnées $\left(\sqrt{3}\,;\, 3\sqrt{3}e^{-3}\right)$ où le coefficient angulaire de la tangente est égal à $-9e^{-3}$.

h) Le graphe de la fonction sur $\mathbb{R}^+$, basé sur ce qui précède, est montré dans la figure ci-dessous, qui contient tous les points particuliers :



Etant donné le caractère pair de la fonction, le graphe de la fonction sur ℝ est alors :



EXANA352 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2012.

Calculer (en justifiant les calculs)

a) $\int_0^{11} \lfloor \sqrt{x} \rfloor \, dx$ où $\lfloor u \rfloor$ est le plus grand entier $\leq u$

b) $\int \sin(px)\cos(qx)\, dx$ $\quad$ (discuter selon les valeurs des constantes $p, q \in \mathbb{R}_0$)

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

a) Pour des arguments dans l'intervalle d'intégration, l'intégrant est égal à :

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si} \quad 4 \leq x < 9 \\ 3 & \text{si} \quad 9 \leq x < 16 \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{11} \lfloor \sqrt{x} \rfloor \, dx &= 0.\int_0^1 dx + 1.\int_1^4 dx + 2.\int_4^9 dx + 3.\int_9^{11} dx \\ &= 0.(1-0) + 1.(4-1) + 2.(9-4) + 3.(11-9) \\ &= 0 + 1.3 + 2.5 + 3.2 \\ &= 19 \end{aligned}$$

b) Si $p = q \in \mathbb{R}_0$:

$$\begin{aligned} \int \sin(px)\cos(px)\, dx &= \frac{1}{2}\int \sin(2px)\, dx \\ &= \frac{1}{4p}\int 2p\sin(2px)\, dx \\ &= -\frac{\cos(2px)}{4p} + C \end{aligned}$$

Si $p \neq q$ $(p, q \in \mathbb{R}_0)$:

$$\begin{aligned} \int \sin(px)\cos(qx)\, dx &= \frac{1}{2}\int \big(\sin\big((p+q)x\big) + \sin\big((p-q)x\big)\big)dx \\ &= \frac{1}{2(p+q)}\int (p+q)\sin\big((p+q)x\big)\, dx + \frac{1}{2(p-q)}\int (p-q)\sin\big((p-q)x\big)\, dx \\ &= -\frac{\cos\big((p+q)x\big)}{2(p+q)} - \frac{\cos\big((p-q)x\big)}{2(p-q)} + C \end{aligned}$$

Solution proposée par Dominique Druez

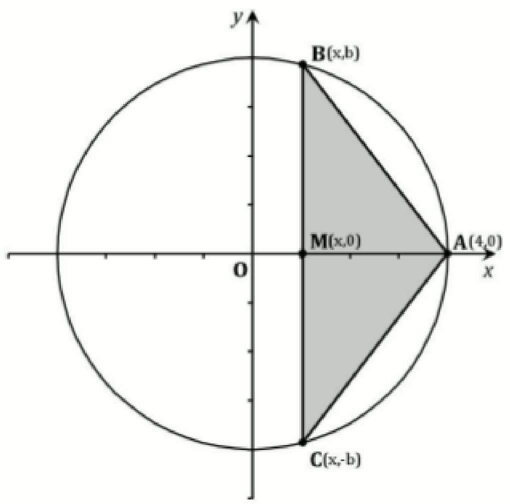
$\int_0^{11} \lfloor\sqrt{x}\rfloor dx = \int_0^1 0dx + \int_1^4 dx + \int_4^9 2dx + \int_9^{11} 3dx = 0 + 3 + 2.5 + 3.2 = 19$	
$\int \sin(\mathrm{px})\cos(\mathrm{qx})\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \sin[(\mathrm{p}+\mathrm{q})\mathrm{x}] + \sin[(\mathrm{p}-\mathrm{q})\mathrm{x}]\,\mathrm{dx} =$	$\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$
$-\frac{\cos[(\mathrm{p}+\mathrm{q})\mathrm{x}]}{2(p+q)} - \frac{\cos[(\mathrm{p}-\mathrm{q})\mathrm{x}]}{2(p-q)} + C$	$p \neq q, p \neq -q$
$p = q$: $\int \sin(\mathrm{px})\cos(\mathrm{px})\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \sin(2\mathrm{px})\,\mathrm{dx} = \frac{-\cos(2\mathrm{px})}{4p} + C$	$\sin 2a = 2\sin a \cos a$
$p = -q$: $\int \sin(\mathrm{px})\cos(-\mathrm{px})\,\mathrm{dx} = \int \sin(\mathrm{px})\cos(\mathrm{px})\,\mathrm{dx} = \frac{-\cos(2\mathrm{px})}{4p} + C$	$\cos(-a) = \cos(a)$

12 décembre 2012. Modifié le 10 décembre 2013 (Dominique Druez)

EXANA353 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2012.

Sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 16$, on considère le point $a(4,0)$ et deux points b et c de même abscisse x. Pour quelles valeurs de x l'aire du triangle abc est-elle maximum?

Solution proposée par Jan Frans Broeckx



Notation

L'abscisse de B, C et M est x, les ordonnées de B et de C sont b et $-b$. La variable libre est x, avec comme condition que $-4 < x < 4$.

Fonction objectif

L'aire du triangle ABC est :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \text{Aire ABC} = 2(\text{Aire ABM}) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{MA}}.\overline{\mathrm{MB}}\right) \\ &= (4-x)b \end{aligned}$$

Contrainte

$$\begin{aligned} \mathrm{B} \in \text{Cercle} &\Leftrightarrow x^2 + b^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow b^2 = 16 - x^2 \\ &\Rightarrow b = \sqrt{16 - x^2} \end{aligned}$$

Optimisation

On obtient la fonction objectif comme fonction de la seule variable x en remplaçant $b = \sqrt{16 - x^2}$ dans l'expression pour l'aire :

$$\mathrm{A}(x) = (4-x)\sqrt{16-x^2}$$

La fonction sera maximale lorsque sa dérivée première s'annule :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}'(x) &= -\sqrt{16-x^2} + (4-x)\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}} \\ &= \frac{-(16-x^2) - x(4-x)}{\sqrt{16-x^2}} \\ &= \frac{2x^2 - 4x - 16}{\sqrt{16-x^2}} \\ &= \frac{2(x-4)(x-2)}{\sqrt{16-x^2}} \end{aligned}$$

$$\mathrm{A}'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} x = 4 & \text{à rejeter} \\ x = -2 & \Rightarrow \; b = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Réponse

L'aire du triangle est maximal si $x = -2$; le triangle est alors un triangle équilatéral de côté $4\sqrt{3}$ et son aire est égal à $12\sqrt{3}$.

Solution proposée par Dominique Druez

$$Aire_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} y(4-x) = y(4-x); contraintes: \begin{cases} x = 4\cos\alpha \\ y = 4\sin\alpha \end{cases}$$

maximiser:

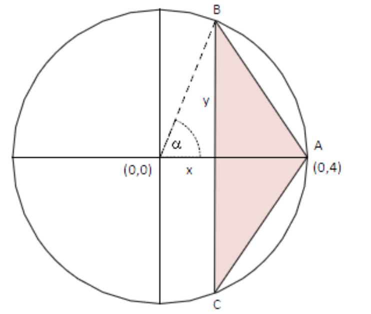
$$4\sin\alpha\,(4 - 4\cos\alpha) = 16\sin\alpha - 16\sin\alpha\cos\alpha = 16\sin\alpha - 8\sin 2\alpha$$

$$(16\sin\alpha - 8\sin 2\alpha)' = 16\cos\alpha - 2\cdot 8\cos 2\alpha = 0$$

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha$$

a) $2\alpha = \alpha + 2k\pi \rightarrow \alpha = 2k\pi \rightarrow \alpha = 0, minimum\ \text{à}\ rejeter$

b) $2\alpha = -\alpha + 2k\pi \rightarrow \alpha = 2k\frac{\pi}{3} \rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = -\frac{1}{2}\cdot 4 = -2$



12 décembre 2012. Modifié le 10 décembre 2013 (Dominique Druez).

EXANA354 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 1.

1. Etudiez la dérivabilité à l'origine de la fonction :

$$f(x) = x|x|$$

2. Calculez le volume du solide obtenu en faisant tourner autour de l'axe des y et délimitée par les courbes $y = x^3$, $y = 8$ et $x = 0$.

3. Démontrez que si f est une fonction continue, alors

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

Utilisez ce résultat pour démontrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

pour tout nombre entier n positif.

4. Etudiez le signe sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction f définie par

$$f(x) = xe^{-x} - e^{-1}$$

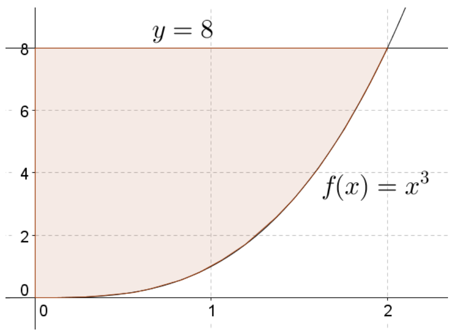
Solution proposée par Nicole Berckmans

1) $f(x) = x|x|$ est une fonction continue.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} |x| = 0$$

Donc f est une fonction dérivable en $(0,0)$

2) Volume : $V = \pi\int_0^8 x^2 dy = \pi\int_0^8 y^{2/3} dy = \pi\left[\frac{y^{5/3}}{5/3}\right]_0^8 = \frac{96\pi}{5}$



3. Posons : $y = a - x \Rightarrow \begin{cases} dy = -dx \\ x = 0 \Rightarrow y = a \\ x = a \Rightarrow y = 0 \end{cases}$

$$\int_0^a f(x)\,dx = -\int_a^0 f(a-y)\,dy = \int_0^a f(a-y)\,dy$$

Et comme y est une simple variable d'intégration, on poser $x = y$

$$\Rightarrow \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\,dx$$

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x}\,dx$$

Or $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

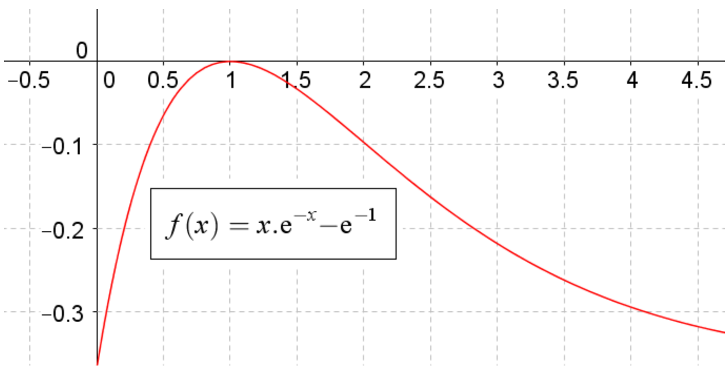
Donc $I = J$ et $I + J = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = J = \frac{\pi}{2}$

4. $f(x) = xe^{-x} - e^{-1}$; $\quad f(0) = -e^{-1}$; $\quad f'(1) = 0$

$f'(x) = e^{-x}(1-x)$

x	0		1	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-1/e$	$\nearrow$	0	$\searrow$

$\Rightarrow \forall \geq 0$, on a $f(x) \leq 0$



9 septembre 2013

EXANA355 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 1.

Soit f la fonction de la variable x définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{2x} - 4e^{x}$$

1. Etudiez les variations de f et tracez sa courbe représentative. On précisera les éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et de décroissance et les extrema éventuels.
2. Résoudre l'équation : $f(x) = -3$
3. Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) > -3$

Solution proposée par Nicole Berckmans

1) $f'(x) = 2\left(e^{2x} - 2e^{x}\right) = 2e^{x}\left(e^{x} - 2\right) \Rightarrow$

x		$\ln 2$	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

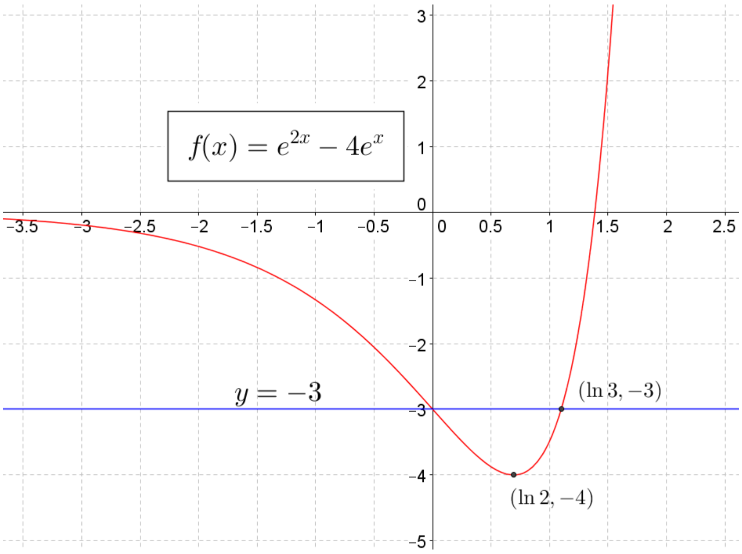
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\left(e^{x} - 4\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$. Il y a donc une AH en $-\infty$, $AH \equiv y = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\infty}{\infty} \xrightarrow{H} \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$

2) $e^{2x} - 4e^{x} = -3$. on pose $z = e^{x} \Rightarrow z^{2} - 4z + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \Rightarrow x = 0 \\ z = 3 \Rightarrow x = \ln 3 \end{cases}$

3) $\{x \mid -3 < f(x)\} = \left]\leftarrow, 0\right[\cup \left]\ln 3, \rightarrow\right[$



---

9 septembre 2013

EXANA356 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 1.

Lucky Luke se promène dans la plaine du Nevada, non loin de la nouvelle ligne de chemin de fer, lorsqu'il aperçoit au loin les frères Dalton à bord du train dont ils viennent de ligoter le conducteur. Lucky Luke s'élance immédiatement en direction de la ligne de chemin de fer pour teter d'arrêter les Dalton.

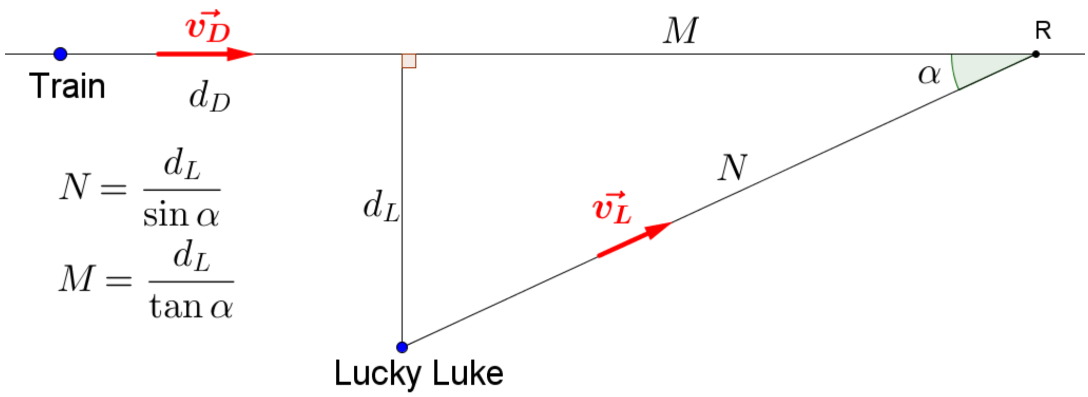
Dans ce problème, on représente Lucky Luke et le train par des points. La ligne de chemin de fer est supposée être une ligne droite, et le sol est supposé parfaitement plan. Afin d'améliorer ses chances d'intercepter le train, Lucky Luke ne se dirige pas dans la direction perpendiculaire à la ligne de chemin de fer, mais sur une ligne droite qui coupe la ligne de chemin de fer avec un certain angle $\alpha \leq 90°$. L'objectif de ce problème est de déterminer la direction optimale pour Lucky Luke en fonction des paramètres suivants :

- la vitesse de déplacement v_D du train suposée constante
- la vitesse de déplacement v_L de Lucky Luke supposée constante.
- la distance initiale d_L de Luky Luke par rapport à la ligne de chemin de fer
- la distance initiale d_D entre le train et la projection orthogonale de Lucky Luke sur la ligne de chemin de fer.

On suppose que le train va plus vite que Luky Luke : $v_D > v_L$

1. Représenter la situation schématiquement.
2. Dérivez l'expression donnant le temps d'avance que Lucky Luke aura sur le train au moment où il atteindra la ligne de chemin de fer (un temps d'avance négatif correspond à un retard).
3. Trouvez l'angle α qui maximise ce temps d'avance.

Solution proposée par Nicole Berckmans



T temps mis par Lucky Luke pour arriver en R : $T = \frac{N}{v_L} = \frac{d_L}{v_L \sin\alpha}$

T^* temps mis par le train pour arriver en R :

$$d_D + M = v_D T^* \Rightarrow T^* = \frac{1}{v_D}\left(d_D + \frac{d_L}{\tan\alpha}\right)$$

Il faut maximaliser $T^* - T$

$$T^* - T = \frac{d_D}{v_D} + d_L\left(\frac{1}{v_D \tan\alpha} - \frac{1}{v_L \sin\alpha}\right)$$

$$\frac{d}{d\alpha}(T^* - T) = ... = \frac{d_L}{\sin^2\alpha}\left(\frac{\cos\alpha}{v_L} - \frac{1}{v_D}\right) = \frac{d_L}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{v_D \cos\alpha - v_L}{v_D . v_L}$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \arccos\left(\frac{v_L}{v_D}\right)$$

α	0		α_0		$90°$
$\frac{d}{d\alpha}(T^* - T)$		$+$	0	$-$	
		$\nearrow$	max	$\searrow$	

-9 septembre 2013

EXANA357 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 2.

1. Calculez une primitive de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$
2. Calculez la limite suivante

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{x^2}$$

3. on définit la région R comme la région comprise entre les courbes $y=x$ et $y=x^2$ pour $x\geq 0$. Cette région R subit une rotation autour de l'axe Ox. Il en résulte un solide dont on demande le volume.
4. Soit f une fonction dérivable sur R telle que pour tout $x\geq 0$, $f(x)\geq x$ et telle que $f(0)=0$. Dérmontrez que $f'(0)\geq 1$.

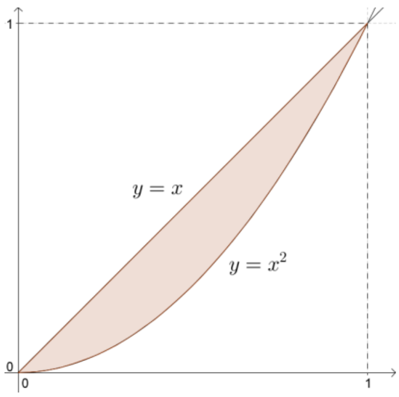
Solution proposée par Nicole Berckmans

1) Soit $u=\ln x \Rightarrow du=\dfrac{dx}{x}$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx=\int \sqrt{u}\,du=\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3/2}=\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x}+k$$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\xrightarrow{H}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{e^{\cos x}}{2}=1.\frac{e}{2}=\frac{e}{2}$

3) $\displaystyle V=V_{cône}-\pi\int_0^1 (x^2)^2\,dx=\frac{1}{3}\pi.1^2.1-\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}=\frac{2\pi}{15}$



4) $\displaystyle f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

Si $x>0$, on dit que $f(x)\geq x$ et donc $\dfrac{f(x)}{x}\geq 1$ (1)

On peut dire que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)}{x}$

Or $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)}{x}$ est supérieure à 1 vu que l'on a (1)

Par conséquent : $f'(0)\geq 0$

---

9 septembre 2013

EXANA358 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 2.

On considère la fonction ϕ définie pour $x \geq 0$ par

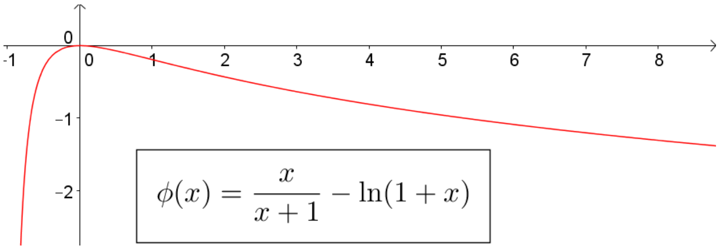
$$\phi(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$$

1. Etudier les variations de ϕ et en déduire que pour tout $x > 0$, $\phi(x) < 0$
2. Soit la fonction f définie par $f(t) = e^{-t}\ln(1+e^t)$. Etudiez à l'aide de la fonction ϕ les variations de f et tracez sa courbe représentative.
   On précisera les éventuelles asymptotes, le domaine de croissance et de décroissance et les extrema éventuels.

Solution proposée par Nicole Berckmans

1) $\dfrac{d\phi}{dx} = \dfrac{-x}{(1+x)^2}$ est strictement négatif pour $x > 0$

x	0	
$\dfrac{d\phi}{dx}$	0	$-$
ϕ	0	$\searrow$



2) $f(t) = e^{-t}\ln(1+e^t)$ Domaine $\mathbb{R}$, $f(0) = \ln 2$

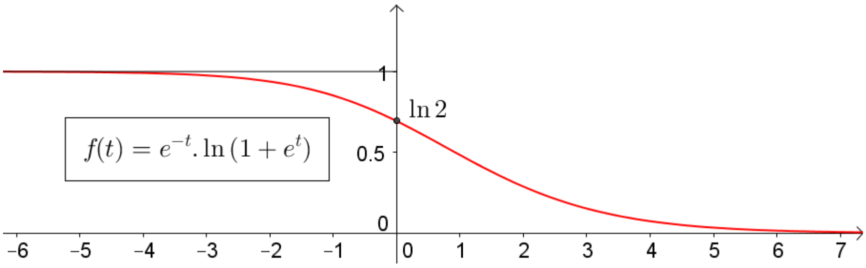
$$AH_{-\infty} \equiv y = 1 \text{ car } \lim_{t\to-\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{\ln(1+e^t)}{e^t} = \left[\frac{0}{0}\right] \xrightarrow{H} \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{1+e^t} = 1$$

$$AH_{+\infty} \equiv y = 0 \text{ car } \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(1+e^t)}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \xrightarrow{H} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+e^t} = 0$$

$$\frac{df}{dt} = \ldots = \frac{1}{e^t+1} - e^{-t}\ln(e^t+1) = e^{-t}\left(\frac{e^t}{e^t+1} - \ln(e^t+1)\right) = e^{-t}\phi(e^t) < 0$$

car $e^{-t} > 0$

t	
$\dfrac{df}{dt}$	$-$
f	$\searrow$



---

9 septembre 2013

EXANA359 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 2.

Une société cherche à établir le prix de son nouveau smartphone UCL-2013 pour le marché belge. Après uen étude de marché, elle a pu obtenir un modèle (que l'on suppose parfaitement précis) du nombre N_v de smartphone UCL-2013 vendus par jour en fonction du prix de vente p choisi. Ce modèle est donné par

$$N_v = f(p) = \frac{A^2}{(K+p)^2}$$

où $A = 4000$ et $K = 150$.

L'ensemble des coûts de la société par jour (liés au marché belge) peuvent être modélisés par une fonction dépendant du nombre N_p d'éléments produits comme

$$g(N_p) = C + B\sqrt{N_p}$$

On suppose que la société produit exactement le nombre de smartphones vendus par jour : $N_p = N_v$.

1. Identifiez les paramètres B et C de la fonction du total des coûts $g(N_p)$ à l'aide de la table ci-dessous donnée pour certaines valeurs de N_p

N_p	$g(N_p)$
100	12000
400	22000
900	32000

2. Ecrivez l'expression du profit journalier de la société $P_r(p)$ en fonction seulement du prix choisi *p*. Le profit calculé comme la différence entre les recettes des ventes et le total des coûts.
3. Calculez la valeur du prix *p* maximisant le profit de la société.

Note 1 : Pour simplifier la résolution, on fait l'hypothèse que les nombres d'éléments vendus et produits $(N_v$ et $N_p)$ peuvent être des nombres réels quelconques pas nécessairement entiers.

Note 2 : Le modèle a été choisi pour les besoins de l'exerci et n'est pas particulièrement réaliste.

Note 3 : On ne tient pas compte d'éventuelles taxes ou coûts supplémentaires que ceux donnés dans l'énoncé.

Solution proposée par Nicole Berckmans

1) $B = 1000,\ \ C = 2000$

2) Profit : $P_r(p) = N_v p - g(N_p) = \dfrac{A^2 p}{(K+p)^2} - C - \dfrac{AB}{K+p}$

$\dfrac{dP_r(p)}{dp} = \ldots = \dfrac{A\left[(A+B)K - (B-A)p\right]}{(K+p)^3}$ qui s'annule en $p_0 = \dfrac{(A+B)K}{A-B}$

Or $A = 4000, K = 150, C = 2000, B = 1000 \Rightarrow p_0 = 250$

p	0		p_0	
$\dfrac{dP_r(p)}{dp}$		$+$	0	$-$
P_r		$\nearrow$	max	$\searrow$

---

9 septembre 2013