Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 45

EXANA450 – EXANA459

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

Janvier 2017

EXANA450 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2016.

Calculer (en justifiant les calculs) :

a) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 4x}{\cos^8 4x}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 e^{\cos x} - 2x)\sin x\ dx$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

a) Transformons d'abord l'intégrant :

$$\frac{\sin^3 4x}{\cos^8 4x} = \frac{\sin 4x\ (1-\cos^2 4x)}{\cos^8 4x} = \frac{\sin 4x}{\cos^8 4x} - \frac{\sin 4x}{\cos^6 4x}$$

$$= (\cos 4x)^{-8}.\sin 4x - (\cos 4x)^{-6}.\sin 4x$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^3 4x}{\cos^8 4x}\,dx &= -\frac{1}{4}\int (\cos 4x)^{-8}.(-4\sin 4x)\,dx + \frac{1}{4}\int (\cos 4x)^{-6}.(-4\sin 4x)\,dx \\
&= -\frac{1}{4}\,\frac{(\cos 4x)^{-7}}{-7} + \frac{1}{4}\,\frac{(\cos 4x)^{-5}}{-5} + C \\
&= \frac{1}{28\cos^7 4x} - \frac{1}{20\cos^5 4x} + C \\
&= \frac{1}{280\cos^7 4x}(10 - 14\cos^2 4x) + C \\
&= \frac{-1}{280\cos^7 4x}\,(7\cos 8x - 3) + C
\end{aligned}$$

Remarque : je considère chacune des deux dernières lignes comme une réponse finale valable.

b) Les bornes de l'intégrale définie sont symétriques. Par conséquent, lorsque l'intégrant est impair, la valeur de l'intégrale est zéro.

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 e^{\cos x} - 2x)\sin x\ dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x^2 e^{\cos x}\sin x}_{\text{impaire}}\ dx - 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x\sin x}_{\text{paire}}\ dx \\
&= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\ dx \\
&\qquad \text{IPP avec } \begin{cases} f'(x) = \sin x & \Leftrightarrow\ f(x) = -\cos x \\ g(x) = x & \Leftrightarrow\ g'(x) = 1 \end{cases} \\
&= -4\left([-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx\right) \\
&= -4\left((0-0) + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = -4\,(0 + (1-0)) \\
&= -4
\end{aligned}$$

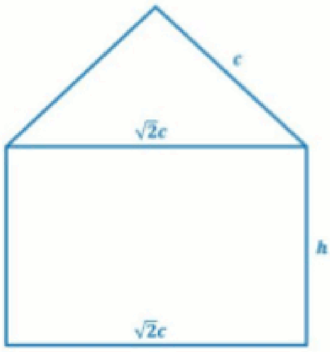
---

30 janvier 2016

EXANA451 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2016.

Une fenêtre possédant cinq côtés et un axe de symétrie vertical est formée d'un rectangle de base horizontale et de hauteur *h* mètres surmonté d'un triangle rectangle isocèle dont la longueur de chaque côté de l'angle droit est de *c* mètres. Si le périmètre de la fenêtre est égal à 8 mètres, calculer *h* et *c* pour qu'elle ait une aire maximale.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx



Aire de la fenêtre :

L'angle au sommet est droit et le triangle est isocèle ; l'hypoténuse vaut donc $\sqrt{2}c$. L'aire de la fenêtre est alors :

$$A(h,c) = \sqrt{2}ch + \tfrac{1}{2}c^2 \qquad (h, c > 0)$$

Contrainte :

Le périmètre doit être égal à 8 m :

$$2h + 2c + \sqrt{2}c = 8 \quad \Rightarrow \quad h = 4 - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)c \quad (\star)$$

Fonction objectif :

L'aire de la fenêtre en fonction de c seulement est

$$\begin{aligned} A(c) &= \sqrt{2}c\left(4 - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}c^2 \\ &= 4\sqrt{2}c - \sqrt{2}c^2 - c^2 + \frac{1}{2}c^2 \\ &= 4\sqrt{2}c - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)c^2 \end{aligned}$$

Optimisation :

$$A'(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\sqrt{2} - (1 + 2\sqrt{2})c = 0$$

Il s'en suit que

$$c_{\text{opt}} = \frac{4\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}(1 - 2\sqrt{2})}{1 - 8} = \frac{16 - 4\sqrt{2}}{7} = \frac{4}{7}(4 - \sqrt{2}) \cong 1{,}478 \text{ m}$$

En remplaçant cette valeur dans la relation $(\star)$ on trouve que $h_{\text{opt}} = c_{\text{opt}} \cong 1{,}478$ m.

Avec ces deux valeurs optimales, l'aire maximale de la fenêtre est de $A_{\max} = 4{,}1793 \text{ m}^2$.

---

30 janvier 2016

EXANA452 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2016.

Soit f la fonction définie par $f(x) = 3e^{\frac{1}{2}\tan x}\cos x$.

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

b) Déterminer la parité éventuelle et la période éventuelle de f.

c) Calculer les limites à gauche et à droite de f en $\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{3\pi}{2}$.

d) Calculer $f'(x)$.

e) Déterminer une équation cartésienne de la tangente au graphique de f au point d'abscisse π.

f) Déterminez les zéros de f'.

g) Après avoir étudié le signe de $f'(x)$, tracer le graphique de f dans $[0,3\pi]$ en utilisant les résultats précédents (on pourra éventuellement utiliser l'approximation $e^x \simeq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$).

Solution proposée par Jacques Collot

$(a)\ Dom\ f:\mathbb{R}\setminus\left\{\left(k\frac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right)\right\}$

$(b)\ f(-x)=3e^{\frac{1}{2}\tan(-x)}\cos(-x)=3e^{-\frac{1}{2}\tan x}\cos x\Rightarrow$ ni paire, ni impaire

La période de $\tan x$ est de π et la période de $\cos x$ est de 2π.

La période de $f(x)$ est donc de 2π qui est le ppcm des deux périodes

$$(c)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}3e^{\frac{1}{2}\tan x}\cos x=[\infty\times 0]=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{e^{\frac{1}{2}\tan x}}{\frac{1}{\cos x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Hospital}}3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{e^{\frac{1}{2}\tan x}.\frac{1}{2}.\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\cos^2 x}.(-\sin x)}=\frac{3}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\overbrace{e^{\frac{1}{2}\tan x}}^{+\infty}}{\underbrace{\sin x}_{1}}=+\infty\Rightarrow \mathrm{AV}_{1,\,G}\equiv x=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}3e^{\frac{1}{2}\tan x}\cos x=[\infty\times 0]=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{e^{\frac{1}{2}\tan x}}{\frac{1}{\cos x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Hospital}}\frac{3}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\overbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{2}\tan x}^{-\infty}}}^{0}}{\underbrace{\sin x}_{1}}=0\Rightarrow \text{Point d'arrêt à droite en } x=\frac{\pi}{2}$$

On fait les mêmes opérations, *mutatis mutandis*, en $x=\frac{3\pi}{2}$, et on trouve :

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}f(x)=-\infty\Rightarrow \mathrm{AV}_{2,\,G}\equiv x=\frac{3\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+}f(x)=0\Rightarrow \text{Point d'arrêt à droite en } x=\frac{3\pi}{2}$$

$$(d)\left(3e^{\frac{1}{2}\tan x}\cos x\right)'=3\left(e^{\frac{1}{2}\tan x}.\frac{1}{2}.\frac{1}{\cos^2 x}.\cos x-e^{\frac{1}{2}\tan x}.\sin x\right)=\frac{3}{2}\frac{e^{\frac{1}{2}\tan x}}{\cos x}(1-2\sin x\cos x)$$

$$=\frac{3}{2}\frac{e^{\frac{1}{2}\tan x}}{\cos x}(1-\sin 2x)$$

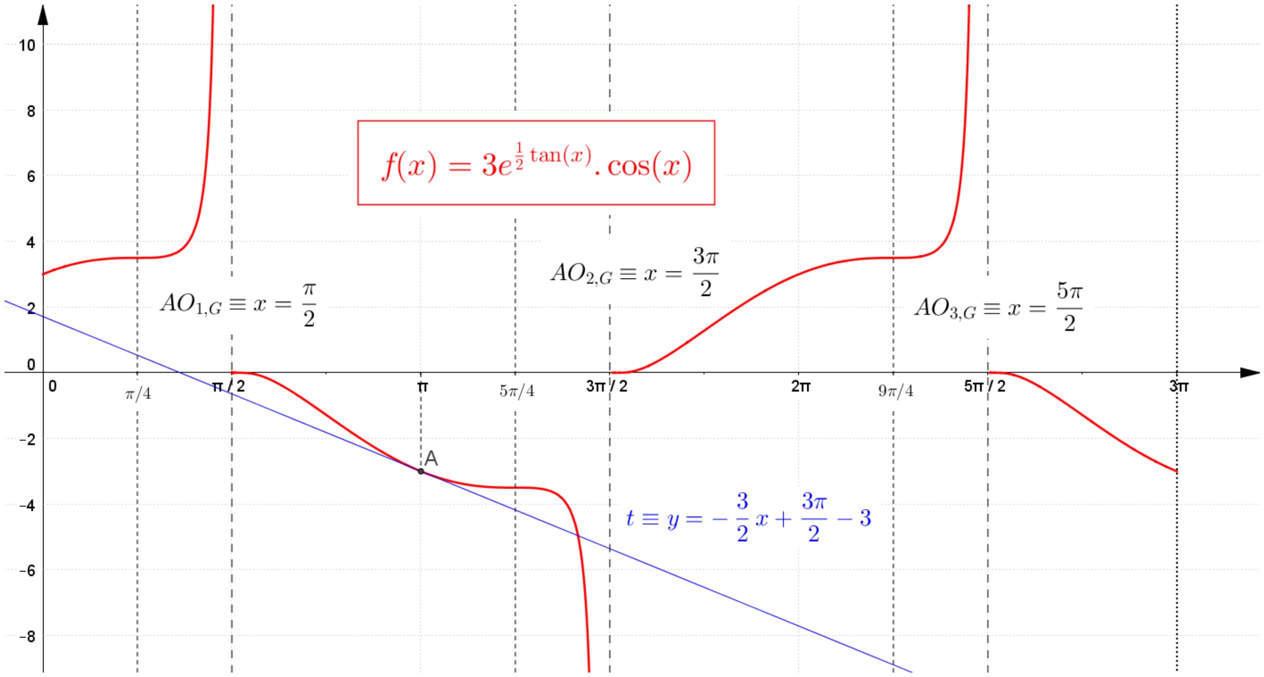
(e) Tangente en $x=\pi$

$$f(\pi)=-3;\quad f'(\pi)=-\frac{3}{2}\Rightarrow t\equiv y+3=-\frac{3}{2}(x-\pi)\Rightarrow t\equiv y=-\frac{3}{2}x+\frac{3\pi}{2}-3$$

$$(f)\ f'(x)=0\Rightarrow 1-\sin 2x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+2\pi$$

(g) <u>Tableau récapitulatif</u> pour $x \in [0, 3\pi]$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{9\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{2}$		3π
$1-\sin 2x$	+	+	0	+	+	+	0	+	+	+	0	+	+	+	+
$\cos x$	+	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−
f'	+	+	0	+	/	−	0	−	/	+	0	+	/	−	−
f	3	↗	PI	↗	$AV\|0$	↘	PI	↘	$AV\|0$	↗	PI	↗	$AV\|0$	↘	−3



EXANA453 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2016.

Calculer (en justifiant les calculs) :

a) $\displaystyle\int \frac{2+\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{1,8} x\lfloor x^2\rfloor\,dx$ où $\lfloor x\rfloor$ désigne le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x

---

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

a) Ecrivons l'intégrale comme la somme de deux intégrales, dont la première est immédiate, et faisons une intégration par parties de la deuxième :

$$\begin{aligned}
\int \frac{2+\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx &= 2\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx + \int x^{-\frac{1}{3}}\ln x\ dx \\
& \qquad \text{IPP avec } \begin{cases} f'(x) = x^{-\frac{1}{3}} & \Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} \\ g(x) = \ln x & \Leftrightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \\
&= 2\frac{3}{2}\,x^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{3}{2}\,x^{\frac{2}{3}}\ln x - \frac{3}{2}\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx\right) \\
&= 3x^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln x - \frac{9}{4}x^{\frac{2}{3}} + C \\
&= \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln x - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2} + C \\
&= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}\,(2\ln x - 1) + C
\end{aligned}$$

b) Déterminons d'abord les valeurs de la fonction « sol » (« floor » en Anglais) du carré de l'argument dans l'intervalle $[0\,;1{,}8]$:

$$\lfloor x^2\rfloor = \begin{cases} 0 & x \in [0\,;1[\\ 1 & x \in [1\,;\sqrt{2}[\\ 2 & x \in [\sqrt{2}\,;\sqrt{3}[\\ 3 & x \in [\sqrt{3}\,;1{,}8] \end{cases}$$

On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^{1,8} x\lfloor x^2\rfloor\,dx &= \int_1^{\sqrt{2}} x\,dx + 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} x\,dx + 3\int_{\sqrt{3}}^{1,8} x\,dx \\
&= \frac{1}{2}[x^2]_1^{\sqrt{2}} + [x^2]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} + \frac{3}{2}[x^2]_{\sqrt{3}}^{1,8} \\
&= \frac{1}{2}(2-1) + (3-2) + \frac{3}{2}(3{,}24-3) \\
&= 0{,}50 + 1{,}00 + 0{,}36 \\
&= 1{,}86
\end{aligned}$$

---

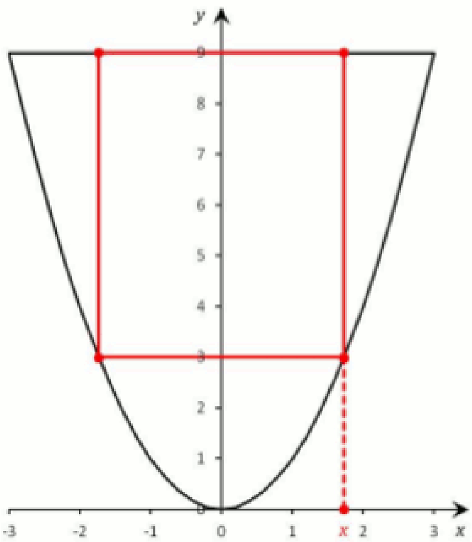
30 janvier 2016

EXANA454 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2016.

Une entreprise fabrique des objets à partir de plaques d'acier. Lors de la fabrication, il reste des morceaux. Chaque morceau peut être décrit, dans un repère orthonormé bien choisi Oxy, comme étant la région comprise entre la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite $y = 9$. On souhaite récupérer de chaque morceau une plaque rectangulaire dont deux sommets sont situés sur la parabole et les deux autres sur la droite d'équation $y = 9$. Calculer l'aire maximale d'une telle plaque rectangulaire.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

C'est un problème d'optimisation simple. La situation est schématisée dans la figure ci-contre.



Fonction objectif

L'aire du rectangle est

$$A(x) = 2x(9 - x^2) = 18x - 2x^3 \qquad (0 < x < 3)$$

Optimisation

$$A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 18x - 2x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 3$$

Il s'en suit que $x_{opt} = \sqrt{3}$ et que $A_{max} = 2\sqrt{3}(9 - 3) = 12\sqrt{3}$.

Réponse

L'aire maximale du rectangle est de $12\sqrt{3}$ unités d'aire.

---

30 janvier 2016

EXANA455 – POLTECH, Umons, Mons, juillet 2016.

Soent $f_1(x)=\ln x$ et $f_2(x)=\ln(ax)$ avec $a>1$. Déterminez la valeur de a afin que l'aire comprise entre les deux courbes pour $x\in[1,2]$ soit égale à la moitié de celle comprise entre $f_2(x)$ et l'axe x pour $x\in[1,2]$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

Il faut donc que $S_2=2S_1 \Rightarrow \int_1^2 \ln(ax)\,dx = 2\left(\int_1^2 (\ln(ax)-\ln x)dx\right) \Rightarrow \int_1^2 \ln(ax)\,dx = 2\int_1^2 \ln x\,dx$

$$\text{Or}\begin{cases}\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C\\ \int \ln(ax)\,dx=\dfrac{1}{a}\int \ln(ax)\,d(ax)=\dfrac{1}{a}(ax\ln(ax)-ax)=x\ln(ax)-x+C\end{cases}$$

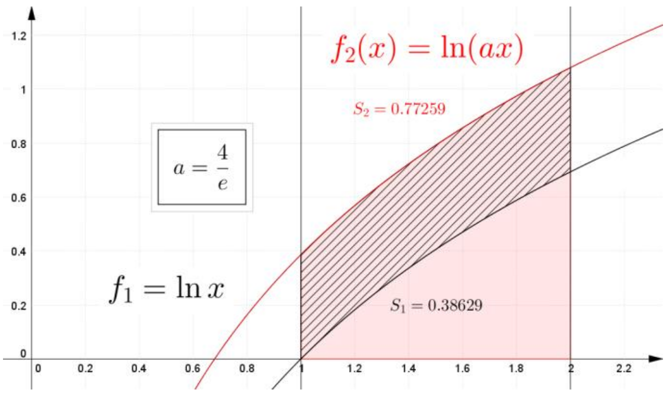
$\Rightarrow \quad [x\ln(ax)-x]_1^2 = 2[x\ln x - x]_1^2$

$\Rightarrow \quad (2\ln 2a-2)-(\ln a-1)=2[(2\ln 2-2)-(\ln 1-1)]$

$\Rightarrow \quad 2\ln 2a-\ln a-1=4\ln 2-2$

$\Rightarrow \quad 2\ln 2+2\ln a-\ln a=4\ln 2-2$

$\Rightarrow \quad \ln a = 2\ln 2-1 \Rightarrow a=e^{2\ln 2-1}=e^{\ln a}e^{-1} \Rightarrow \boxed{a=\dfrac{4}{e}}$



---

2 février 2017

EXANA456- POLTECH, Umons, Mons, juillet 2016.

On considère les courbes $g(x) = x^2$ et $h(x) = e^{1-x}$ et on note a l'abscisse du point d'intersection entre ces courbes.

Soit la fonction $f(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } o \leq x \leq a \\ h(x) & \text{si } x > a \end{cases}$$

On demande de :

1. déterminer graphiquement la valeur de a.
2. déterminer la valeur de b pour que

$$\int_0^b f(x)\,dx = 1$$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

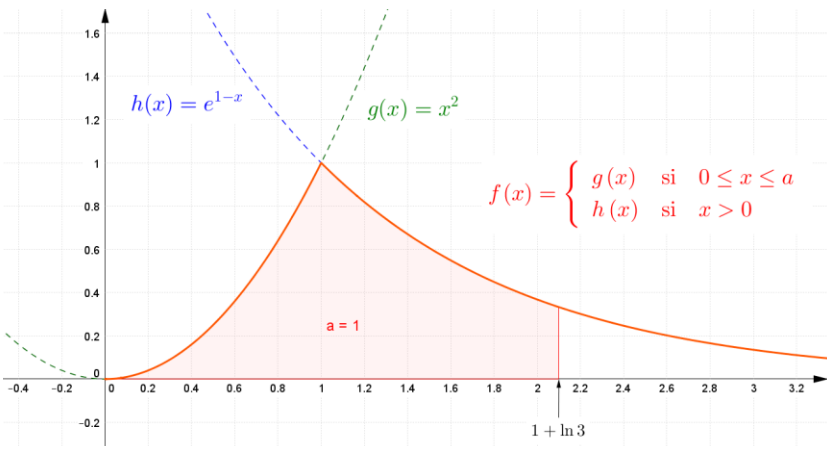
1) $g(x) \cap h(x) = \{(1,1)\}$

2) Supposons $b = 1$: $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

Ce qui implique que $b > 1$ et que $\int_1^b h(x) = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \quad \int_1^b e^{1-x} dx = \left[-e^{1-x}\right]_0^b = -e^{1-b} + e^0 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad e^{1-b} = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - b = \ln\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{b = 1 + \ln 3}$$



---

2 février 2017

EXANA457- POLTECH, Umons, Mons, juillet 2016.

Etudiez avec précision la fonction

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-4}{2x}\right)+x$$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

$(1)\ CE:\ x\neq 0$ et $\dfrac{x-4}{2x}>0$

x		0		4	
$\frac{x-4}{2x}$	$+$	/	$-$	0	$+$

$\Rightarrow\quad Dom\ f:\leftarrow;0[\cup]4;\rightarrow$

(2) <u>AV</u>

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\ln\frac{x-4}{2x}+x\right)=+\infty\Rightarrow \text{AV}_1\equiv x=0$$

$$\lim_{x\to 4^+}\left(\ln\frac{x-4}{2x}+x\right)=-\infty\Rightarrow \text{AV}_2\equiv x=4$$

<u>AO</u>

$$\left.\begin{array}{l} a=\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(\left(\ln\frac{x-4}{2x}\right).\frac{1}{x}+1\right)=1 \\ b=\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(\ln\frac{x-4}{2x}+x-x\right)=-\ln 2 \end{array}\right\}\Rightarrow \text{AO}\equiv y=x-\ln 2$$

$$(3)\ f'(x)=\frac{1}{\frac{x-4}{2x}}.\frac{2x-(x-4).2}{(2x)^2}+1=\frac{4}{x(x-4)}+1$$

La dérivée première est toujours positive sur son domaine

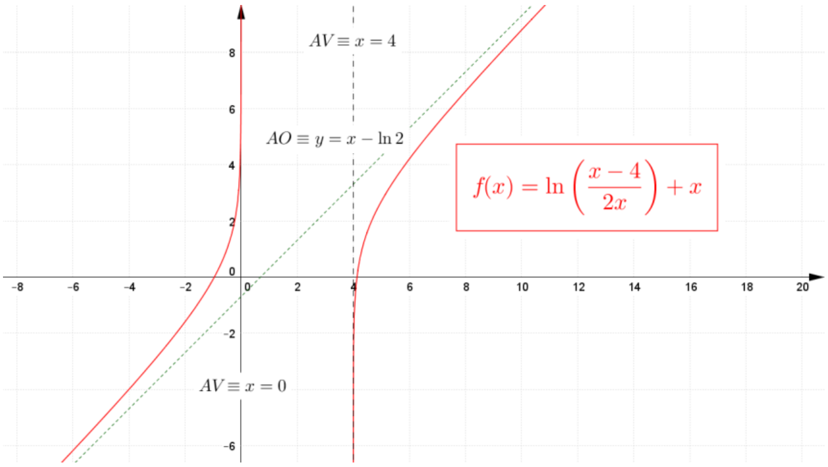
$\Rightarrow f$ est toujours croissante.

$$f''(x)=4\left(\frac{1}{x^2-4x}\right)'=4\frac{-(2x-4)}{x^2-4x}=-8\frac{x-2}{x^2-4x}$$

x		0		2		4	
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f''	$+$	/	/	/	/	/	$-$

(4) <u>Récapitulatif</u>

x		0		4	
f'	$+$	/	/	/	$+$
f''	$+$	/	/	/	$-$
f	$\nearrow$ $\cup$	AV_1	/	AV_2	$\nearrow$ $\cap$



2 février 2017

EXANA458 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2017.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 2e^{-x}}{e^x + 1}\right)$$

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2) Déterminer les zéros de f.
3) Déterminer les équations des éventuelles asymptotes de f.
4) Calculer $f'(x)$.
5) Déterminer une équation cartésienne de la tangente au graphique de f au point d'abscisse 0.
6) Déterminer les zéros de f'.
7) Après avoir étudié le signe de $f'(x)$, tracer le graphique de f en utilisant les résultats précédents.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

1) Domaine

CE : $\dfrac{e^x + 2e^{-x}}{e^x + 1} > 0$ Vérifié $\forall x \in \mathbb{R}$ puisque numérateur > 0 et dénominateur > 1.

$\Rightarrow \text{dom } f = \mathbb{R}$

2) Racines

$$f(x) = 0 \iff \frac{e^x + 2e^{-x}}{e^x + 1} = 1 \iff e^x + 2e^{-x} = e^x + 1 \iff e^{-x} = \frac{1}{2} \iff -x = \ln\frac{1}{2} \iff x = \ln 2$$

$\Rightarrow S = \{\ln 2\} \cong \{0{,}693\}$

3) Asymptotes

a) AV : Pas d'asymptotes verticales puisque f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) AH ou AO à droite :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x + 2e^{-x}}{e^x + 1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x(1 + 2e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-x})}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1 + 2e^{-2x}}{1 + e^{-x}}\right) = \ln\left(\frac{1+0}{1+0}\right) = \ln 1 = 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Asymptote horizontale à droite d'équation $y = 0$.

c) AH ou AO à gauche :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{e^x + 2e^{-x}}{e^x + 1}\right) = \ln\left(\frac{0+\infty}{0+1}\right) = +\infty$$

$\Rightarrow$ Pas d'AH à gauche.

S'il y a une AO à gauche, elle possède l'équation $y = ax + b$ avec :

$$\begin{aligned}a &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \left[\frac{+\infty}{-\infty}\right] \overset{\text{Hospital}}{\triangleq} \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{1}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-4e^x + e^{2x} - 2}{(e^x + 1)(e^{2x} + 2)}\right) = \frac{0 + 0 - 2}{(0+1)(0+2)} = \frac{-2}{+2} = -1\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'expression pour $f'(x)$ que nous allons calculer au point 4) ; et

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(\frac{e^x+2e^{-x}}{e^x+1}\right)+\ln e^x\right) \\ &= \lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{e^x+2e^{-x}}{e^x+1}\,e^x\right) = \lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{e^{2x}+2}{e^x+1}\right) = \ln\frac{0+2}{0+1} = \ln 2 \end{aligned}$$

⇒ Asymptote oblique à gauche d'équation $y = -x + \ln 2$.

4) Dérivée première

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x+1}{e^x+2e^{-x}}\cdot\frac{(e^x+1)(e^x-2e^{-x})-(e^x+2e^{-x})e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^{2x}-2+e^x-2e^{-x}-e^{2x}-2}{(e^x+1)(e^x+2e^{-x})} = \frac{-4+e^x-2e^{-x}}{(e^x+1)(e^x+2e^{-x})} = \frac{e^{-x}(-4e^x+e^{2x}-2)}{(e^x+1)(e^x+2e^{-x})} \\ &= \frac{-4e^x+e^{2x}-2}{(e^x+1)(e^{2x}+2)} \end{aligned}$$

5) Tangente au graphique de f au point d'abscisse 0

Equation cartésienne de la tangente : $t \equiv y - f(0) = f'(0).(x-0)$ avec

$f(0) = \ln\left(\frac{1+2}{1+1}\right) = \ln\frac{3}{2}$ et $f'(0) = \frac{-5}{2.3} = -\frac{5}{6}$

⇒ $t \equiv y = -\frac{5}{6}x + \ln\frac{3}{2}$

6) Croissance, décroissance et extrema

$f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{2x} - 4e^x - 2 = 0$

Posons $e^x = t \quad\Leftrightarrow\quad x = \ln t$ avec $t > 0$:

On trouve l'équation en t : $t^2 - 4t - 2 = 0$

$\Delta = 24 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{6} \quad\Rightarrow\quad t_{1,2} = \frac{1}{2}(4 \pm 2\sqrt{6}) = \begin{cases} t_1 = 2+\sqrt{6} \\ t_2 = 2-\sqrt{6} \cong -0{,}449 \text{ à rejeter} \end{cases}$

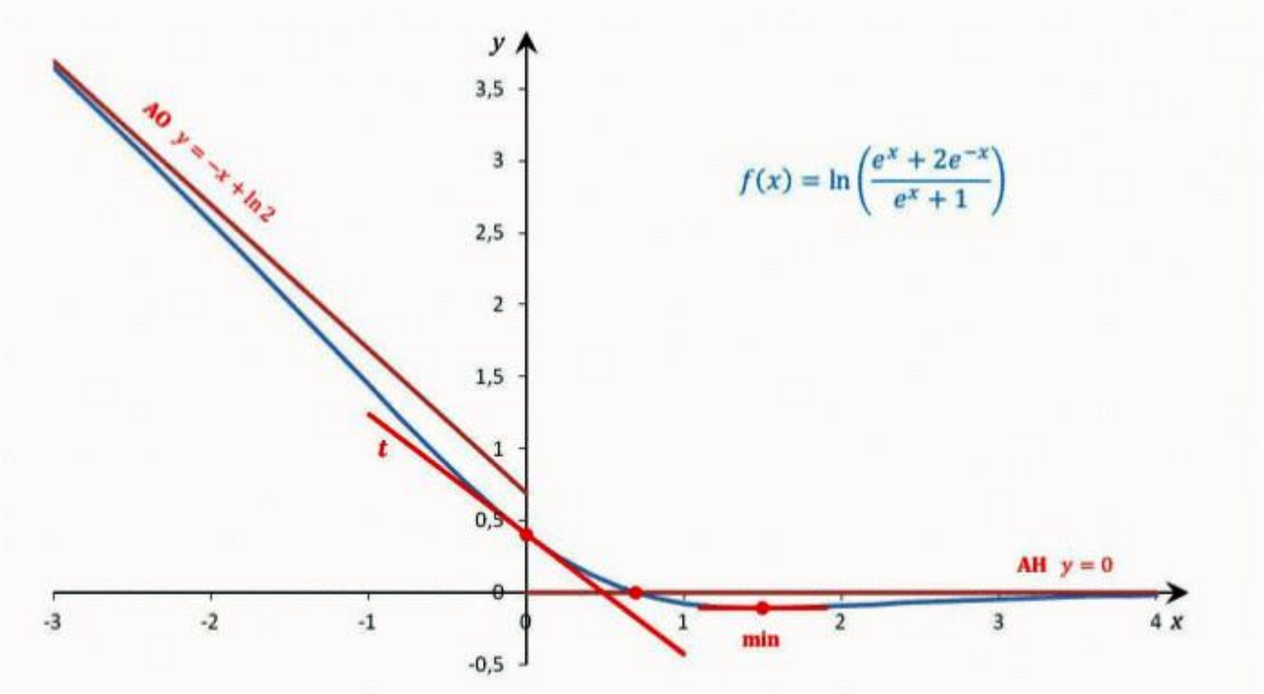
La dérivée première possède une seule racine

$x_m = \ln(2+\sqrt{6}) \cong 1{,}493$

Il s'agit bien d'un minimum, avec $f(x_m) \cong -0{,}1065$, puisque :

x		x_m	
f'	$-$	0	$+$
f	↘	min	↗

7) Graphique



06 septembre 2017

EXANA459 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2017.

1) Calculer :

$$\int \frac{2x^3}{x^2 - x - 2}\, dx$$

Aide : commencer par effectuer la division de $2x^3$ par $x^2 - x - 2$.

2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ possédant une dérivée seconde continue. On pose

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \; dx \qquad K = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \; \cos x \; dx$$

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \sin x \; dx \quad M = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) + f''(x)) \sin x \; dx$$

a) Calculer K en fonction de J , $f(-\pi)$ et $f(\pi)$.
b) Calculer K en fonction de L.
c) Calculer M en fonction de $f(-\pi)$ et $f(\pi)$.
d) Calculer M lorsque $f(x) + f''(x) = \sin x$.
e) Dans le cas où $f(x) + f''(x) = \sin x$, l'égalité $f(-\pi) = f(\pi)$ est-elle possible ? Justifiez votre réponse.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

1) Division euclidienne de l'intégrant donne :

$$\frac{2x^3}{x^2 - x - 2} = 2x + 2 + \frac{6x + 4}{x^2 - x - 2}$$

Décomposition en fractions rationnelles élémentaires donne :

$$\frac{6x + 4}{x^2 - x - 2} = \frac{6x + 4}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{2}{3}\frac{1}{x + 1} + \frac{16}{3}\frac{1}{x - 2}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3}{x^2 - x - 2}\, dx &= \int (2x + 2)\, dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x + 1}\, dx + \frac{16}{3}\int \frac{1}{x - 2}\, dx \\ &= x^2 + 2x + \frac{2}{3}\ln|x + 1| + \frac{16}{3}\ln|x - 2| + C \\ &= x(x + 2) + \frac{2}{3}\ln|x + 1| + \frac{16}{3}\ln|x - 2| + C \end{aligned}$$

2) Répondons successivement aux cinq questions.

a) Intégration par parties dans l'expression pour K :

$$K = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \; \cos x \; dx = [f(x) \cos x]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \; dx = -f(\pi) + f(-\pi) + J$$

Donc : $\boxed{K = J - f(\pi) + f(-\pi)}$

b) Intégration par parties dans l'expression pour L :

$$L=\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\sin x \ dx = [f'(x)\sin x]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \ \cos x \ dx = 0-0-K$$

Donc : $\boxed{K=-L}$

c) $M=J+L=(K+f(\pi)-f(-\pi))+(-K)$

Donc : $\boxed{M=f(\pi)-f(-\pi)}$

d) Si $f(x)+f''(x)=\sin x$, alors :

$$M=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x \ dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\ dx=\frac{1}{2}2\pi-\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}2.\cos 2x\, dx=\pi-\frac{1}{4}[\sin 2x]_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

e) Non, puisqu'alors on aurait selon c) que $M=0$ tandis que d) montre que $M=\pi$.

---

06 septembre 2017