Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 48

EXANA480 – EXANA489

http://matheux.ovh

Jacques Collot
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

Septembre 2017

EXANA480 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2017.

1) Calculer $\int \arcsin 17x\, dx.$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes x et y, on considère la courbe $\mathscr{C}_1 \equiv y = 2x^3$ et la courbe $\mathscr{C}_2 \equiv 2x^3 + \dfrac{(\ln(2x-2))^5}{2x-2} \quad (x>1)$

a) Calculer $\int \dfrac{(\ln(2x-2))^5}{2x-2}\, dx.$

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

c) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la surface comprise entre les deux courbes et les droitesµ $x = \dfrac{4}{3}$ et $x = 2.$

---

1) $I = \int \arcsin 17x\, dx$

Intégration par parties : $\begin{array}{lll} f' = 1 & \Rightarrow & f = x \\ g = \arcsin 17x & \Rightarrow & g' = \dfrac{17}{\sqrt{1-17^2x^2}} \end{array}$

$$\Rightarrow I = x.\arcsin 17x - \underbrace{\int \frac{17x}{\sqrt{1-17^2x^2}}\, dx}_{I_1}$$

$I_1 = \int \dfrac{17x}{\sqrt{1-17^2x^2}}\, dx.$ On pose : $t = 1-17^2x^2 \Rightarrow -2\times 17^2 x\, dx$

$$\Rightarrow I_1 = -\frac{1}{34}\int t^{-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{2}{34} t^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{17}\sqrt{1-17^2x^2}$$

$$\boxed{I = x.\arcsin 17x + \frac{1}{17}\sqrt{1-17^2x^2} + C}$$

2) a) $I=\int \frac{(\ln(2x-2))^5}{2x-2}\,dx$ On pose : $t=\ln(2x-2)\Rightarrow dt=\frac{2dx}{2x-2}$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int t^5\,dt=\frac{t^6}{12}=\frac{1}{12}(\ln(2x-2))^6+C$$

b) $\mathscr{C}_1\cap\mathscr{C}_2\Rightarrow 2x^3=2x^3+\frac{(\ln(2x-2))^5}{2x-2}\Rightarrow \ln(2x-2)=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$

c) Il faut connaître la position relative des deux courbes dans l'intervalle considéré.

Si $x\in\left[\frac{4}{3};\frac{3}{2}\right[$, alors $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de $\mathscr{C}_2$ et si $x\in\left[\frac{3}{2};2\right[$ $\mathscr{C}_2$ est au-dessus de $\mathscr{C}_1$

On calcule donc : $\mathscr{A}=\left[\mathscr{C}_1-\mathscr{C}_2\right]_{4/3}^{3/2}+\left[\mathscr{C}_2-\mathscr{C}_1\right]_{3/2}^{2}$ ce qui donne :

$$\mathscr{A}=-\int_{4/3}^{3/2}\frac{(\ln(2x-2))^5}{2x-2}\,dx+\int_{3/2}^{2}\frac{(\ln(2x-2))^5}{2x-2}\,dx$$

$$=-\frac{1}{12}\left[(\ln(2x-2))^6\right]_{4/3}^{3/2}+\frac{1}{12}\left[(\ln(2x-2))^6\right]_{3/2}^{2}$$

$$=\frac{1}{12}\left\{-\left[0-\left(\ln\left(\frac{8}{3}-2\right)\right)^6\right]+\left[(\ln(4-2))^6-0\right]\right\}$$

$$=\frac{\ln^6\frac{2}{3}+\ln^6 2}{12}\simeq 9.6124\times10^{-3}$$

Cette faible valeur s'explique par le fait que dans l'intervalle considéré les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont très proches l'une de l'autre.

EXANA481 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2017.

On dispose de deux sources lumineuses. L'une est placée en un point P et est d'intensité lumineuse p candelas et l'autre est placée en un point Q et est d'intensité q candelas.
La distance entre les points P et Q est de 4 mètres. Sachant que l'éclairement E en lux en un point de $[P,Q]$ situé à une distance d d'un point d'intensité I est donné par la formule $E=\dfrac{I}{d^2}$ (E est lux, I en candelas et d en mètres) et que les éclairements des deux sources s'additionnent, déterminer à quelle distance du point P est situé le point A de $[P,Q]$ le plus faiblement éclairé.

Soit x la distance de A au point P, la distance de A à Q est alors de $4-x$.

Puisque les éclairements d'additionnent, on a : $E=\dfrac{p}{x^2}+\dfrac{q}{(4-x)^2}$

Pour déterminer le minimun, on dérive : $E'=-\dfrac{2p}{x^3}+\dfrac{2q}{(4-x)^3}$

On cherche les racines de E': $\dfrac{q}{(4-x)^3}=\dfrac{p}{x^3}$

$$\Rightarrow qx^3-p(4-x)^3=0\Rightarrow\left(\sqrt[3]{q}\,x-\sqrt[3]{p}\,(4-x)\right)\left(\sqrt[3]{q^2}\,x^2+\sqrt[3]{qp}\,(4-x)+\sqrt[3]{p^2}\,(4-x)^2\right)=0$$

• Le premier facteur donne : $\sqrt[3]{q}\,x=\sqrt[3]{p}\,(4-x)\Rightarrow x=\dfrac{4\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}}$

• Le deuxième facteur donne : $\sqrt[3]{q^2}\,x^2+\sqrt[3]{qp}\,(4-x)+\sqrt[3]{p^2}\,(4-x)^2=0$

On développe et on réarrange pour obtenir une équation du second degré en x :

$$\left(\sqrt[3]{q^2}+\sqrt[3]{p^2}\right)x^2-\left(\sqrt[3]{qp}+8\sqrt[3]{p^2}\right)x+4\sqrt[3]{qp}+16\sqrt[3]{p^2}=0$$

Le discriminant vaut :

$$\Delta=\left(\sqrt[3]{qp}+8\sqrt[3]{p^2}\right)^2-4\left(\sqrt[3]{q^2}+\sqrt[3]{p^2}\right)\left(4\sqrt[3]{qp}+16\sqrt[3]{p^2}\right)$$

$=\ldots=-16\left(\sqrt[3]{q}+63\sqrt[3]{p}\right)\sqrt[3]{q^2}\,\sqrt[3]{p}<0$ puisque p et q sont positifs.

Le deuxième facteur n'a donc pas de racine et est toujours positif.

Le signe de la dérivée est déterminé uniquement par le premier facteur. Ce qui donne le tableau de signe :

		$\dfrac{4\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}}$	
E'	$-$	0	$+$
E	$\searrow$	min	$\nearrow$

. On a donc bien un minimum.

Conclusion : Minimum pour $x=\dfrac{4\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}}$

Le 1 novembre 2017

EXANA482 – FACSA, ULG Liège, juillet 2017.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof.Eric J.M. DELHEZ,Dr. Francine MONJOIE : http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2017-09/question_analysesept2017_a_juillet_2010-2.pdf

---

Le 20 septembre 2017

EXANA483 – FACSA, ULG Liège, juillet 2017.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof.Eric J.M. DELHEZ,Dr. Francine MONJOIE : http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2017-09/question_analysesept2017_a_juillet_2010-2.pdf

---

Le 20 septembre 2017

EXANA484 – FACSA, ULG Liège, septembre 2017.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof.Eric J.M. DELHEZ,Dr. Francine MONJOIE : http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2017-09/question_analysesept2017_a_juillet_2010-2.pdf

---

Le 20 septembre 2017

EXANA485 – FACSA, ULG Liège, septembre 2017.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof.Eric J.M. DELHEZ,Dr. Francine MONJOIE : http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2017-09/question_analysesept2017_a_juillet_2010-2.pdf

---

Le 20 septembre 2017

EXANA486- FACSA, ULG Liège, septembre 2017.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof.Eric J.M. DELHEZ,Dr. Francine MONJOIE : http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2017-09/question_analysesept2017_a_juillet_2010-2.pdf

---

Le 20 septembre 2017

EXANA487- POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2017.

Solution proposée par Fabienne Zoetard

Le 16 octobre 2017

EXANA488 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2017.

Solution proposée par Fabienne Zoetard

Le 16 octobre 2017

EXANA489 – EPB, UCL, LLN, septembre 2017.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{4x^2-3}{4}e^{\frac{1}{1-x^2}}$.

1) Déterminer le domaine de défnition de la fonction f.

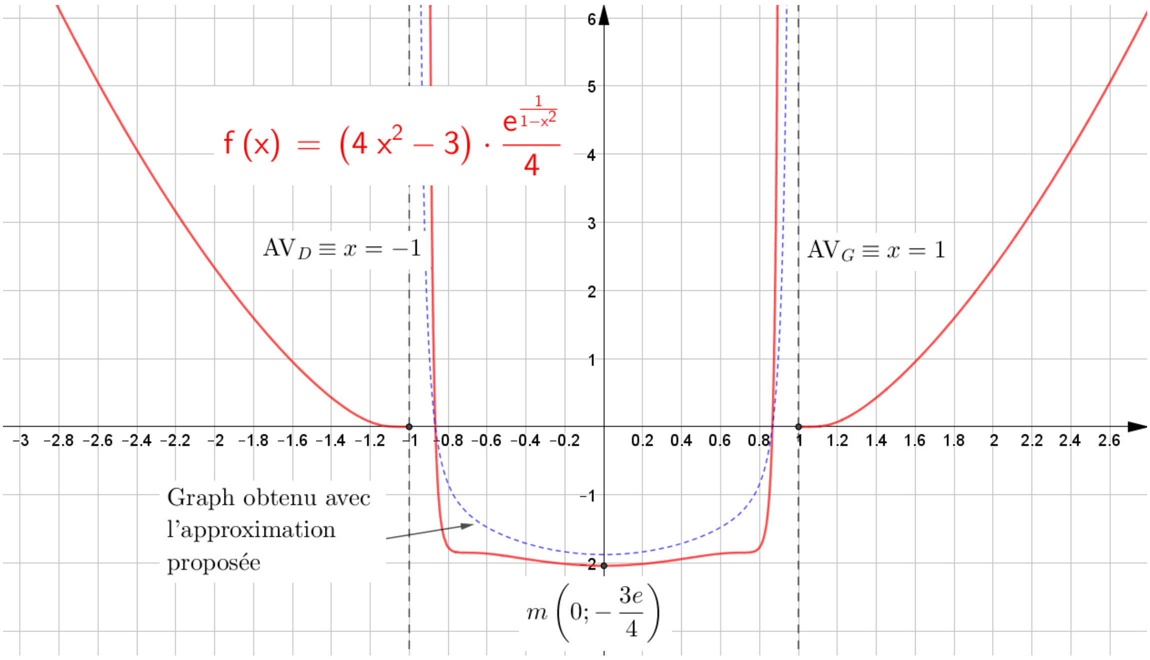
2) Calculer les limites à gauche et à droite de f en $+1$ et -1.

3) Calculer $f\,'(x)$.

4) Déterminer les équations des éventuelles asymptotes de f.

5) Après avoir étudier le signe de $f\,'(x)$, déterminer les coordonnées des points de maximum et des points de minimum de f.

6) Tracer le graphique de f en utilisant les résultats précédents (on pourra éventuellement utiliser l'approximation $e^x \simeq 1+x+\dfrac{1}{2}x^2$ si $-1<x<1$



1) Domaine $\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$

2) Remarquons que f est une fonction paire. Il suffit dnc de calculer les limites en $x=1$.

$$\lim_{x\to+1^+}\frac{4x^2-3}{4}e^{\frac{1}{1-x^2}}=\lim_{x\to+1^+}\frac{4x^2-3}{4}\lim_{x\to+1^+}e^{\frac{1}{1-x^2}}=\frac{1}{4}\lim_{x\to+1^+}e^{\frac{1}{0^-}}=0$$

$$\lim_{x\to+1^-}\frac{4x^2-3}{4}e^{\frac{1}{1-x^2}}=\lim_{x\to+1^-}\frac{4x^2-3}{4}\lim_{x\to+1^-}e^{\frac{1}{1-x^2}}=\frac{1}{4}\lim_{x\to+1^-}e^{\frac{1}{0^+}}=+\infty$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{4x^2-3}{4}e^{\frac{1}{1-x^2}}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{4x^2-3}{4}e^{\frac{1}{1-x^2}}=0$

3) $$f'(x)=2x.e^{\frac{1}{1-x^2}}+\frac{4x^2-3}{4}e^{\frac{1}{1-x^2}}\left(-\frac{1}{(1-x^2)^2}\right)(-2x)$$

$$=\ldots=\frac{x(2x^2-1)^2}{(1-x^2)^2}e^{\frac{1}{1-x^2}}$$

Les racines de f' sont $x=0,\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2},x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) En $x=1$, une asymptote verticale à gauche : $\mathrm{AV}_1\equiv x=1$

En $x=-1$, une asymptote verticale à droite : $\mathrm{AV}_1\equiv x=-1$

Pas de AH et pas de AO

5) Tableau de f'

x		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$+\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+1$	
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(2x^2-1)^2}{(1-x^2)^2}e^{\frac{1}{1-x^2}}$	$+$	$\nexists$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$\nexists$	$+$
f'	$-$	$\nexists$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	$\nexists$	$+$
f	$\searrow$	$0 \mid AV$	$\searrow$	I	$\searrow$	m	$\nearrow$	I	$\nearrow$	$AV \mid 0$	$\nearrow$

Le 28 octobre 2017