Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 39

EXANA390 – EXANA399

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

Octobre 2014

EXANA390 – EPL, UCL, LLN, juillet 2014 série 2.

(1) Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $a<f(a)$ et $f(b)<b$. Démontrer qu'il existe un nombre réel $c\in\,]a,b[$ tel que $f(c)=c$

(2) Calculer la primitive suivante :

$$\int \ln\left(x^2+1\right)dx$$

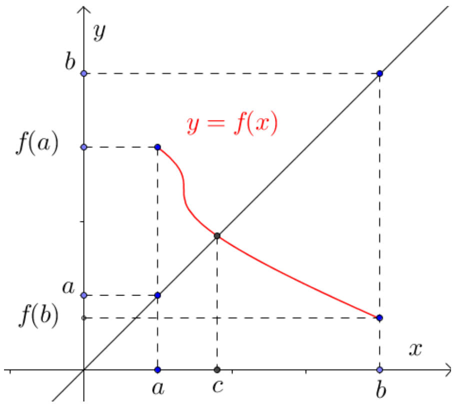
(3) Etudier la limite à l'origine de la fonction

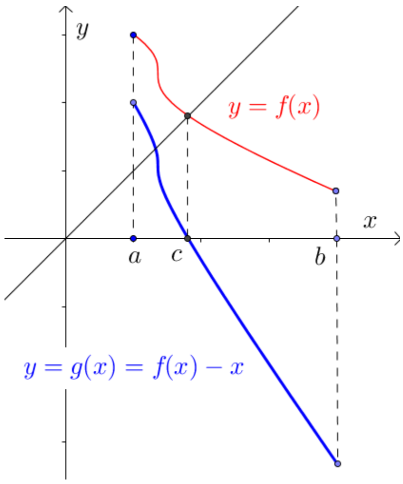
$$f(x)=\frac{\sin^2(x+a)-\sin^2 a}{x^2}$$

pour un paramètre fixe a tel que $\cos a\neq 0$.

(4) La région du premier quadrant délimitée par le graphique de l'équation $x=2y^3-y^4$ et l'axe des y, en tournant autour de l'axe des x, engendre un solide de révolution. Etablir l'intégrale du volume de ce solide (Il n'est pas demandé de calculer cette intégrale).

Solution proposée par Nicole Berckmans





(1) Soit $g:[a,b]\to\mathbb{R}:x\to g(x)=f(x)-x$

g est continue car f l'est. De plus $\begin{cases} g(a)=f(a)-a>0 \\ g(b)=f(b)-b<0 \end{cases}$

En vertu du théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction continue, on peut dire qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $g(c)=0$ c'est-à-dire $f(c)=c$

(2) $I=\int \ln(x^2+1)\,dx$ On choisit : $\begin{cases} f'(x)=1 & \Rightarrow f(x)=x \\ g(x)=\ln(x^2+1) & \Rightarrow g'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1} \end{cases}$

$$\Rightarrow I=x.\ln(x^2+1)-2\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = x.\ln(x^2+1)-2\int \frac{x^2+1}{x^2+1}dx+2\int \frac{1}{x^2+1}dx$$
$$=x.\ln(x^2+1)-2x+2\arctan x+k$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x+a)-\sin^2 a}{x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$

$$\xrightarrow{Hospital}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x+a)\cos(x+a)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x+2a)}{2x}=\left[\frac{\sin 2a}{0}\right]=L$$

- Si $\sin 2a>0$ alors L n'existe pas car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\sin(2x+2a)}{2x}=+\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{\sin(2x+2a)}{2x}=-\infty \end{cases}$
- Si $\sin 2a<0$ alors L n'existe pas, vu un raisonnement analogue.
- Si $\sin 2a=2\sin a\cos a=0$ alors $\sin a=0$ car dans l'énoncé on précise que $\cos a\neq 0$

  Donc $a=k\pi$, $\sin^2(x+k\pi)=\sin^2 x$ et $\sin^2 a=0$

  Dès lors : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-0}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\right)^2=1$

(4) Cette question est HORS MATIERE et a finalement été annulée.

Compléments par Jacques Collot

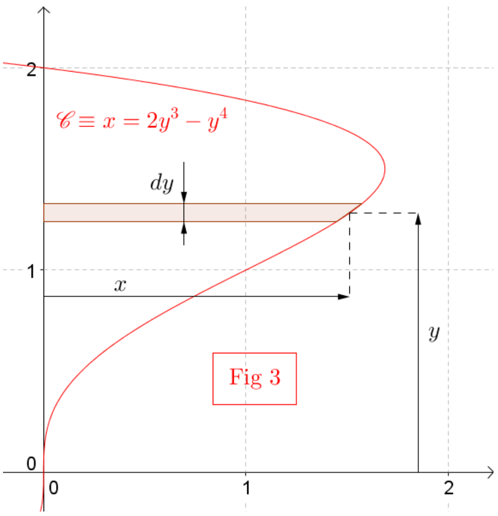


Fig 3

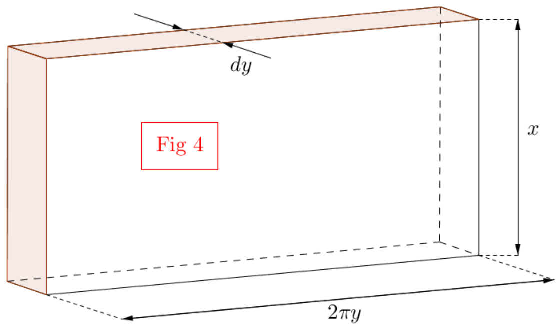


Fig 4

La question (4) est hors matière. Pour ceux que cela pourrait intéresser, voici une méthode qui permet de répondre à la question. Cette méthode ne fait PAS partie de la matière à connaître pour l'examen.

Méthode des tubes

Soit la courbe $\mathscr{C} \equiv x = 2y^3 - y^4$. Cette courbe coupe l'axe des y en $y = 0$ et $y = 2$.
$\mathscr{C}$ est représentée à la Fig 3. Considérons la surface sombre d'épaisseur infiniment petite dy, située à une distance y de l'axe des x et de côtés parallèles à l'axe des x.
Comme dy est infiniment petit, on peut assimiler cette surface à un rectangle de hauteur dy et de longueur x. Si on fait tourner ce rectangle autour de l'axe des x, il va engendrer un volume semblable à un tube. Le volume de ce tube peut être approximé par un parallélépipède rectangle de hauteur x, de longueur $2\pi y$ (longueur de la circonférence) et d'épaisseur dy.(Fig 4)

$$\Rightarrow dV = 2\pi y.x.dy$$

Or $x = 2y^3 - y^4$ $\qquad \Rightarrow dV = 2\pi y\left(2y^3 - y^4\right)dy$

Le volume engendré par la courbe $\mathscr{C}$ peut être considéré comme une somme infinie de tubes :

$$\Rightarrow V = \int_0^2 2\pi y\left(2y^3 - y^4\right)dy = \frac{64\pi}{15}$$

---

25 octobre 2014

EXANA391 – EPL, UCL, LLN, juillet 2014 série 2.

On considère la fonction f définie par

$$f(x)=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}-x$$

(1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$. On précisera le domaine de définition de f, les éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et de décroissance et les extréma éventuels (on n'étudiera pas la concavité ni les points d'inflexion).

(2) En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet un racine unique $\alpha\in\left]3/2,2\right[$.

(3) Démontrer que le point $I(0,1)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

(4) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, la droite d'équation $y=-x+2$, l'axe y et la droite d'équation $x=1$.

Solution proposée par Nicole Berckmans

(1) Dom $f=\mathbb{R}$. f est continue sur son domaine, il n'y a donc pas d'asymptote verticale.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\left[\frac{\infty}{\infty}-\infty\right]=[2-\infty]=-\infty$$

$$\text{car } \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{e^{2x}}\cdot\frac{2}{1+\frac{1}{e^{2x}}}=2$$

En $+\infty$, on a une asymptote oblique d'équation $y=2-x$ car

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(2-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}-2=0$$

En $-\infty$, on a une asymptote oblique d'équation $y=-x$ car

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}=0$$

(2) $f'(x)=\dfrac{-\left(e^{2x}-1\right)^2}{\left(e^{2x}+1\right)^2}\leq 0$ et s'annule pour $x=0\Rightarrow$

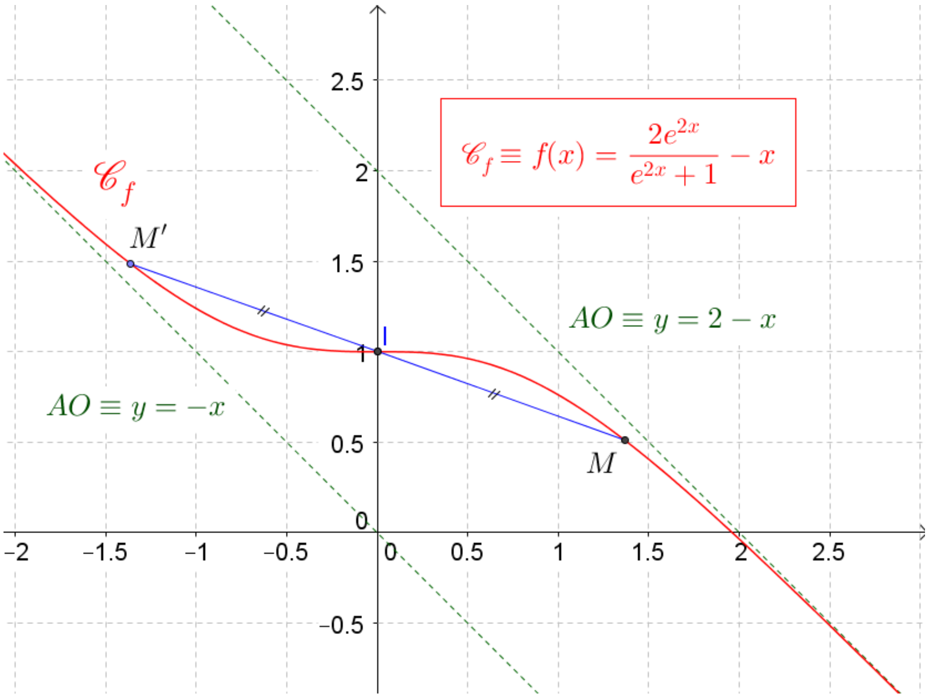
		0	
f'	$-$	0	$-$
f	$\searrow$	1	$\searrow$

Tangente horizontale en $(0,1)$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2e^3}{e^3+1}-\frac{3}{2}=\frac{e^3-3}{2\left(e^3+1\right)}>0 \text{ car } e^3>2^3=8>3$$

$$f(2)=\frac{-2}{e^4+1}<0.$$

En vertu du théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction continue sur $\left[\frac{3}{2},2\right]$ on peut affirmer qu'il existe $\alpha\in\left]\frac{3}{2},2\right[$ tel que $f(\alpha)=0$. Cette racine est unique car sur cet intervalle f est strictement décroissante $(f'<0)$.



(3) $I(0,1)$ est centre de symétrie pour la courbe.

<u>*Démonstration* 1</u> : La fonction $g(x) = f(x) - 1$ est un fonction impaire $(g(-x) = -g(x))$

En effet : $\begin{cases} g(-x) = \dfrac{2e^{-2x}}{e^{-2x}+1} + x - 1 = \dfrac{2}{1+e^{2x}} + x - 1 \\ -g(x) = -f(x) + 1 = \dfrac{-2e^{2x}}{e^{2x}+1} + x + 1 \end{cases}$

On montre assez facilement que $g(-x) = -g(x)$.

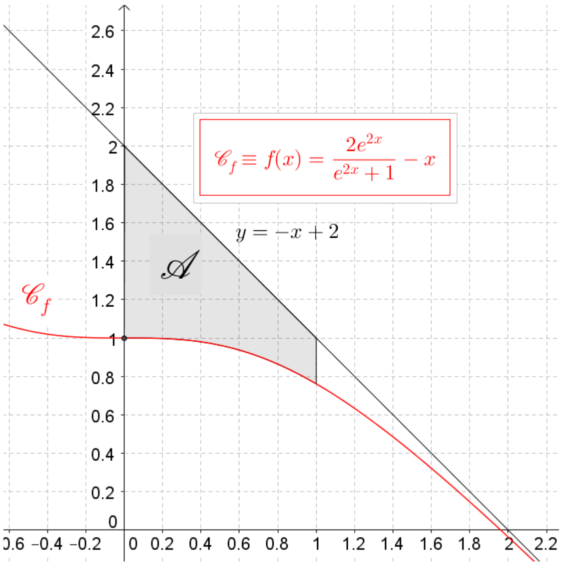
<u>*Démonstration* 2</u> : Soient : $M(x, f(x))$ et $M'(-x, f(-x))$

Si I est centre de symétrie alors : $\vec{M} + \vec{M'} = 2\vec{I}$

$$\begin{cases} \vec{M}\left(x, \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} - x\right) \\ \vec{M'}\left(-x, \dfrac{2e^{-2x}}{e^{-2x}+1} + x\right) \end{cases} \Rightarrow \vec{M} + \vec{M'} = (0,2) = 2\vec{I}$$

car $\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} - x + \dfrac{2e^{-2x}}{e^{-2x}+1} + x = 2\dfrac{e^{2x}(e^{-2x}+1) + e^{-2x}(e^{2x}+1)}{(e^{-2x}+1).(e^{2x}+1)}$

$$= 2\frac{1+e^{2x}+1+e^{-2x}}{1+e^{2x}+e^{-2x}+1} = 2$$



$$(4)\ A = \int_0^1 (-x+2) - \left(\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} - x\right) dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\right) dx = \left[2x - \ln\left(e^{2x}+1\right)\right]_0^1$$

$$= 2 - \ln\left(e^2+1\right) - 0 + \ln 2 = \ln e^2 - \ln\left(e^2+1\right) + \ln 2 = \ln\left(\frac{2e^2}{e^2+1}\right)$$

---

25 octobre 2014

EXANA392 – EPL, UCL, LLN, juillet 2014 série 2.

Les ingénieurs de Louvain-la-Neuve ont mis au point une nouvelle centrale à la kryptonite. Ils ont établi un modèle décrivant la puissance W (en GWatts) que peut fournir la centrale en fonction de la température T (en °C) et de la pression P (en bars) utilisées :

$$W = \frac{e^{-aT}}{P}$$

où $a = \dfrac{1}{200}$ est un paramètre constant.

Pour fonctionner correctement, la centrale doit cependant satisfaire à des contraintes de température et pression minimales :

– La température doit être supérieure à 0°C : $T > 0$

– La pression doit atteindre une valeur minimale dépendant de la température

$$\begin{cases} P \geq \frac{1}{4}\sqrt{204 - T} & \text{pour} \quad 0 < T \leq 200 \\ P \geq \frac{1}{2} & \text{pour} \quad T > 200 \end{cases}$$

L'objectif de ce problème est de déterminer les valeurs de température et pression fournissant la plus grande puissance, dans les limites fixées par les contraintes de fonctionnement de la centrale.

(1) Démontrez que, pour une température fixée $T > 0$, la puissance W est une fonction strictement décroissante de la pression. En déduire la valeur de pression à choisir, en fonction de la température, pour maximiser la puissance.

(2) Réécrire le modèle décrivant la puissance W en fonction seulement de la température T, sous l'hypothèse du choix de pression obtenu au point (1). Aide : Séparer la fonction en 2 parties selon que $0 < T \leq 200$ ou $T > 200$.

(3) Déterminez les valeurs de T et P qui maximisent la puissance W sous les contraintes de fonctionnement.

Solution proposée par Nicole Berckmans

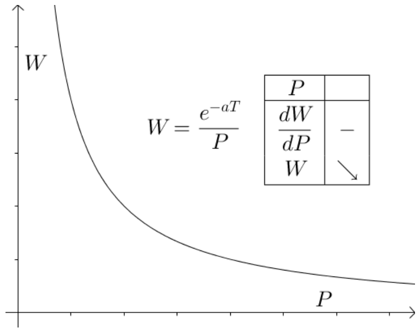
(1) Si $W = \dfrac{e^{-aT}}{P}$ alors $\dfrac{dW}{dP} = \dfrac{-e^{-aT}}{P^2} < 0$

Donc il faut chosir P minimum pour que W soit maximum.

Si $0 < T \leq 200$ alors $P = \dfrac{1}{4}\sqrt{204 - T}$

Si $200 < T$ alors $P = \dfrac{1}{2}$

Rem : si $T = 200$ alors $P = \dfrac{1}{2}$



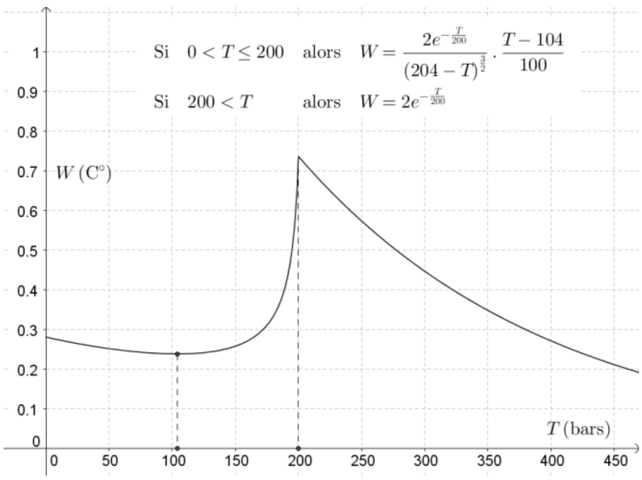
(2) Si $0 < T \le 200$ alors $P = \frac{1}{4}\sqrt{204-T} \Rightarrow W = \frac{4e^{-aT}}{\sqrt{204-T}}$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dT} = \frac{4e^{-aT}}{204-T}\left(-a\sqrt{204-T} + \frac{1}{2\sqrt{204-T}}\right) = \frac{2e^{-aT}}{(204-T)^{\frac{3}{2}}}\left[-2a(204-T)+1\right]$$

$$= \frac{2e^{-aT}}{(204-T)^{\frac{3}{2}}}(2aT - 2a.204 + 1) = \frac{2e^{-\frac{T}{200}}}{(204-T)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{T-104}{100}$$

T	0		104		200
$\frac{dW}{dT}$		$-$	0	$+$	
W		$\searrow$		$\nearrow$	

Si $200 < T \Rightarrow W(T) = 2e^{-aT}$ et $\frac{dW}{dT} = -2ae^{-aT}$. W est une fonction décroissante.



(3)

T	0		104		200	
$W(T)$		$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

$W(0) = \frac{2}{\sqrt{51}} \simeq 0.28,\ W(104) = \frac{0.4}{\sqrt{e}} \simeq 0.24,\ W(200) = \frac{2}{e} \simeq 0.74$

Donc W est maximum pour $T = 200°$ et $P = 1/2$ bars

EXANA393 – EPL, UCL, LLN, septembre 2014.

(1) Soit 2 fonctions f et g à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$, telles que $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x)=1$.

Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$

(2) Calculer les deux intégrales suivantes :

$$(a)\ \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$$

$$(b)\ \int_{-1}^{2} \frac{1}{e^x+1}\,dx$$

(3) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :

$$f(x)=0,\ f(x)=-1,\ f(x)=2.$$

Justifier.

Solution proposée par Louis François

(1) Le produit de 2 réels positifs, inférieurs à 1 est plus petit que chacun de ses facteurs.

Donc pour tout x : $f(x).g(x) \leq f(x) \leq 1$ et $f(x).g(x) \leq g(x) \leq 1$.

Or $\lim_{x\to+\infty} f(x).g(x) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} 1 = 1$.

Donc en vertu du théorème du sandwich : $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1 \end{cases}$

(2) (a) $\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{x^4+1}dx = 0$ car $\frac{x^3}{x^4+1}$ est impaire sur $[-1,1]$

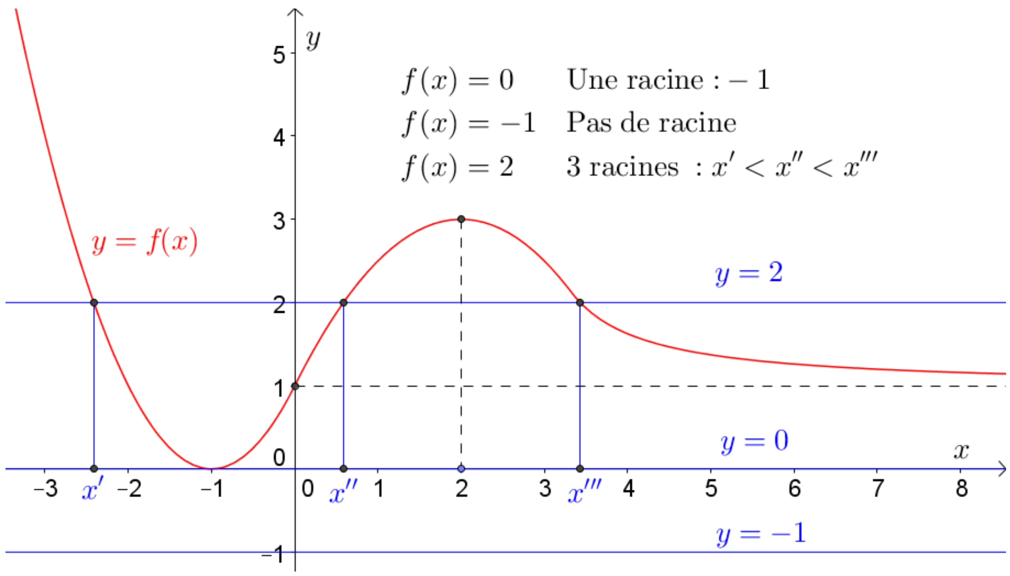
Rem : $\int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4}\ln(x^4+1)+k$

(b) $\int_{-1}^{2} \frac{1}{e^x+1}\,dx.$ Soit $e^x = t \Rightarrow \begin{cases} x = \ln t \\ dx = \frac{dt}{t} \\ x = 2 \Rightarrow t = e^2 \\ x = -1 \Rightarrow t = e^{-1} \end{cases}$

L'intégrale devient :

$$\int_{e^{-1}}^{e^2} \frac{dt}{t(t+1)} = \int_{e^{-1}}^{e^2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dx = \left[\ln t - \ln(t+1)\right]_{e^{-1}}^{e^2}$$

$$= 2 - \ln(e^2+1) - (-1) + \ln\left(\frac{1}{e}+1\right) = 2 + \ln\left(\frac{e+1}{e^2+1}\right)$$



EXANA394 – EPL, UCL, LLN, septembre 2014.

On considère la fonction f définie par

$$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$$

(1) Etudier les variation de f et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$. On précisera le domaine de définition de f, les éventuelles asymptotes, les domaines de corissance et de décroissance et les extrema éventuels (on n'étudiera pas la concavité ni les points d'inflexion).

(2) Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=e$ et $x=\lambda$, avec $e<\lambda<e^{\sqrt{2}}$

(3) En déduire $\lim\limits_{\substack{\lambda\to e^{\sqrt{e}}\\ \lambda<e^{\sqrt{e}}}}\mathscr{A}(\lambda)$

Solution proposée par Louis François

(1) $\text{Dom} f:\begin{cases}\ln x\Rightarrow x>0\\ 2-\ln^2 x>0\Rightarrow -\sqrt{2}<\ln x<\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow e^{-\sqrt{2}}<x<e^{\sqrt{2}}$

f est continue sur $\left]e^{-\sqrt{2}},e^{\sqrt{2}}\right[$

$$\lim_{x\to e^{-\sqrt{2}}} f=\left[\frac{1}{0}\right]=+\infty\Rightarrow AV\equiv x=e^{-\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to e^{\sqrt{2}}} f=\left[\frac{1}{0}\right]=+\infty\Rightarrow AV\equiv x=e^{\sqrt{2}}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{\left(x\sqrt{2-\ln^2 x}\right)^2}.\left(\sqrt{2-\ln^2 x}+x.\frac{1}{2\sqrt{2-\ln^2 x}}.\left(-2\ln x.\frac{1}{x}\right)\right)$$

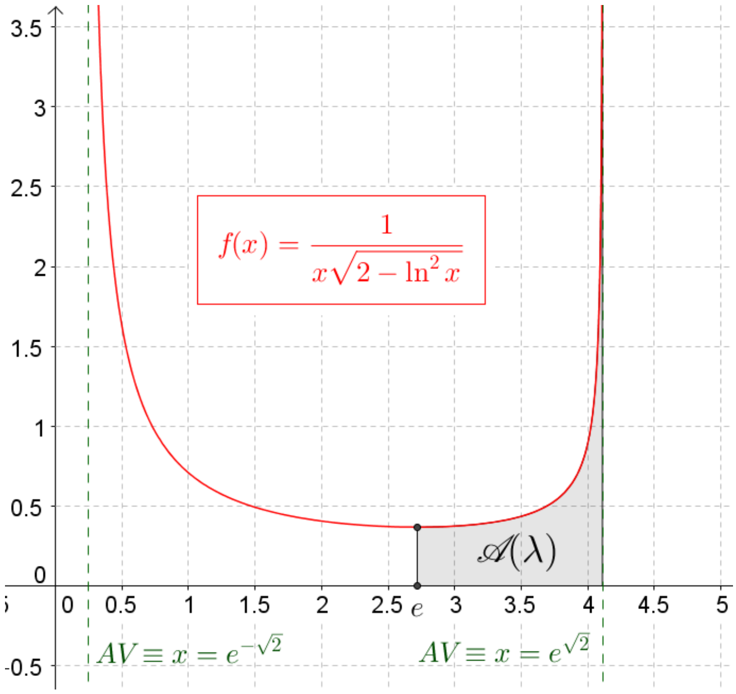
$$=\dots=\frac{\ln^2 x+\ln x-2}{x^2\left(2-\ln^2 x\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$\ln^2 x+\ln x-2=0$ a pour racines $\begin{cases}\ln x=1\Rightarrow x=e\\ \ln x=-2\Rightarrow x=e^{-2}\end{cases}$

Le signe de f' est le signe de $\ln^2 x+\ln x-2=0$ sur le domaine mais e^{-2} est hors domaine car $-2<-\sqrt{2}$.

x	$e^{-\sqrt{2}}$		e		$e^{\sqrt{2}}$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

avec $\min:\left(e,\frac{1}{e}\right)$



(2) $\mathscr{A}(\lambda) = \int_e^{\ln\lambda} \dfrac{\frac{1}{x}}{\sqrt{2-\ln^2 x}}\,dx$ On pose : $\ln x = t \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{x} = dt \\ x = e \Rightarrow t = 1 \\ x = \lambda \Rightarrow t = \ln\lambda \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathscr{A}(\lambda) = \int_1^{\ln\lambda} \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}} = \int_1^{\ln\lambda} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}dt}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \left[\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_1^{\ln\lambda} = \arcsin\frac{\ln\lambda}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}$$

(3) $\lim\limits_{x\to e^{\sqrt{2}}} \mathscr{A}(\lambda) = \arcsin 1 - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$

---

25 octobre 2014

EXANA395 – EPL, UCL, LLN, septembre 2014.

Roger va rejoindre sa petite amie Mirka qui habite dans la vallée voisine. Le trajet jusqu'au point de rendez-vous est constitué de 10 km de montée régulière à 10% suivis de 10 km de descente régulière à 10%. Roger démarre à 11h40 et voudrait arriver précisément à midi, l'heure de rendez-vous. La consommation de sa voiture peut être calculée par la formule suivante :

$$C = \sqrt{v}\left(1+\frac{p}{100}\right)^3 \qquad , \qquad [\mathrm{l}/100\ \mathrm{km}]$$

pour une vitesse v $[\mathrm{km/h}]$ supposée constante sur une pente p (exprimée en pourcents) supposée constante. Roger roule à vitess constante v_1 sur le premier tronçon du trajet, et une vitesse v_2 sur le second. L'objectif de cette question est de déterminer le choix optimal de ces vitesses pour minimiser la consommation tout en arrivant exactement à l'heure.

(1) Exprimez la consommation totale en fonction des vitesses v_1 et v_2.

(2) Exprimez le lien entre v_1 et $v_2$nécessaire pour assurer l'heure d'arrivée exacte.

(3) Substituez v_2 en fonction de v_1 dans l'expression de la consommation pour obtenir uen expression dépendant de v_1 seulement.

(4) Déterminez les valeurs optimales de v_1 et v_2 minimisant la consommation.

Solution proposée par Louis François

(1) $C(v_1,v_2)=\sqrt{v_1}(1.1)^3+\sqrt{v_2}(0.9)^3$

(2) $e=v.t;\qquad t_1+t_2=20'\qquad$ (Unités : km, heure) $\Rightarrow \boxed{\frac{10}{v_1}+\frac{10}{v_2}=\frac{1}{3}}$

(3) $\frac{10}{v_2}=\frac{1}{3}-\frac{10}{v_1}=\frac{v_1-30}{3v_1}\Rightarrow v_2=\frac{30v_1}{v_1-30}\Rightarrow \boxed{C(v_1)=\sqrt{v_1}(1.1)^3+\sqrt{\frac{30v_1}{v_1-30}}(0.9)^3}$

(4) $\begin{cases} v_1\geq 0 \\ v_2=\dfrac{30v_1}{v_1-30}\geq 0 \end{cases}\Rightarrow v_1>30$

(5) $\frac{dC}{dv_1}=\frac{1}{2\sqrt{v_1}}(1.1)^3+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v_1-30}{30v_1}}\frac{30(v_1-30)-30v_1}{(v_1-30)^2}(0.9)^3$

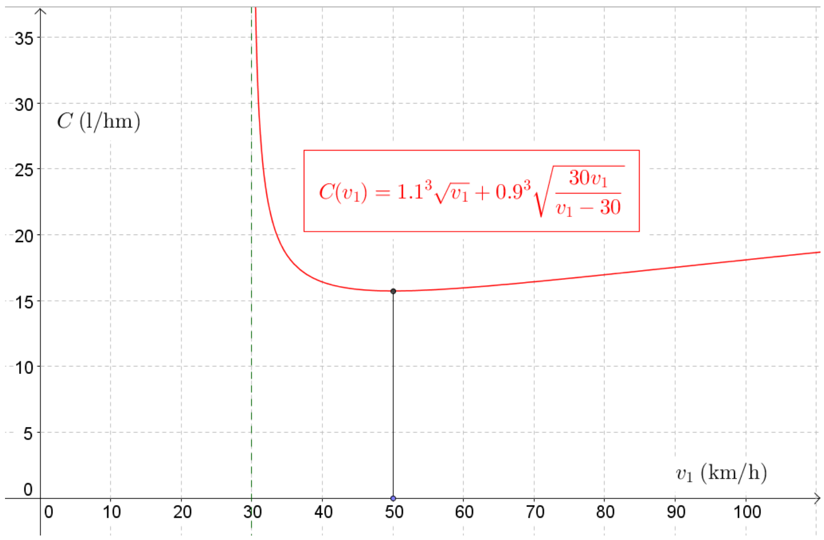
$=\frac{1}{2\sqrt{v_1}}\left[(1.1)^3+\sqrt{\frac{v_1-30}{30v_1}}\frac{(-900)}{(v_1-30)^2}(0.9)^3\right]=\frac{1}{2\sqrt{v_1}}\left[(1.1)^3-\sqrt{\frac{(v_1-30).30^4}{30(v_1-30)^4}}(0.9)^3\right]$

$=\frac{1}{2\sqrt{v_1}}\left[(1.1)^3-\left((0.9)\sqrt{\frac{30}{v_1-30}}\right)^3\right]$

$\frac{dC}{dv_1}=0\Rightarrow\frac{11}{9}=\sqrt{\frac{30}{v_1-30}}\Rightarrow\frac{30}{v_1-30}=\frac{121}{81}\simeq\frac{3}{2}\Rightarrow v_1-30\simeq\frac{60}{3}$

$\Rightarrow \boxed{v_1\simeq 50\text{ km/h}}\Rightarrow\boxed{v_2\simeq\frac{30\times 50}{20}=7.5\text{ km/h}}$

v_1	30		50	
dC/dv_1	$-\infty$	$-$	0	$+$
C		$\searrow$	min	$\nearrow$



25 octobre 2014

EXANA396 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2014.

Rechercher l'ensemble des fonctions $f(x)$, définies et dérivables sur $\left]0;+\infty\right[$, vérifiant les deux conditions suivantes :

1. pour tout réel x strictement positif,

$$x.f'(x)-f(x)=x^2e^{2x},$$

2. pour tout nombre réel strictement positif,

$$g(x)=\frac{f(x)}{x},$$

si $g(x)$ est une fonction définie sur le même intervalle.

On a donc à partir de la deuxième condition :

$$x.g(x)=f(x)\Rightarrow g(x)+x.g'(x)=f(x)$$

On remplace dans la première condition :

$$x\left[g(x)+x.g'(x)\right]-x.g(x)=x^2e^{2x}$$

$$\Rightarrow x^2.g'(x)=x^2e^{2x}$$

$$\Rightarrow g'(x)=e^{2x}$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \qquad \text{avec } C\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=C.x+\frac{1}{2}xe^{2x} \quad x\in\left]0;+\infty\right[}$$

On vérifie facilement que :

$$x.\left(C.x+\frac{1}{2}xe^{2x}\right)'-\left(C.x+\frac{1}{2}xe^{2x}\right)=x^2e^{2x}$$

---

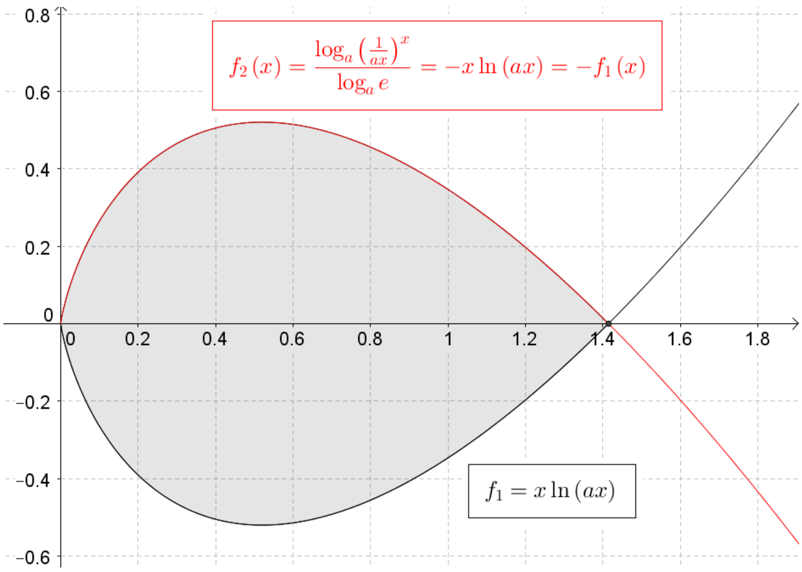
12 novembre 2014

EXANA397- EPL, UCL, LLN, juillet 2014 série 1.

Soient $f_1 = x\ln(ax)$ et $f_2 = \dfrac{\log_a\left(\dfrac{1}{ax}\right)^x}{\log_a e}$ avec $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$

1. Représenter graphiquement ces deux fonctions.
2. Que doit valoir le paramètre a afin que la surface déterminée par le contour résultant de l'intersection des courbes $f_1(x)$ et $f_2(x)$ soit égale à 1?

Solution proposée par Fabienne Zoetard



Transformons d'abord f_2

$$f_2(x)=\frac{\log_a\left(\frac{1}{ax}\right)^x}{\log_a e}=\frac{-x\log_a(ax)}{\log_a e}=-x.\frac{\frac{\ln(ax)}{\ln a}}{\frac{\ln e}{\ln a}}=-x\ln(ax)=-f_1(x)$$

f_1 et f_2 sont donc symétriques par rapport à l'axe des x. Elles se coupent sur l'axe des x.

Calculons les racines de f_1 : $x\ln(ax)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 & \text{A rejeter car hors domaine.}\\ \ln(ax)=0\Rightarrow ax=1\Rightarrow x=\dfrac{1}{a}\end{cases}$

La surface S cherchée sera donc égale à $S=-2\int_0^{1/a}x\ln(ax).dx$

Calculons d'abord $I=\int x\ln(ax)dx.$

$$\begin{array}{lll} u=\ln(ax) & \Rightarrow & u'=\dfrac{1}{x}\\ v'=x & \Rightarrow & v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\Rightarrow I=\frac{x^2}{2}\ln(ax)-\int\frac{1}{x}.\frac{x^2}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln(ax)-\frac{x^2}{4}+C$$

Pour calculer S, notons d'abord que $\ln(ax)$ n'est pas défini en $x=0$.

Calculons donc $S=-2\left(\lim\limits_{\substack{b\to 0\\ >}}\left[\dfrac{x^2}{2}\ln(ax)\right]_b^{1/a}-\left[\dfrac{x^2}{4}\right]_0^{1/a}\right)=-2\left(\underbrace{\dfrac{1}{2a^2}\ln 1}_{=0}-\lim\limits_{\substack{b\to 0\\ >}}\left(\dfrac{b^2}{2}\ln(ab)\right)-\dfrac{1}{4a^2}\right)$

La limite vaut $\lim\limits_{\substack{b\to 0\\ >}}\left(\dfrac{b^2}{2}\ln(ab)\right)=\lim\limits_{\substack{b\to 0\\ >}}\left(\dfrac{\ln(ab)}{\frac{2}{b^2}}\right)\xrightarrow{\text{Hospital}}\lim\limits_{\substack{b\to 0\\ >}}\left(\dfrac{\frac{1}{ab}.a}{-\frac{4}{b^3}}\right)=\lim\limits_{\substack{b\to 0\\ >}}\left(-b^2\right)=0$

Par conséquent : $S=\dfrac{1}{2a^2}$. Nous devons avoir $S=1\Rightarrow\dfrac{1}{2a^2}=1\Rightarrow\boxed{a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

13 novembre 2014

EXANA398 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2014.

La fonction *th*, appelée tangente hyperbolique, est définie par

$$th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Déterminer le domaine de définition de la fonction *th*, ses éventuelles asymptotes ainsi que les éventuels extrema et points d'inflexion de son graphe. Sur base des résultats obtenus, esquisser le graphe de $th(x)$.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Eric J.M. DELHEZ et Prof. Vincent DENOEL. http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/attachment/pdf/2014-08/admissionanalyse_ju14.pdf

Soit la fonction à étudier

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

i. La fonction exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_0^+$, le dénominateur ne s'annule pour aucune valeur de $x \in \mathbb{R}$ et le domaine de définition de th est également $\mathbb{R}$.

ii.
- Il n'y a pas d'asymptote verticale car la fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- D'une part, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = 1^-$$

  La fonction présente donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ pour $x \to +\infty$. Celle-ci est approchée par valeurs inférieures.
  D'autre part, on calcule

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} = -1^+$$

  La fonction présente donc une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ pour $x \to -\infty$. Celle-ci est approchée par valeurs supérieures.
- Il n'y a pas d'asymptote oblique puisqu'il y a déjà des asymptotes horizontales pour $x \to \pm\infty$.

iii. Pour rechercher les éventuels extrema, on calcule

$$\begin{aligned} \mathrm{th}'(x) &= \frac{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})-(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2} > 0 \end{aligned}$$

La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et ne présente pas d'extremum.

iv. Une nouvelle dérivation conduit à

$$\mathrm{th}''(x) = -8\,\frac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^3}$$

dont le seul zéro vérifie $\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{-x}$ et est donc $x=0$.

x		0	
$\mathrm{th}''(x)$	$+$	0	$-$
$\mathrm{th}(x)$	$\smile$	P.I.	$\frown$

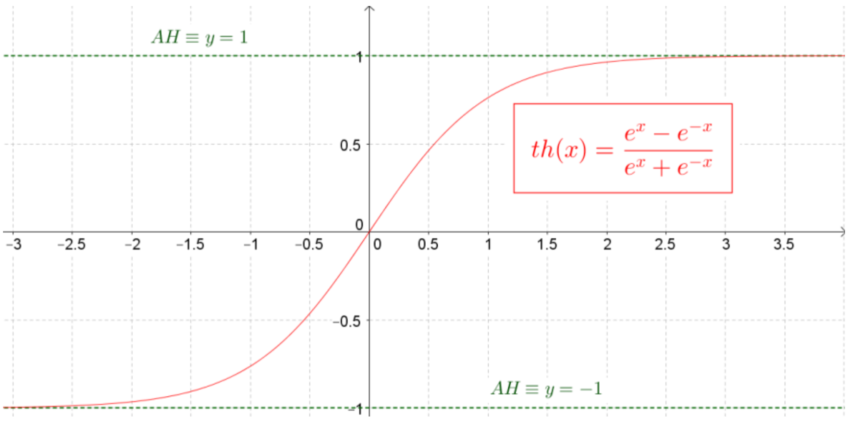
La dérivée seconde s'annulant et changeant de signe en $x=0$, le graphe présente un point d'inflexion en ce point où $\mathrm{th}(0)=0$. Le graphe de f tourne sa concavité vers le haut à gauche de $x=0$ et vers le bas à droite de $x=0$.

v. Rassemblant les informations obtenues ci-dessus, on peut représenter le graphe de la fonction th.

Pour ce faire, on notera que

$$\mathrm{th}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x} = -\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = -\mathrm{th}(x)$$

de sorte que la fonction est impaire et que son graphe présente donc une symétrie centrale par rapport à l'origine.



20 novembre 2014

EXANA399 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2014.

On considère les intégrales

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx, \qquad n \in \mathbb{N}$$

(a) Calculer I_0, I_1, I_2 et I_3.

(b) Montrer que

$$I_n = f(n) - I_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

où $f(n)$ est une fonction de n à déterminer.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Eric J.M. DELHEZ et Prof. Vincent DENOEL. http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/attachment/pdf/2014-08/admissionanalyse_ju14.pdf

i. On calcule successivement

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \left[x - \operatorname{arctg} x\right]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Afin de calculer I_4, on remarque d'abord que l'intégrand peut être transformé par division polynomiale selon

$$\frac{x^4}{1+x^2} = \frac{x^2(1+x^2)-x^2}{1+x^2} = x^2 - \frac{x^2}{1+x^2}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{1+x^2}\right)dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - I_2 = \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ii. Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$$

Pour tout $n \geq 2$, l'intégrand peut être transformé selon

$$\frac{x^n}{1+x^2} = \frac{x^{n-2}(1+x^2)-x^{n-2}}{1+x^2} = x^{n-2} - \frac{x^{n-2}}{1+x^2}$$

Dès lors

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \left(x^{n-2} - \frac{x^{n-2}}{1+x^2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^{n-1}}{n-1} \right]_0^1 - I_{n-2} = \frac{1}{n-1} - I_{n-2} \end{aligned}$$

Ceci correspond bien à la formule annoncée

$$I_n = f(n) - I_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

avec

$$f(n) = \frac{1}{n-1}$$

Remarquons que les réponses obtenues plus haut sont bien compatibles avec la formule générale établie. On a en effet

$$I_2 = 1 - I_0 \qquad \text{et} \qquad I_4 = \frac{1}{3} - I_2$$

20 novembre 2014