

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Analyse

**ANA 41**

**EXANA410 – EXANA419**

<http://www.matheux.c.la>

**Jacques Collot  
Benoit Baudalet – Steve Tumson  
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck  
Fabienne Zoetard**

Octobre 2014

## EXANA410 – EPL, UCL, LLN, juillet 2015 série 1

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-|x|}{2-|x|}}$$

2. En évitant d'effectuer des calculs, dire si les égalités suivantes sont correctes. *Justifier.*

$$\int_1^2 e^{\sin x} dx = 0$$

$$\int_1^2 \sqrt{1+x^8} dx = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

3. Le théorème de Rolle s'énonce comme suit :

Soit  $f$  une fonction continue définie sur  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et dérivable sur  $]a, b[$ .

Si  $f(a) = f(b)$ , alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$

Utiliser ce théorème pour démontrer le résultat suivant :

Soit  $P(x)$  un polynôme de degré  $n \geq 2$  à coefficients réels possédants  $n$  racines réelles distinctes. Démontrer que la dérivée  $P'(x)$  possède  $n - 1$  racines réelles distinctes.

### Solution proposée par Nicole Berckmans

1.

$x$		-2	-1	0	1	2						
$\frac{1- x }{2- x }$		+	/	-	0	+	+	+	0	-	/	+

$$\Rightarrow \text{dom } f = ]\leftarrow, -2] \cup [-1, 1] \cup ]2, \rightarrow[$$

2. Faux car  $\forall x, e^{\sin x} > 0$  et donc  $0 = \int_{-1}^1 0 dx < \int_{-1}^1 e^{\sin x} dx$

Faux car sur  $[1, 2]$ :  $\sqrt{2} < \sqrt{1+x^2}$ . En effet sur  $[1, 2]$  la fonction  $\sqrt{1+x^2}$  est croissante

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{8} < \sqrt{2} = \int_1^2 \sqrt{2} dx < \int_1^2 \sqrt{1+x^2} dx$$

3. Entre deux racines consécutives de  $P(x)$ , la dérivée  $P'(x)$  possède au moins une racine en vertu du théorème de Rolle. Puisque  $P(x)$  possède exactement  $n$  racines et puisque  $P'(x)$  de degré  $n - 1$ , possède au plus  $n - 1$  racines, on peut en déduire la thèse.

# EXANA411 – EPL, UCL, LLN, juillet 2015 série 1

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2} \ln(2x^2 - 1)$$

1. Etudier les variations de  $f$ . On précisera le domaine de définition de  $f$ , les éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et de décroissance et les extrema éventuels (on n'étudiera pas la concavité ni les points d'inflexion).
2. Construire la courbe représentative de  $f$ .
3. En utilisant la courbe représentative de  $f$ , discuter suivant les valeurs du paramètre réel  $k$ , le nombre de racines de l'équation

$$x^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{2k-4x}$$

## Solution proposée par Nicole Berckmans

$$\text{Domaine de } f = \left] \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cup \right] \frac{\sqrt{2}}{2}, \rightarrow \right[$$

$$AV \equiv x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ car } \lim_{x \rightarrow \pm \frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) = -\infty$$

$AH \not\equiv$  car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty + \infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( 2 + \frac{\ln(2x^2 - 1)}{2x} \right) = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(2x^2 - 1)}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{2(2x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2x - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$AO_{+\infty} \not\equiv \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 + \frac{1}{2x} \ln(2x^2 - 1) \right) = 2$$

$$\text{en effet } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x^2 - 1)}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2(2x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2x - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln(2x^2 - 1) = +\infty$$

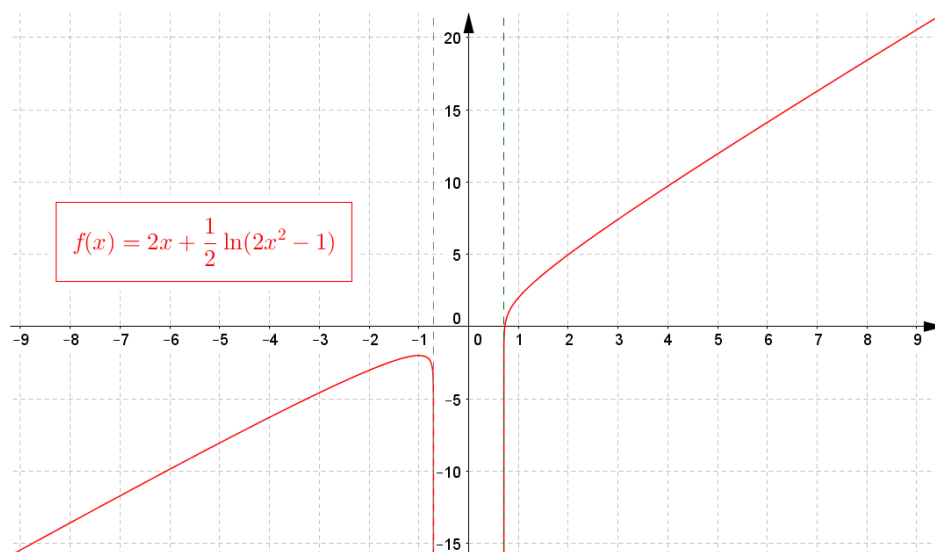
$$AO_{-\infty} \nexists \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 + \frac{1}{2x} \ln(2x^2 - 1) \right) = 2$$

$$\text{en effet } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(2x^2 - 1)}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{2(2x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2x - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \ln(2x^2 - 1) = +\infty$$

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{2} \frac{4x}{2x^2 - 1} = \frac{2(2x^2 + x - 1)}{2x^2 - 1} \quad \text{racines } \frac{1}{2} \text{ et } -1$$

$x$		$-1$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$/$	$/$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\text{Max}(-1, -2)$	$\searrow$	$/$	$/$	$\nearrow$



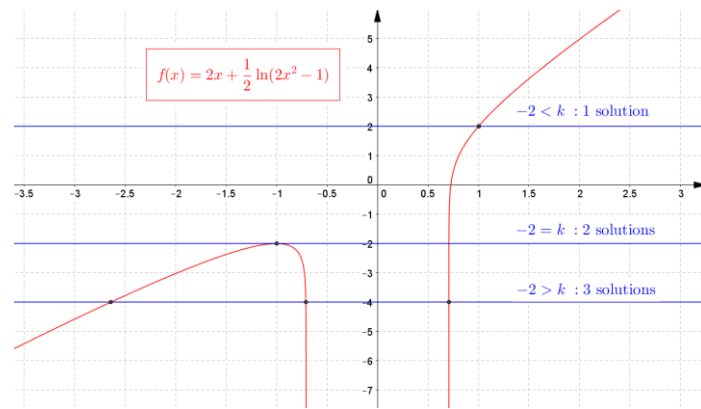
$$3. x^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{2k-4x} \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = e^{2k-4x} \Leftrightarrow \ln(2x^2 - 1) = 2k - 4x \Leftrightarrow k = 2x + \frac{1}{2} \ln(2x^2 - 1) = f(x)$$

Il suffit donc d'étudier l'intersection de la droite  $y = k$  avec la fonction  $y = f(x)$

$k > -2$  1 solution

$k = -2$  2 solutions

$k < -2$  3 solutions



10 septembre 2015

## EXANA412 – EPL, UCL, LLN, juillet 2015 série 1

Marco a apporté ce matin à son amie Linie les 216 g de chocolat pour le glaçage des gâteaux de la fête de ce soir, mais il doit aussi apporter la petite table (de forme rectangulaire) pour y placer les gâteaux et il a oublié de demander les tailles exactes de ceux-ci. Il sait que Linie fait toujours des gâteaux *carrés*, qu'elle utilise généralement 100 g de chocolat pour le glaçage d'un gâteau de  $10 \times 10$  cm (elle glace uniquement la face supérieure), et qu'elle a décidé de faire 2 gâteaux pour ce soir, dont l'un avec double ration de glaçage. Quelle est la longueur  $L$  minimale de la table (rectangulaire) qu'il doit apporter afin d'être certain que les deux gâteaux pourront être placés côte à côte sans déborder de la table (les côtés des gâteaux parallèles à ceux de la table comme indiqué sur la figure)? Justifier soigneusement votre raisonnement et détaillez vos calculs. On notera  $x_1$  le côté du gâteau normal et  $x_2$  le côté du gâteau avec double ration de glaçage.

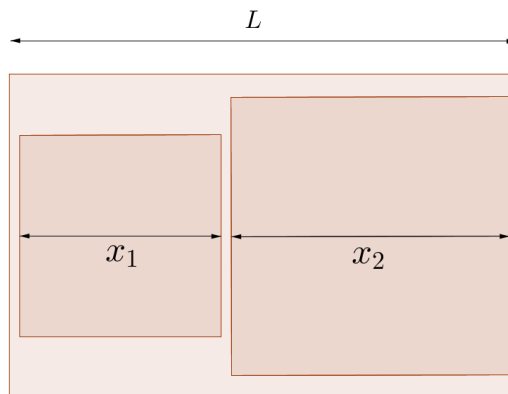


Fig 1 : Schéma des gâteaux sur la table  
(Les proportions ne sont pas nécessairement respectées)

Pour vous aider, vous pouvez suivre la méthodologie suivante :

1. Ecrire en fonction de  $x_1$  et  $x_2$  la quantité de chocolat utilisée. En déduire l'expression de  $x_1$  en fonction de  $x_2$  en imposant qu'exactly 216 g de chocolat ont été utilisés.
2. Ecrire la taille requise pour la table en fonction de  $x_1$  et  $x_2$ , puis de  $x_2$  seulement.
3. Comment s'assurer que la taille  $L$  de la table soit suffisante quel que soit la valeur de  $x_2$  choisie par Linie.

### Solution proposée par Nicole Berckmans

$$x_1^2 + 2x_2^2 = 216$$

$$L = x_1 + x_2 = \sqrt{216 - 2x_2^2} + x_2 = f(x_2)$$

$$f'(x_2) = 1 - \frac{2x_2}{\sqrt{216 - 2x_2^2}} \quad \text{s'annule pour } x_2 = 6 \quad \text{Dans ce cas } x_1 = 12$$

$x_2$	0	6	$6\sqrt{3}$
$f'$	+	0	-
$f$	$\nearrow$	M	$\searrow$

18 cm correspond au maximum que peut atteindre  $x_1 + x_2$  pour  $x_2 = 6$  cm

et  $x_1 = 12$  cm. La longueur minimale de la table est donc de 18 cm  $\Rightarrow \boxed{L \geq 18 \text{ cm}}$

---

10 septembre 2015

## EXANA413 – EPL, UCL, LLN, juillet 2015 série 2

1. Calculer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{1 + \tan^2(\ln x)}{x} dx$$

2. Calculer la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\ln(1+x))}{\sqrt{1+x} - 1}$$

3. Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ . Démontrer que  $f(0) = 0$

---

### Solution proposée par Nicole Berckmans

1. On pose  $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$\Rightarrow I = \int (1 + \tan^2 u) du = \int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u = \tan(\ln x) + k$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\ln(1+x))}{\sqrt{1+x} - 1} = \left[ \frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\ln(1+x)) \cdot \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}} = 2$$

$$3. f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x = 0 \times 0 = 0$$

---

10 septembre 2015



## EXANA414 – EPL, UCL, LLN, juillet 2015 série 2

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \ln(1 + \tan^2 x)$$

1. Discuter le domaine de définition  $D_f$  de  $f$
2. Démontrer qu'il suffit d'étudier  $f$  sur  $D_E = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$
3. Etudier les variations de  $f$  sur  $D_E$  et représenter graphiquement  $f$  sur  $D_E$ .  
On précisera les asymptotes, les domaines de croissance et de décroissance et les extrema éventuels (on n'étudiera pas la concavité ni les points d'inflexion).
4. Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ . Démontrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$ . Préciser le domaine de définition de  $g^{-1}$ .

---

### Solution proposée par Nicole Berckmans

$$1. D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

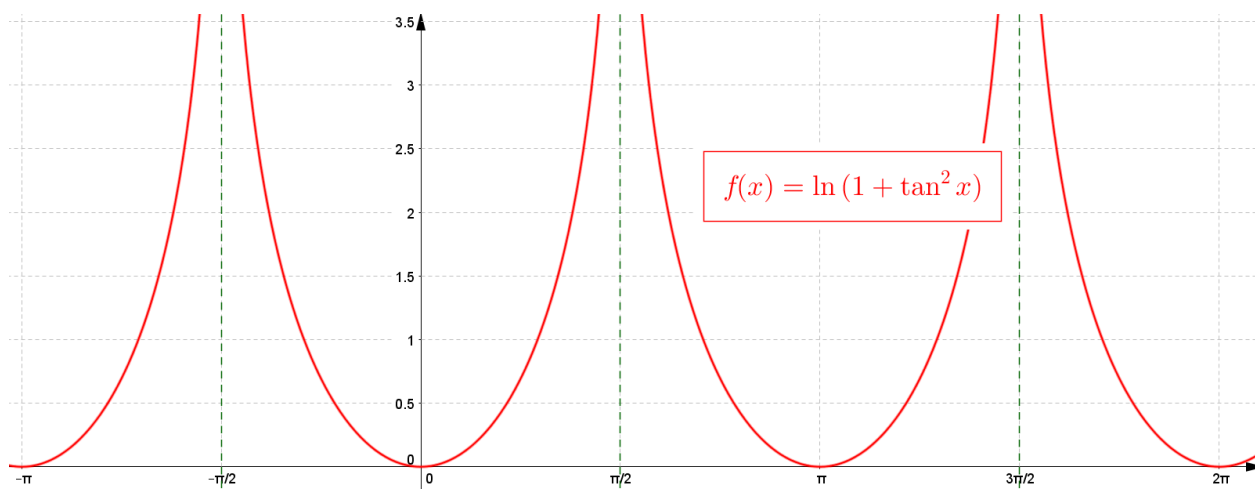
$$\text{Remarquons que } f(x) = \ln\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = -2\ln|\cos x|$$

$$2. f \text{ est paire car } f(-x) = f(x) \text{ et de période } \pi. \text{ Donc il suffit d'étudier } f \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$3. \text{ AV en } \frac{\pi}{2} \text{ car } \lim_{x \rightarrow \pi/2} = [-2\ln 0] = +\infty$$

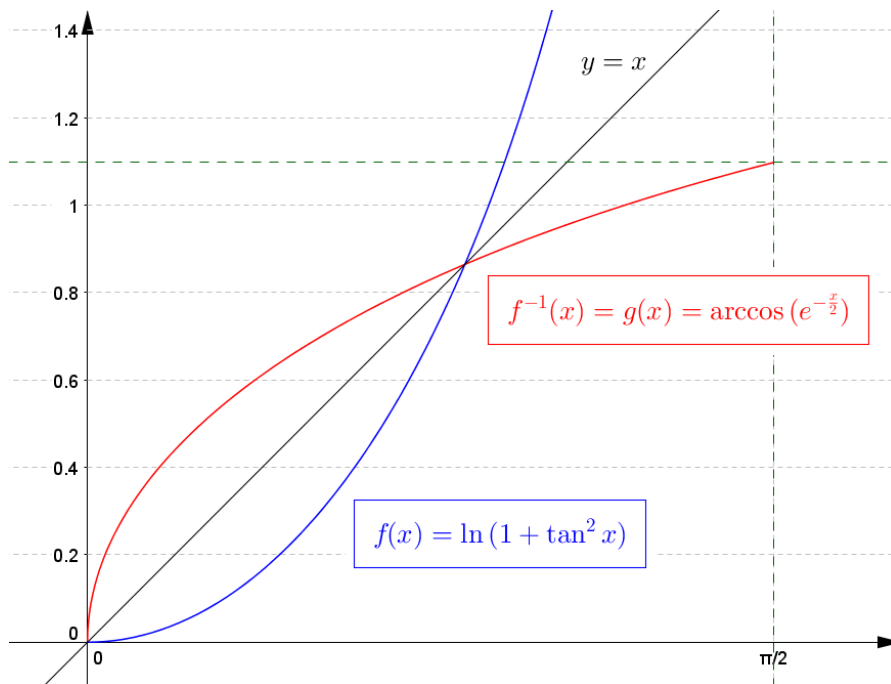
$$f(0) = 0; \quad f'(x) = \frac{2 \sin x}{\cos x} = 2 \tan x \geq 0 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$f \text{ est donc croissante sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$



3.  $g^{-1}$  existe. En effet,  $f$  est strictement croissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Elle y est injective et  $g^{-1}$  existe.



10 septembre 2015

## EXANA415 EPL, UCL, LLN, juillet 2015 série 2

Une architecte prépare la conception d'une façade sur un thème floral, et veut y intégrer une grande fenêtre rectangulaire, décorée par des mosaïques en demi-cercle selon le schéma de la figure ci-dessous.

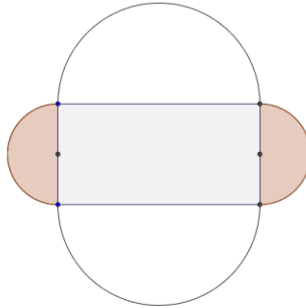


Fig 1 : Schéma de la fenêtre et de ses décorations.  
(les proportions ne sont pas nécessairement respectées).

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels positifs. Les demi-cercles au-dessus et en dessous de la fenêtre seront couverts d'une mosaïque dont le prix est fixé à  $p_1 = \frac{4a}{\pi}$  [€/m<sup>2</sup>]. Les demi-cercles à gauche et à droite seront couverts par une mosaïque bleue dont le prix est fixé à  $p_2 = \frac{4b}{\pi}$  [€/m<sup>2</sup>]. L'architecte dispose pour les mosaïques de cette fenêtre d'un budget total égal à  $B_T = ab$ . Quelle est la surface maximale qu'elle peut prévoir pour la fenêtre tout en respectant le budget disponible? Déterminez soigneusement votre raisonnement et vos calculs.

### Solution proposée par Nicole Berckmans

$$\text{Budget jaune} = \pi R^2 \cdot \frac{4a}{\pi} = 4aR^2 \text{ €}; \quad \text{Budget bleu} = \pi r^2 \cdot \frac{4b}{\pi} = 4br^2 \text{ €};$$

$$\text{Budget total} = ab = 4(aR^2 + br^2).$$

$$\text{On en déduit : } r^2 = \frac{a}{4b}(b - 4R^2)$$

$$\text{Surface de la fenêtre : } S = 4rR.$$

$$F(R) = 4R \cdot \sqrt{\frac{a}{4b}(b - 4R^2)} = 2R \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{b - 4R^2}$$

$$\frac{dF}{dR} = 2 \sqrt{\frac{a}{b}} \left[ \sqrt{b - 4R^2} - \frac{8R^2}{2\sqrt{b - 4R^2}} \right] = 2 \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{b - 8R^2}{\sqrt{b - 4R^2}}$$

$R$	0	$\sqrt{\frac{b}{8}}$
$\frac{dF}{dR}$	+	-
$F$	↗	↘

$$\text{Si } R = \sqrt{\frac{b}{8}}, \text{ alors } r = \sqrt{\frac{a}{8}} \Rightarrow \boxed{S = \frac{\sqrt{ab}}{2} \text{ m}^2}$$

**EXANA416 – EPL, UCL, LLN, septembre 2015**

1. Calculer la primitive suivante :

$$\int \frac{1 + \ln x}{x^2} dx$$

2. Vrai ou faux (Justifier)

- Une fonction peut être continue mais non dérivable en un point.
- Si deux fonctions ont la même dérivée, elles sont égales.
- Si une fonction paire est dérivable, sa dérivée est aussi paire.

3. Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies par

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \text{ et } g(x) = \frac{1}{x}$$

Déterminer le domaine de définition de  $f \circ g$  puis déterminer  $(f \circ g)(x)$

---

**Solution proposée par Louis François.**

1. Par partie :  $\int \frac{1 + \ln x}{x^2} dx = (1 + \ln x) \left( -\frac{1}{x} \right) + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{2 + \ln x}{x} + k$

2. Vrai :  $f(x) = |x|$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et non dérivable en  $x = 0$

Faux : exemple  $f(x) = 0$  et  $g(x) = 1$  sont tels que  $f'(x) = g'(x)$

Faux : exemple  $f(x) = x^2$  est paire et dérivable, et  $f'(x) = 2x$  est impaire

3.  $g : x \rightarrow g(x) = \frac{1}{x} = u$  où  $x \neq 0$

$f : u \rightarrow f(u) = \sqrt{2u+1}$  où  $-\frac{1}{2} \leq u$

$f \circ g : x \rightarrow f(g(x)) = \sqrt{2 \frac{1}{x} + 1} = \sqrt{\frac{2+x}{x}}$  avec  $x \neq 0$  et  $\frac{2+x}{x} \geq 0$

$\Rightarrow \text{dom } f(g(x)) = ]\leftarrow, -2] \cup ]0, \rightarrow[$

---

## EXANA417- EPL, UCL, LLN, septembre 2015

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$$

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
2. Etudier les variations de  $f$  et tracer sa courbe représentative  $C_f$ . On précisera les éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et de décroissance et les extrema éventuels (on n'étudiera pas la concavité ni les points d'inflexion).
3. Soit  $A$  l'aire délimitée par l'axe des abscisses, la courbe  $C_f$  et les droites

d'équations respectives  $x = \frac{1}{e}$  et  $x = 2$

Démontrer que  $0 \leq A \leq e - \frac{1}{2}$

### Solution proposée par Nicole Berckmans

1.  $Dom f = ]0, \rightarrow[$

2. AV  $\equiv x = 0$  car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \left[ \frac{-\infty}{0^+} \right] = -\infty$

AH  $\equiv y = 0$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left[ \frac{-\infty}{+\infty} \right] \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = \left[ \frac{1}{\infty} \right] = 0$

$$G_f \cap Ox = \left\{ \left( \frac{1}{e}, 0 \right) \right\}$$

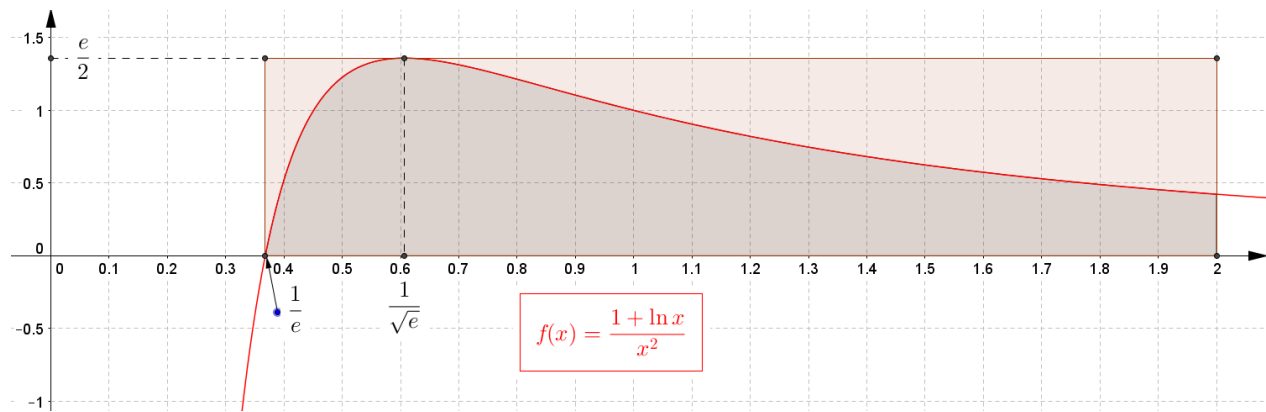
$f'(x) = -\frac{1+2\ln x}{x^3}$  s'annule en  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$  avec  $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{e}{2}$

$x$	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	
$f'$	/	+	0
$f$	/	$\nearrow$	M

3.  $0 \leq A$  car sur  $\left[ \frac{1}{e}, 2 \right]$ , la fonction est positive.

$A \leq e - \frac{1}{2}$  car l'aire sous la courbe est inférieure à l'aire du rectangle de base  $2 - \frac{1}{e}$  et

de hauteur  $\frac{e}{2}$ , or  $\left(2 - \frac{1}{e}\right) \cdot \frac{e}{2} = e - \frac{1}{2}$



Autre méthode :

$$\begin{aligned} \text{L'aire sous la courbe : } A &= \int_{\frac{1}{e}}^2 \frac{1 + \ln x}{x^2} dx = \left[ \frac{-2 - \ln x}{x} \right]_{x=2} - \left[ \frac{-2 - \ln x}{x} \right]_{x=\frac{1}{e}} \\ &= \left( -1 - \frac{\ln 2}{2} \right) - (-2e + e) = -1 - \frac{\ln 2}{2} + e \end{aligned}$$

Il reste à prouver que :  $-1 - \frac{\ln 2}{2} + 2 < e - \frac{1}{2}$

$$\text{càd} \quad -\frac{\ln 2}{2} < \frac{1}{2}$$

en effet  $\ln 2$  est positif puisque  $2 > 1$

Rem : puisque sur  $\left[ \frac{1}{e}, 2 \right]$ , la fonction est positive, l'aire  $A$  est bien positive

# EXANA418 – EPL, UCL, LLN, septembre 2015

Un groupe de lilliputiens effectue une randonnée dans les montagnes de Tasmanie.  
La fonction :

$$f(x) = 80x^3 - 360x^2 + 480x + 280$$

décrit leur altitude (en mètres) tout au long de leur trajet, en fonction de la distance parcourue  $x \in [0, 3]$  (en kilomètres). Calculer le *dénivelé positif* de leur parcours. Celui-ci est défini comme la somme des gains en altitude sur l'ensemble des parties ascendantes du parcours (commençant en  $x = 0$  km et finissant en  $x = 3$  km, en ignorant les parties descendantes).

Pour simplifier vos calculs, nous vous conseillons de travailler avec la fonction

$$g(x) = \frac{f(x)}{40} = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 7$$

et de convertir vos résultats à la fin. *Détaillez et justifiez votre raisonnement.*

## Solution proposée par Louis François

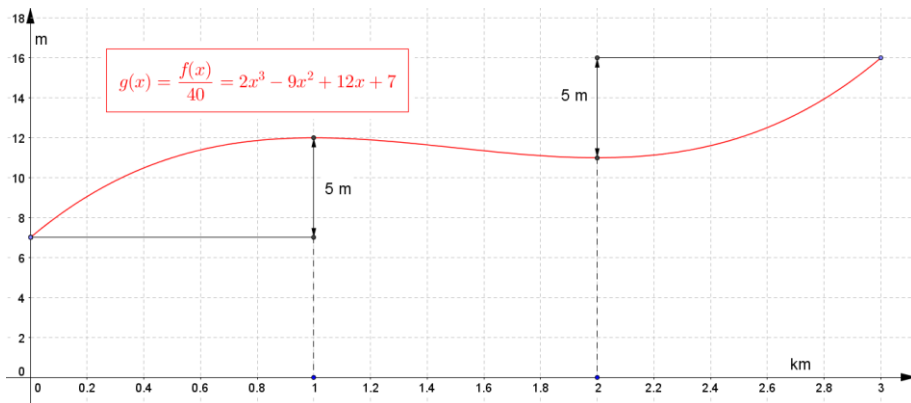
On calcule le dénivelé positif de  $y$  et le multiplier par 40.

Unité d'abscisse : km, d'ordonnée : m.

$$g'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 2)(x - 1)$$

$x$	0	1	2	3	
$g'$	+	0	-	0	+
$g$	$m$	$M$	$m$	$M$	
	7	12	11	16	

$$\text{Dénivelé positif pour } y = (12 - 7) + (16 - 11) = 10 \text{ m} \Rightarrow \boxed{\text{pour } f = 400 \text{ m}}$$



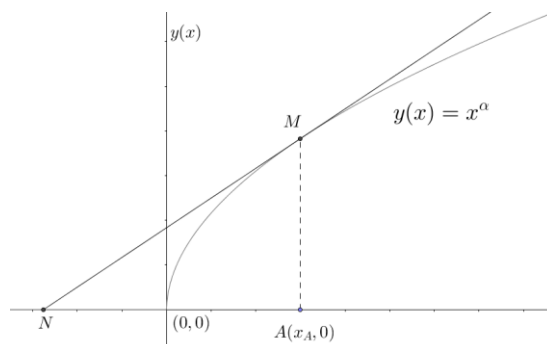
10 septembre 2015

## EXANA419 – Polytech, Umons, Mons, Juillet 2015.

Soit la fonction

$$y(x) = x^\alpha \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1 \text{ et } x \geq 0 \quad (1)$$

représentée ci-dessous pour une valeur de  $\alpha$  respectant (1)



La tangente à la courbe ci-dessus au point  $M$  d'abscisse  $x_A$  coupe l'axe des abscisses au point  $N$ . On demande de calculer la valeur de  $\alpha$  de telle sorte que l'aire sous-tendue par  $y(x)$  entre les abscisses 0 et  $x_A$  soit égale à la moitié de l'aire du triangle  $AMN$ .

---

Etablissons l'équation de la tangente en  $x = x_A$

$$y = x^\alpha \Rightarrow y = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$t \equiv y - x_A^\alpha = \alpha x_A^{\alpha-1} (x - x_A)$$

$$\text{Cette tangente coupe l'axe des } x \text{ en } x_N : -x_A^\alpha = \alpha x_A^{\alpha-1} (x_N - x_A) \Rightarrow x_N = \frac{\alpha-1}{\alpha} x_A \quad (1)$$

$$\text{L'aire du triangle } AMN : A = \frac{(x_A - x_N) x_A^\alpha}{2}$$

$$\text{Et on doit avoir : } \frac{A}{2} = \int_0^{x_A} x^\alpha dx \Rightarrow \frac{(x_A - x_N) x_A^\alpha}{4} = \frac{x_A^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$\text{En tenant compte de (1) : } (\alpha+1) \left( x_A - \frac{\alpha-1}{\alpha} x_A \right) = 4 x_A^{\alpha+1} \Rightarrow (\alpha+1)(\alpha - \alpha + 1) = 4\alpha$$

$$\text{Finalement : } \boxed{\alpha = \frac{1}{3}} \quad \text{Et donc } \alpha \text{ est indépendant du point } A.$$



## Solution proposée par Antoine Randour

-Tout d'abord, déterminons l'équation de la tangente au point M de la droite ayant pour équation:

$$y(x) = x^\alpha$$

-Nous avons donc :

$$tg \equiv y - y_A = f'(A)(x - x_A)$$

$$tg \equiv y - x_A^\alpha = \alpha x_A^{\alpha-1}(x - x_A)$$

$$tg \equiv y = \alpha x_A^{\alpha-1}(x - x_A) + x_A^\alpha$$

-Par après, calculons les coordonnées du point N :

$$y = 0$$

$$0 = \alpha x_A^{\alpha-1}(x - x_A) + x_A^\alpha$$

$$\alpha x_A^{\alpha-1}x = \alpha x_A^{\alpha-1}x_A - x_A^\alpha$$

$$x = \frac{x_A(\alpha - 1)}{\alpha}$$

$$N\left(\frac{x_A(\alpha - 1)}{\alpha}; 0\right)$$

$$Aire_1 = \int_0^{x_A} x^\alpha dx = \left[ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^{x_A} = \frac{x_A^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

-Et maintenant l'aire de la tangente à cette droite :

Pour se faire, nous pouvons remarquer que les points NMA forment un triangle, il n'est donc pas nécessaire de passer par une intégrale pour calculer cette aire.

$$Aire_2 = \frac{bh}{2} = \frac{\left(x_A - \frac{x_A(\alpha - 1)}{\alpha}\right) x_A^\alpha}{2} = \frac{x_A^{\alpha+1}}{2} - \frac{x_A^{\alpha+1}}{2} + \frac{x_A^{\alpha+1}}{2\alpha}$$

Et donc :

$$Aire_1 = \frac{1}{2} Aire_2 \Rightarrow \frac{x_A^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{1}{2} \frac{x_A^{\alpha+1}}{2\alpha} \Rightarrow \alpha + 1 = 4\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

