**Exercices résolus de mathématiques.**

# Analyse

# ANA 4

**EXANA040 – EXANA049**

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

1 avril 03

## EXANA040 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Étudier et représenter la fonction suivante (calculer la dérivée seconde).

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+\sin x}$$

A partir du graphique obtenu, on demande de déduire le nombre de solutions, entre 0 et $\pi$, de l'équation

$$\frac{\sin x}{1+\sin x}=\cos x$$

La fonction est définie sauf si $\sin x=-1 \rightarrow x\neq\frac{3\pi}{2}+2k\pi.$

La fonction est périodique de période $2\pi$, on ne l'étudiera donc que sur un intervalle de longueur $2\pi$, par exemple $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$

La fonction n'a pas d'asymptote horizontale, ni oblique. Elle n'est ni paire ni impaire.

Asymptotes verticales=

$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}\frac{\sin x}{1+\sin x}=-\infty \quad et \quad \lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}^+}\frac{\sin x}{1+\sin x}=-\infty$

Quelques valeurs: $f(0)=0; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}, \quad f(\pi)=0$

Dérivée première : $f'(x)=\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} \qquad f'(x)=0$ si $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

(En $x=\frac{3\pi}{2}$, $f'(x)$ n'est pas définie).

Le signe de la dérivée première est le signe de $\cos x$

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ | | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | / | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | / |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

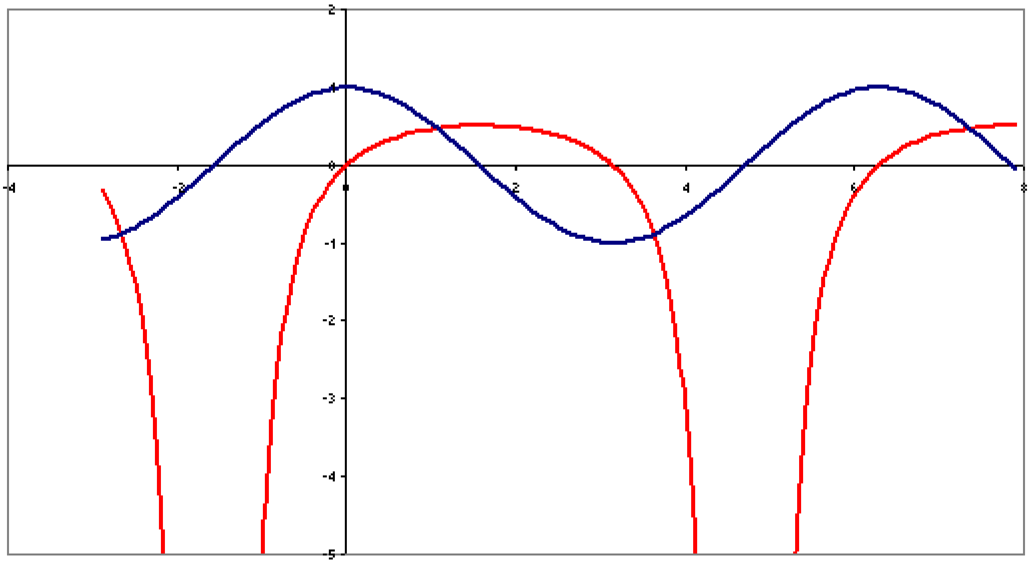
$f(x)$ est donc maximale en $x = \frac{\pi}{2}$.

Dérivée seconde :

$$f''(x) = \frac{-\sin x(1+\sin x)^2 - 2\cos^2 x(1+\sin x)}{(1+\sin x)^4}$$

$$= \frac{\sin x - 2}{(1+\sin x)^2}$$

$f''$ est toujours négative et donc la concavité de la courbe est toujours dirigée vers le bas (ce qui confirme le maximum en $x = \frac{\pi}{2}$)



Le graphe de la fonction est donné en rouge.

On superpose en bleu la fonction $\cos x$.

Les abscisses des points d'intersection sont les solutions de l'équation;

il y en a deux dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

Une solution entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et l'autre entre $\pi$ et $\frac{3\pi}{2}$

## EXANA041 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Étudier et représenter la fonction.

$$f(x) = x + \ln\left(\left|1 - e^x\right|\right)$$

Faites en une représentation soignée.

La fonction est définie à condition que $e^x \neq 1,$ donc partout sauf en $x = 0.$

On a $f(x) = \begin{cases} x + \ln\left(1 - e^x\right) & \text{si} \quad x < 0 \\ x + \ln\left(e^x - 1\right) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

La fonction n'est ni paire, ni impaire, ni périodique.

Asymptote verticale en $x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ pour $x > 0$ et $x < 0$

Pas d'asymptote horizontale:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Asymptotes obliques:

1) soit x $\to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \ln\left|1 - e^x\right|}{x} = 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 - e^x\right)}{x}$$

Appliquons l'Hospital :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 - e^x\right)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x - 1}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x\left(1 - e^{-x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - e^{-x}} = 1$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2 = m$ (où $m$ est le coefficient angulaire de la droite)

L'ordonnée à l'origine est :

$$p = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - 2x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x + \ln\left(e^x - 1\right)\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln e^{-x} + \ln\left(e^x - 1\right)\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln\left(e^{-x}\left(e^x - 1\right)\right) = \ln\left[\lim_{x \to +\infty} \left(1 - e^{-x}\right)\right] = 0$$

$\to \quad \boxed{x \to +\infty \quad \to \quad y = 2x}$

2) soit $x \to -\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\ln(1-e^x)}{x} = 1$$

$$p = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x)-x\right) = \lim_{x\to-\infty} \ln(1-e^x) = 0$$

$\to$ $\boxed{x \to -\infty \quad \to \quad y = x}$

Calcul de la dérivée première.

1) $x > 0$

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x-1} = \frac{2e^x-1}{e^x-1}$$ Toujours positif

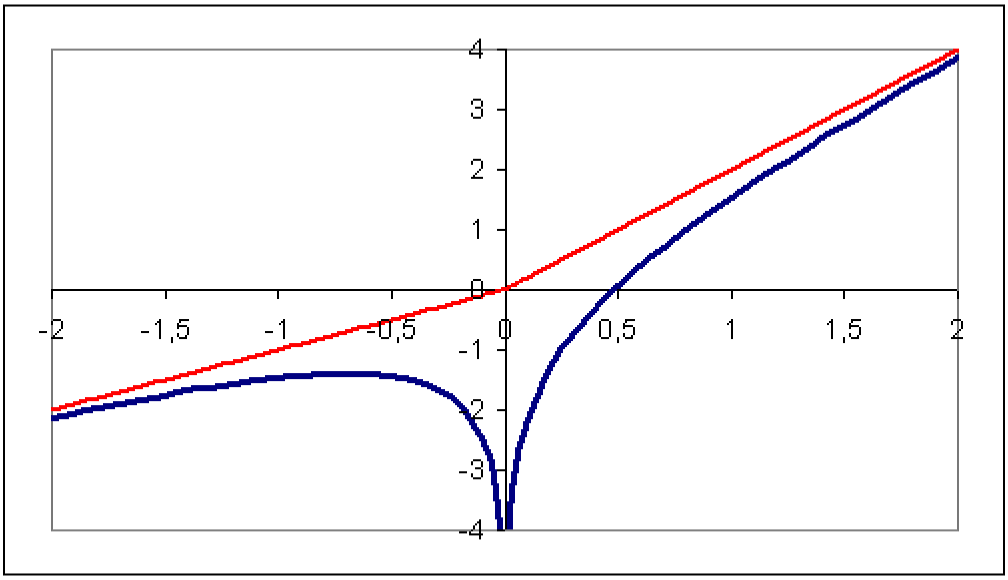
2) $x < 0$

$$f'(x) = \frac{1-2e^x}{1-e^x}$$ Le dénominateur est nul si $x = -\ln 2$

Tableau de signes

| | $-\infty$ | | $-\ln 2$ | | | 0 | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | − | | / | | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-2\ln 2$ | ↘ | $-\infty$ | / | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

$f(x)$ a donc un maximum en $x = -\ln 2$, avec $f(x) = -2\ln 2$



## EXANA042 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Soit une fonction du type

$$y = ax^2 + b \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Déterminer a et b pour que cette fonction s'annule en ±4 et que l'aire située sous son graphe et au-dessus de l'axe des x vaille 64/3.
On considère ensuite les tangentes au graphe de cette fonction passant par le point (0,5).
On demande de calculer le volume obtenu par rotation autour de l'axe des x de la figure fermée délimitée par la fonction et les deux tangentes.

Les racines de $y = ax^2 + b$ sont $+4$ et $-4$. Donc $16a + b = 0 \quad (1)$

L'aire située sous le graphe et l'axe des x est finie $\left(= \dfrac{64}{3}\right)$. On déduit que la parabole

d'équation $y = ax^2 + b$ a sa concavité tournée vers le bas $(a < 0)$ et

$$\frac{64}{3} = \int_{-4}^{4} \left(ax^2 + b\right) dx = 2\int_0^4 \left(ax^2 + b\right) dx = 2\left[\frac{ax^3}{3} + bx\right]_0^4 = 2\left(\frac{64a}{3} + 4b\right)$$

$\rightarrow\ 16a + 3b = 8 \quad (2)$

de $(1)$ et $(2)$, $\rightarrow\ b = 4$ et $a = -\dfrac{1}{4}$. La fonction est donc $y = -\dfrac{x^2}{4} + 4$

Les équations des tangentes à la parabole passant par $(0,5)$ sont de la forme $y = \alpha x + \beta$

Elles passent par $(0,5)\ \rightarrow\ \beta = 5$.

On cherche alors $\alpha$ tel que la droite d'équation $y = \alpha x + 5$ coupe la parabole $y = -\dfrac{x^2}{4} + 4$

en un seul point. L'abscisse du point d'intersection vérifie :

$$\alpha x + 5 = -\frac{x^2}{4} + 4 \quad \rightarrow \quad x^2 + 4\alpha x + 4 = 0$$

$\alpha$ doit être tel que cette équation ait une seule solution, donc $\Delta = 16\left(\alpha^2 - 1\right) = 0$.

$\rightarrow\ \alpha = \pm 1$ et les deux tangentes ont pour équations $y = \pm x + 5$.

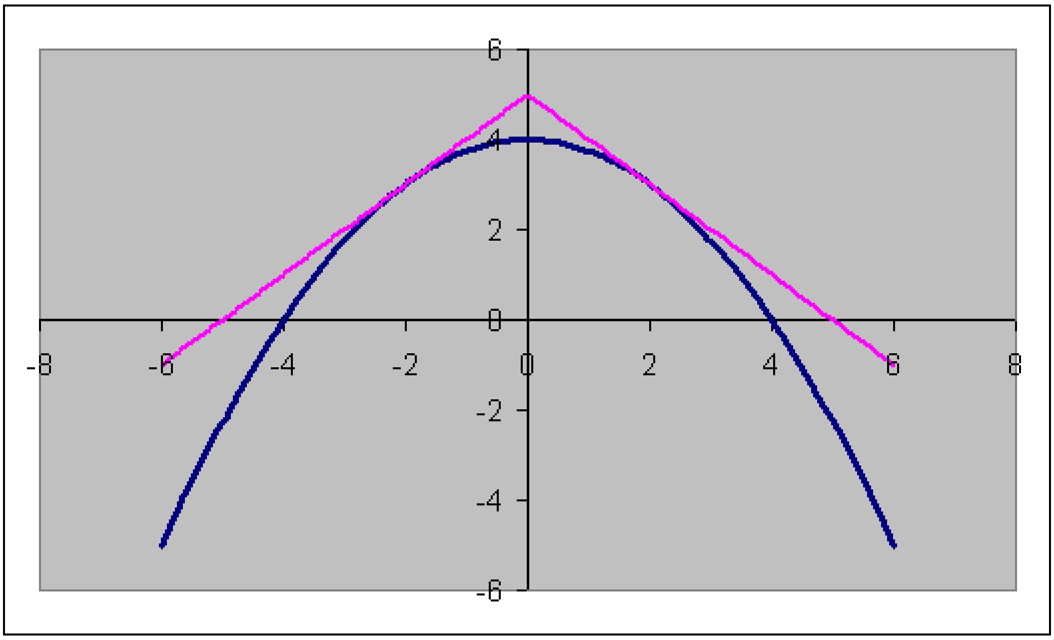
Les points de tangences sont $(-2, 3)$ et $(2, 3)$

A cause de la symétrie par rapport à l'axe des $y$, le volume recherché vaut :

$$V = 2\left[\int_0^2 \pi(-x+5)^2\,dx - \int_0^2 \pi\left(-\frac{x^2}{4}+4\right)^2 dx\right]$$

$$= 2\pi\left[\int_0^2 \left(x^2 - 10x + 25 - \frac{x^4}{16} + 2x^2 - 16\right)dx\right]$$

$$= 2\pi\left[-\frac{x^5}{80} + x^3 - 5x^2 + 9x\right]_0^2 = \frac{56\pi}{5}$$




---

Modifié le 28 juillet 2006 (Benoît Baudelet)

## EXANA043 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Soit la fonction

$$f(x) = 4x\, e^{-\frac{1}{2}x}$$

a) Étudier la fonction f(x) et représentez-la.
b) Calculer le volume V(λ) engendré par rotation de l'axe x de la figure comprise entre la courbe représentative de f(x), l'axe des x et les droites x = 0 et x = λ (avec λ, un paramètre réel)
c) Calculer

$$\lim_{\lambda \to +\infty} V(\lambda)$$

*a*) <u>Etude de la fonction</u> $f(x) = 4x\, e^{-\frac{1}{2}x}$

Domaine de définition : $\Re$

Asymptote horizontale :

$$\lim_{x \to +\infty} 4x\, e^{-\frac{1}{2}x} = \infty.0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{e^{\frac{1}{2}x}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{Hospital} \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x}} = 0$$

Donc, la fonction est asymptotique à l'axe des $x$ pour $x \to +\infty$

On a aussi : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Dérivée première : $y' = e^{-\frac{1}{2}x}(4 - 2x)$

$y' = 0$ pour $x = 2$ (C'est un maximum car $x < 2 \to y' > 0;\ x > 2 \to y' < 0$)

*b*) <u>Calcul du volume</u> $V(\lambda) = \int_0^\lambda \pi \left(4x\, x^{-\frac{1}{2}x}\right)^2 dx = 16\pi \int_0^\lambda x^2\, e^{-x}\, dx$

Par parties : $\int x^2\, e^{-x}\, dx = -x^2\, e^{-x} + \int 2x\, e^{-x} dx$

$u = x^2 \qquad u' = 2x$

$v' = e^{-x} \qquad v = -e^{-x}$

$\int x\, e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x}$

$u = x \qquad u' = 1$

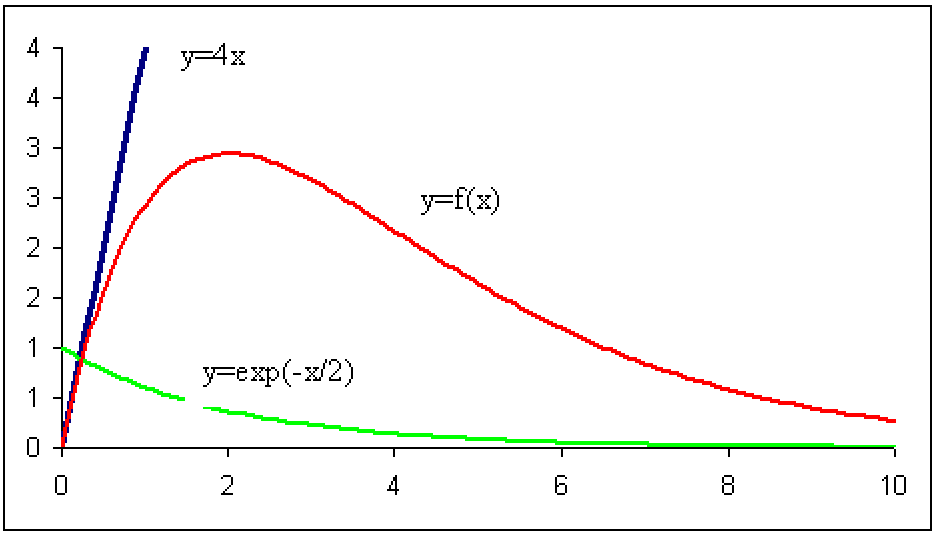
$v' = e^{-x} \qquad v = -e^{-x}$

donc $V(\lambda) = 16\pi \left[e^{-x}\left(-x^2 - 2x - 2\right)\right]_0^\lambda = 16\,\pi\left[2 - e^{-\lambda}\left(\lambda^2 + 2\lambda + 2\right)\right]$

$c$) Lorsque $\lambda$ tend vers l'infini :

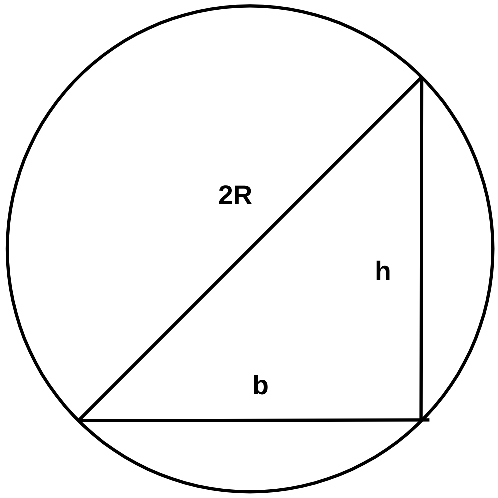
$$\lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda}\left(\lambda^2 + 2\lambda + 2\right) = 0$$

$$\rightarrow \quad \lim_{\lambda \to +\infty} V(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} 16\pi\left[2 - e^{-\lambda}\left(\lambda^2 + 2\lambda + 2\right)\right] = 32\pi$$



## EXANA044 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Parmi tous les triangles rectangles inscrits dans un demi-cercle de rayon R, on demande de déterminer celui qui est de périmètre maximum




Soient $h$ et $b$, la hauteur et la base d'un triangle rectangle inscrit dans le demi-cercle.

Pythagore $\rightarrow$ $h^2+b^2=4R^2 \quad \rightarrow \quad h=\sqrt{4R^2-b^2}$.

Pérmètre du triangle, $P=h+b+2R=\sqrt{4R^2-b^2}+b+2R$

$P$ peut être considéré comme une fonction de $b$

si $P$ est maximum, sa dérivée est nulle $\rightarrow$ $P'=\dfrac{-b}{\sqrt{4R^2-b^2}}+1=0 \ \rightarrow \ b=\pm\sqrt{2}\ R$

On vérifie que l'on a un maximum :

$P''(b)=\dfrac{-4R^2}{\left(4R^2-b^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \rightarrow \quad P''\left(\sqrt{2}\ R\right)=\dfrac{-4R^2}{\left(2R^2\right)^{\frac{3}{2}}}<0$ (Concavité négative)

## EXANA045 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Etudier les variations (domaine, limites, asymptotes, dérivée première, tableau des variations) de la fonction suivante

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}+7}{e^x-3}\right)$$

Domaine de définition L'argument du logarithme doit être >0. Le numérateur l'étant, il faut et il suffit que $e^x - 3 > 0 \;\rightarrow\; x > 3 \;\rightarrow\; dom\ f = \left]\ln 3, +\infty\right[$

Asymptote vertical : $x = \ln 3$. En effet : $\lim\limits_{x \xrightarrow[>]{} \ln 3} \frac{e^{2x}+7}{e^x-3} = \frac{16}{0^+} = +\infty$

Asymptote horizontal : n'existe pas.

Asymptote oblique : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{1}$

$$f'(x) = \left[\ln\left(e^{2x}+7\right) - \ln\left(e^x-3\right)\right]' = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+7} - \frac{e^x}{e^x-3}$$

$$= \frac{2e^{2x}\left(e^x-3\right) - e^x\left(e^{2x}+7\right)}{\left(e^{2x}+7\right)\left(e^x-3\right)} = \frac{e^x\left(e^{2x}-6e^x-7\right)}{\left(e^{2x}+7\right)\left(e^x-3\right)} = \frac{e^x\left(e^x-7\right)\left(e^x+1\right)}{\left(e^{2x}+7\right)\left(e^x-3\right)}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}\left(1-7e^{-x}\right)\left(1+e^{-x}\right)}{e^{3x}\left(1+7e^{-2x}\right)\left(1-3e^{-x}\right)} = 1$$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{e^{2x}+7}{e^x-3}\right) - \ln e^x\right] = \ln\left[\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+7}{e^x\left(e^x-3\right)}\right] = \ln 1 = 0$

Donc, $y = x$ est une asymptote oblique. De plus, $f(x) - x > 0$ : la courbe est au-dessus de son asymptote.

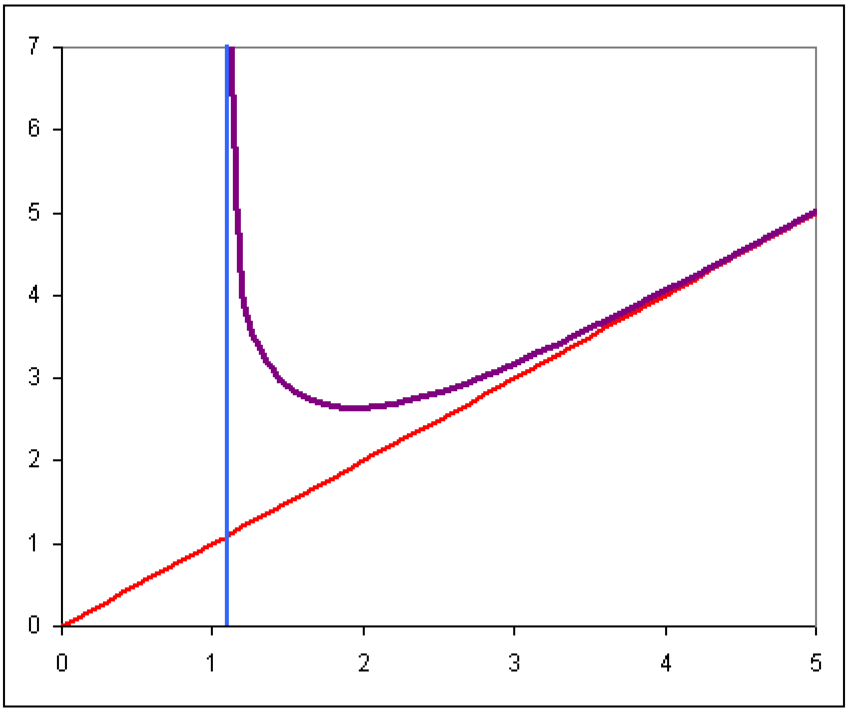
Maxima et minima

$f'(x) = 0$ si $e^x = 7 \;\rightarrow\; x = \ln 7.$

Pour $e^x < 7$, $f'(x) < 0$ et $e^x > 7$, $f'(x) > 0 \;\rightarrow\;$ minimum pour $x = \ln 7$

Tableau des variations

| | | $\ln 3$ | | $\ln 7$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | / | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | / | $+\infty$ | ↘ | $\ln 14$ | ↗ | $+\infty$ |


7
6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5

## EXANA046 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

La fonction f(x) de la variable réelle x est définie par

$$f(x) = 2x - |x| \ln x^2$$

a) Étudier la fonction f(x) et donner l'allure de sa représentation graphique (comportement aux limites, intersection avec les axes, dérivée première).
b) Déterminer l'aire de la zone définie par les points (x , y) tels que

$$0 < y < f(x)$$
$$1 < x < e$$

$a)$ Domaine de définition : $\Re_0$

$a.1)$ $\underline{\underline{x > 0}}$ $\quad f(x) = 2x - 2x\ln x = 2x(1 - \ln x)$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0.\infty = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1 - \ln x}{\frac{1}{2x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} 4x = 0$$

$\underline{\text{Asymptote horizontale}}$ : n'existe pas $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.(-\infty) = -\infty$

$\underline{\text{Asymptote oblique}}$ : n'existe pas $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 2(1 - \ln x) = -\infty$

$\underline{\text{Dérivée première}}$ : $f'(x) = 2(1 - \ln x) + 2x\left(-\frac{1}{x}\right) = -2\ln x$

$\lim_{\substack{x \to \\ >0}} f'(x) = \infty$ $\quad$ (La pente de la tangente à la courbe tend vers l'infini à l'origine)

$\underline{\text{Maxima et minima}}$ : $f'(x) = 0 \quad ssi \quad x = 1 \quad (x < 1 \rightarrow f' > 0;\ x > 1 \rightarrow f' < 0)$

$a.2)$ $\underline{\underline{x < 0}}$ : $f(x) = 2x + 2x\ln(-x) = 2x(1 + \ln(-x))$

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ <0}} f(x) = 0.\infty = \lim_{\substack{x \to \infty \\ <0}} \frac{1 + \ln(-x)}{\frac{1}{2x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{\substack{x \to \infty \\ <0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x \to \infty \\ <0}} -4x = 0$$

$\underline{\text{Asymptote horizontale}}$ : n'existe pas $\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty).\infty = -\infty$

$\underline{\text{Asymptote oblique}}$ : n'existe pas $\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2(1 + \ln(-x)) = +\infty$

Dérivée première : $f'(x) = 2(1+\ln(-x)) + 2x\left(\frac{1}{x}\right) = 2(2+\ln(-x))$

$\lim\limits_{x \xrightarrow[<0]{} } f'(x) = -\infty$

Maxima et minima : $f'(x) = 0 \quad ssi \quad \ln(-x) = -2 \;\rightarrow\; x = -\frac{1}{e^2}$

Tableau des variations

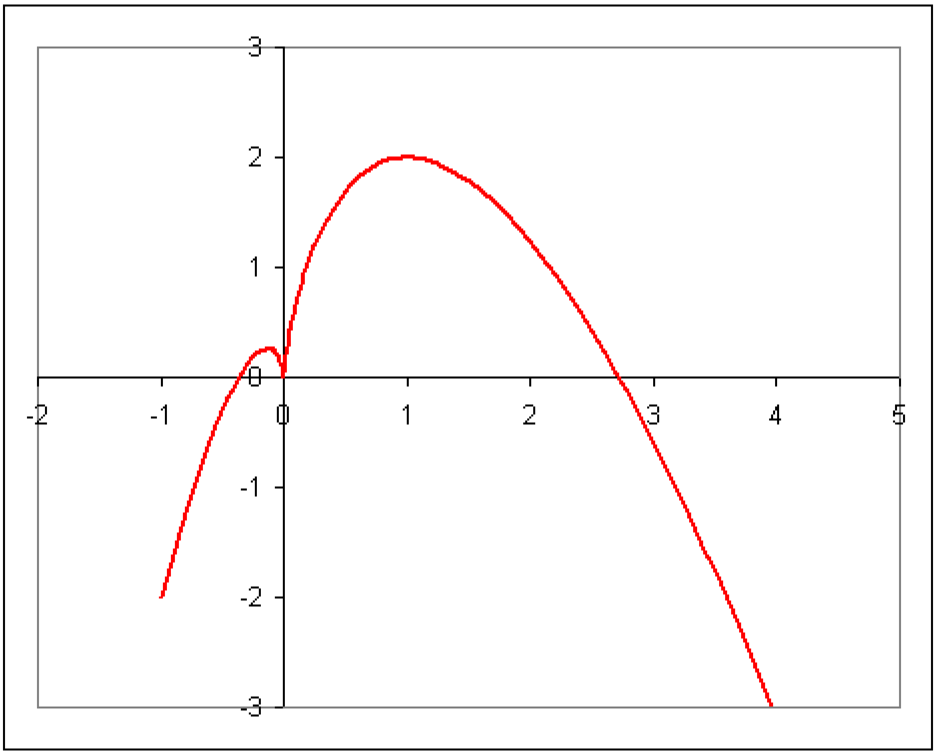
| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{e^2}$ | | | | $0$ | | | | $1$ | | | $+\infty$ |
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-\infty$ | | / | $+\infty$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | |
| $f$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{1}{e^2}$ | ↘ | $0$ | | / | $0$ | | ↗ | $2$ | ↘ | | $-\infty$ |

$b)$ Sur l'intervalle $]1, e[$, $f(x) = 2x(1-\ln x)$

$$S = 2\int_1^e (x - x\ln x) = 2\left[\frac{x^2}{2} - \int x\ln x\, dx\right]_1^e$$

$$\int x\ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + k \quad (\text{Intégration par parties})$$

$$\rightarrow \quad S = 2\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - 2\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}$$



## EXANA047 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

On donne la fonction

$$f(x) = \frac{a}{1 + be^{-cx}}$$

dépendant des trois paramètres réels positifs ($\neq 0$) $a$, $b$, $c$.

a) Vérifier que cette fonction est croissante sur tout son domaine de définition.

b) Quel est exactement l'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ ?

c) Déterminer les valeurs de certains paramètres pour que l'ensemble des valeurs prises par f(x) soit un intervalle de longueur 3 et que la valeur de f à l'origine soit 3/2.

d) Avec les valeurs trouvées des paramètres, rechercher le point où la pente de la tangente à la courbe est la plus grande. Quelle est la valeur maximale de cette pente ?

$a$) Quand $x$ croît, $e^{-x}$ décroît car $c>0$. Le dénominateur décroît car $b>0$

$\rightarrow$ la fraction croît car $a>0$

En utilisant la dérivée, on arrive également à montrer que $f$ est croissante.

$$f'(x)=\frac{-ab(-c)e^{-cx}}{\left(1+be^{-cx}\right)^2}=\frac{abc}{\left(1+be^{-cx}\right)^2}\ ]\ [e^{-cx}>0$$

$b$) La fonction est continue et croissante, donc elle prend toutes les valeurs comprises entre A et B avec

$$A=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{a}{\infty}=0$$

$$B=\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{a}{1}=a$$

L'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ est donc $\left]\,0,a\,\right[$

$c$) Pour que l'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ soit un intervalle de longueur 3, il faut que $a=3$.

Pour que $f(0)=\frac{3}{2}$, il faut que $f(0)=\frac{a}{1+b}=\frac{3}{2}\ \rightarrow\ b=1$

$d$) La pente de la tangente est donnée par :

$$f'(x)=\left(\frac{3}{1+e^{-cx}}\right)'=\frac{3ce^{-cx}}{\left(1+e^{-cx}\right)^2}$$

Au point où $f'(x)$ est maximum, la dérivée de $f'(x)$ est nulle.

On calcule donc $f''$

$$f''(x)=3c\left[-ce^{-cx}\left(1+e^{-cx}\right)^2+e^{-cx}(-2)\left(1+e^{-cx}\right)^{-3}e^{-cx}(-c)\right]$$

$$=\frac{-3c^2e^{-cx}}{\left(1+e^{-cx}\right)^2}\left(1-e^{-cx}\right)$$

$$f''(x)=0\ \text{ si }\ e^{-cx}=1\ \rightarrow\ x=0$$

La dérivée de $f'$ est positive avant $x=0$ et négative après; $f'$ a donc un maximum en $x=0$.

La valeur maximale de $f'$ est $f'(0)=\frac{3c}{4}$

# EXANA048 – Polytech, UMons

## - Questions posées entre 1995 et 1998

Calculer l'intégrale définie suivante :

$$I = \lim_{\substack{a \to 0 \\ >}} \int_a^1 x^n \ln x \, dx \qquad\qquad n \in \mathbb{N}_0$$

---

$a)$ Calculons d'abord d'une primitive de $x^n \ln x$ : $\int x^n \ln x \, dx = ?$

Par parties : $\begin{array}{ll} u' = x^n & u = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \\ v = \ln x & v' = \dfrac{1}{x} \end{array}$

$$\to \int x^n \ln x \, dx = \ln x . \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left( \ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C$$

$$b) \int_a^1 x^n \ln x \, dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1}\left( \ln x - \frac{1}{n+1} \right) \right]_a^1 = \frac{-1}{(n+1)^2} - \frac{a^{n+1}}{n+1} \ln a + \frac{a^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$c) \lim_{\substack{a \to 0 \\ >}} \frac{a^{n+1}}{(n+1)^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ >}} a^{n+1} \ln a = 0.(-\infty) \to \lim_{\substack{a \to 0 \\ >}} \frac{\ln a}{a^{-(n+1)}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

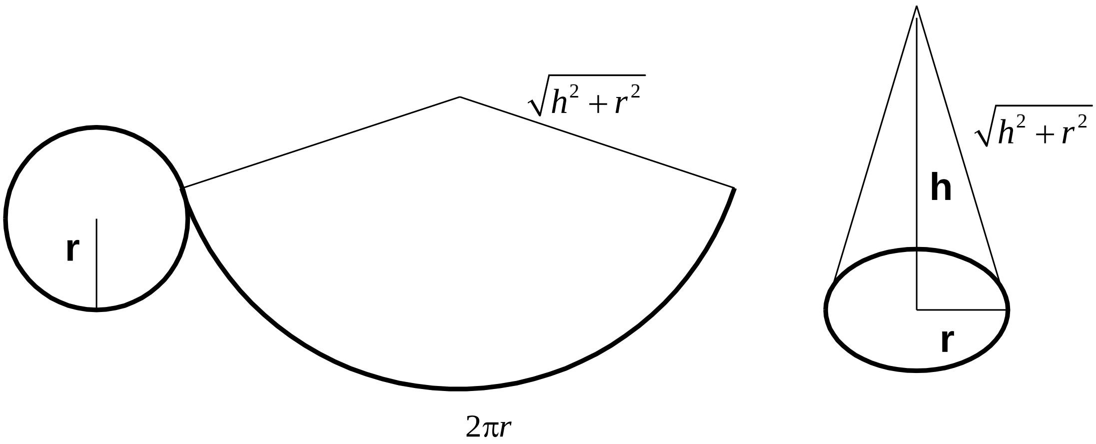
Appliquons l'Hospital $\to \lim\limits_{\substack{a \to 0 \\ >}} = \dfrac{\frac{1}{a}}{-(n+1)a^{-(n+2)}} = \lim\limits_{\substack{a \to 0 \\ >}} \dfrac{-1}{n+1} a^{n+1} = 0$

Finalement : $\boxed{I = \lim\limits_{\substack{a \to 0 \\ >}} \int_a^1 x^n \ln x \, dx = \dfrac{-1}{(n+1)^2}}$

## EXANA049 – Polytech, UMons

**- questions posées de 1995 à 1998.**

Calculer le cône de volume maximal pour une surface totale donnée S.
(Surface totale = surface latérale + surface de base).



Soit $h$ la hauteur du cône et $r$ le rayon de la base.

Surface latérale $= \dfrac{2\pi r}{2\pi\sqrt{h^2+r^2}}\,\pi\left(h^2+r^2\right) = \pi r\sqrt{h^2+r^2}$

Surface totale = Surface latérale + surface de base $\rightarrow\ S = \pi r\sqrt{h^2+r^2} + \pi r^2$

Volume = $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

On en déduit une expression de la hauteur $h$ en fonction de $S$ et de $r$ :

$$S - \pi r^2 = \pi r\sqrt{h^2+r^2} \ \rightarrow\ \sqrt{h^2+r^2} = \frac{S-\pi r^2}{\pi r} = \frac{S}{\pi r} - r$$

$$\rightarrow\ h^2 + r^2 = \left(\frac{S}{\pi r} - r\right)^2 \ \rightarrow\ h^2 = \left(\frac{S}{\pi r} - r\right)^2 - r^2 = \frac{S}{\pi r}\left(\frac{S}{\pi r} - r\right) = \frac{1}{(\pi r)^2}\left(S\left(S - 2\pi r^2\right)\right)$$

$$\rightarrow h = \frac{1}{\pi r}\sqrt{S\left(S-2\pi r^2\right)}$$

Donc : $V(r) = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \dfrac{1}{\pi r}\sqrt{S\left(S-2\pi r^2\right)} = \dfrac{1}{3} r\sqrt{S\left(S-2\pi r^2\right)}$

Et on peut maintenant dériver $V(r)$. On obtient :

$$3V'(r) = \sqrt{S^2 - 2\pi S r^2} + \frac{r}{2\sqrt{S^2-2\pi S r^2}}(-4\pi S r)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{S\left(S-2\pi r^2\right)}}\left(S^2 - 2\pi S r^2 - 2\pi S r^2\right) = \frac{S}{\sqrt{S\left(S-2\pi r^2\right)}}\left(S - 4\pi r^2\right)$$

Pour trouver le volume maximum, on annule l'expression de la dérivée.

$$V'(r) = 0 \quad \text{si} \quad S = 4\pi r^2 \ \rightarrow\ r = +\sqrt{\frac{S}{4\pi}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si} \quad r < \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{S}{\pi}} \ \rightarrow\ V'(r) > 0 \\[2ex] \text{Si} \quad r > \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{S}{\pi}} \ \rightarrow\ V'(r) < 0 \end{array}\right\} \ \rightarrow\ \text{Il s'agit bien d'un maximum.}$$

La hauteur correspondante est : $h = \sqrt{\dfrac{2S}{\pi}}$