Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 8

EXANA080 – EXANA089

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Avril 04

EXANA080 – Louvain, septembre 2001.

Esquissez très sommairement le graphe de la fonction f définie par

$$f(x) = e^{-x} \left| \sin x \right|$$

a) Calculer la valeur de :

$$A = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx$$

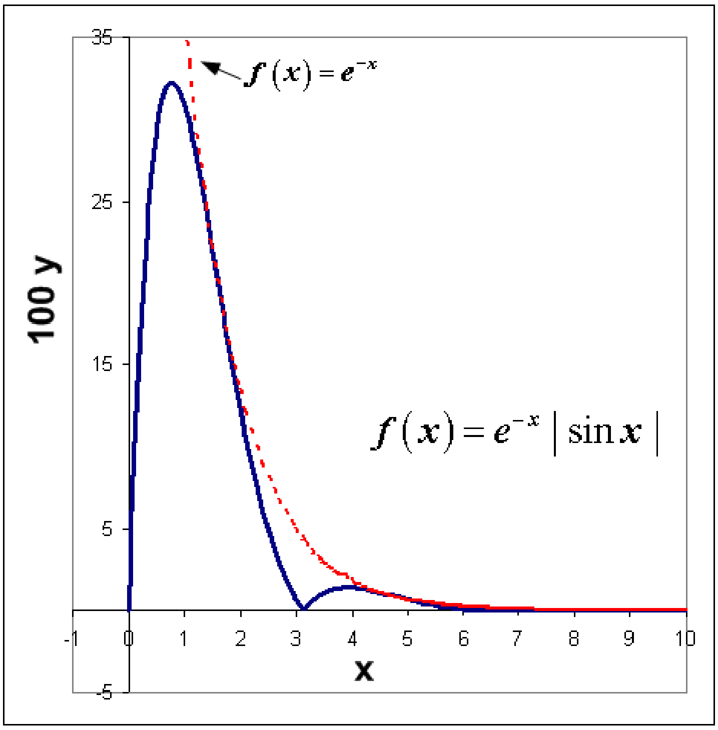
b) En vous basant sur le point précédent, calculer

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \left| \sin x \right| dx$$

c) Donner la valeur de

$$\int_0^{20\pi} e^{-x} \left| \sin x \right| dx$$

Esquissons la fonction. Pour aider, on représentera aussi la fonction e^{-x}.
Note : L'axe des y a été multiplié par 100.



a) $A = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx$

$$u = \sin x \quad \to \quad u' = \cos x$$

$$v' = e^{-x} \quad \to \quad v = -e^{-x}$$

$$A = \left[-e^{-x} \sin x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x \, dx$$

$$u = \cos x \quad \to \quad u' = -\sin x$$

$$v' = e^{-x} \quad \to \quad v = -e^{-x}$$

$$A = \left[-e^{-x}\left(\sin x + \cos x\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx$$

$$\to \quad A = \left[-\frac{e^{-x}}{2}\left(\sin x + \cos x\right)\right]_0^{\pi} = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$$

b) Il suffit de remarquer que :

$$B = \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \,|\sin x|\, dx = -\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \sin x \, dx$$

$$= -\left[-\frac{e^{-x}}{2}\left(\sin x + \cos x\right)\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{e^{-2\pi}+e^{-\pi}}{2}$$

De même : $C = \int_{2\pi}^{3\pi} e^{-x} \,|\sin x|\, dx = \dfrac{e^{-3\pi}+e^{-2\pi}}{2}$

Par conséquent : $\int_0^{3\pi} e^{-x} \,|\sin x|\, dx = A + B + C = \dfrac{1}{2} + e^{-\pi} + e^{-2\pi} + \dfrac{1}{2} e^{-3\pi}$

Et donc par extrapolation, on peut écrire :

$$D = \int_0^{20\pi} e^{-x} \,|\sin x|\, dx = \frac{1+e^{-20\pi}}{2} + \sum_{p=1}^{p=19} e^{-p\pi}$$

Le second terme est une progression géométrique :

$$\to \quad D = \frac{1+e^{-20\pi}}{2} + e^{-\pi} \frac{1-e^{-19\pi}}{1-e^{-\pi}} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\pi}-1} \approx 0.54516$$

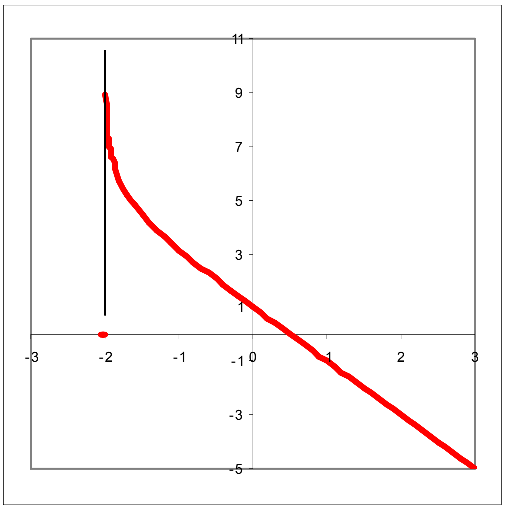
EXANA081 – Liège, juillet 2002.

Soit la fonction

$$f\left(x\right)=\ln\frac{e}{e^{bx}-c}$$

où b et c sont des paramètres réels strictement positifs et e = exp (1)

a) Déterminez les valeurs de b et c pour que $f(x)$ soit définie sur $]-2, +\infty[$ et admette les asymptotes $x = -2$ et $y = -2x + 1$ (en $+\infty$), i.e. pour que $f(x)$ admette la représentation graphique suivante.



b) calculer l'abscisse x en laquelle le graphe de $f(x)$ admet une tangente de pente à -4

Suggestion : $\ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y$ si x et y sont strictement positifs

a) b et c sont strictement positifs $\to f(x)$ est définie si $e^{bx} > c \to x > \dfrac{\ln c}{b}$.

Asympote verticale en $x=-2$ $\to$ $\dfrac{\ln c}{b} = -2$ $\to$ $c = e^{-2b}$

On peut donc réecrire la fonction : $f(x) = 1 - \ln\left(e^{bx} - c\right)$

La fonction admet une asymptote oblique $y = mx + p$ en $+\infty$

$$\to m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\ln\left(e^{bx}-c\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-be^{bx}}{e^{bx}-c} = -b$$

Et comme $m = -2 \to b = 2 \to c = e^{-4}$ et $f(x) = 1 - \ln\left(e^{2x} - e^{-4}\right)$

Mais, il faut aussi vérifier que $p = 1$

$$p = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) + 2x\right] = 1 - \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{2x} - e^{-4}\right) - 2x\right]$$

$$= 1 - \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{e^{2x} - e^{-4}}{e^{2x}} = 1 - \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 - e^{-(4+2x)}\right) = 1$$

b) $f'(x) = -4$ $\to$ $\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x} - e^{-4}} = -4$ $\to e^{2x} = 2\left(e^{2x} - e^{-4}\right) \to e^{2x} = 2e^{-4}$

$\to 2x = \ln\left(2e^{-4}\right) = \ln 2 - 4$

Finalment : $x = \dfrac{1}{2}\ln 2 - 2$

EXANA082 – Liège, juillet 2002.

On désire approcher la fonction $f(x) = x$ par une fonction du type $g(x) = \alpha + \beta \cos x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

a) Montrer que le choix $\alpha = \pi / 2$ revient à exiger que les moyennes de $f(x)$ et de $g(x)$ sur $[0, \pi]$ soient égales, c'est-à-dire que :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\,dx$$

b) Montrer que :

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} x\cos x\,dx = -2$$

c) En utilisant les résultats du point b) et en posant $\alpha = \pi / 2$, calculer l'erreur quadratique moyenne

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[f(x) - g(x)\right]^2 dx$$

et déterminer β pour que celle-ci soit minimale.

$a)$ Moyenne de $f(x) : \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \dfrac{1}{\pi}\left.\dfrac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \dfrac{\pi}{2}$

Moyenne de $g(x) : \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\alpha+\beta\cos x)\,dx = \dfrac{1}{\pi}(\alpha x+\beta\sin x)\big]_0^{\pi} = \alpha$

Si $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, les moyennes sont égales.

$b)$ 1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\pi+\frac{1}{2}\sin 2x\big]_0^{\pi}\right) = \frac{\pi}{2}$

2) Intégrons par parties

$u = x \quad \rightarrow \quad u' = 1$

$v' = \cos x \quad \rightarrow \quad v = \sin x$

$\displaystyle\rightarrow \int_0^{\pi} x\cos x\,dx = x\sin x\big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\,dx = 0+\cos x\big]_0^{\pi} = -2$

$c)$ Erreur quadratique moyenne :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x)-g(x)\right]^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[x-\frac{\pi}{2}-\beta\cos x\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x^2+\frac{\pi^2}{4}+\beta^2\cos^2 x-\pi x-2\beta x\cos x+\pi\beta\cos x\right)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(x^2+\frac{\pi^2}{4}+-\pi x\right)dx+\beta^2\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx-2\beta\int_0^{\pi}x\cos x\,dx+\pi\beta\int_0^{\pi}\cos x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi^3}{4}-\frac{\pi^3}{2}+\frac{\beta^2\pi}{2}+4\beta+0\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{12}+\frac{\beta^2\pi}{2}+4\beta\right)$$

On minimise l'erreur en annulant la dérivée par rapport à $\beta \rightarrow \ \beta\pi+4=0$

$\rightarrow \beta = -\dfrac{4}{\pi}$

Et comme la dérivée est négative si $\beta < -\dfrac{4}{\pi}$ et positive si $\beta > -\dfrac{4}{\pi}$,

on a bien un minimum

EXANA083 – Liège, septembre 2002.

Etudiez le graphe de la fonction

$$f(x) = \text{arc tan } \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

en discutant s'il y a lieu en fonction des valeurs du paramètre $a \geq 0$

En particulier, déterminez

- Le domaine de définition de f
- Le domaine de continuité de f
- Les asymptotes éventuelles
- Croissance / décroissance / extrema
- Concavité / points d'inflexion

Esquissez le graphe de f

$\underline{a = 0}$ La fonction n'est définie nulle part.

$\underline{a > 0}$

$$\left.\begin{aligned} &\text{dom arc tan } u = \mathbb{R} \\ &\text{dom } \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left]-a, a\right[\end{aligned}\right\} \rightarrow \text{dom} f = \left]-a, a\right[$$

$f(x)$ est définie et indéfiniment continûment dérivable sur $\left]-a, a\right[$

$\underline{\text{Asymptotes}}$: Calculons les limites aux extrémités de l'intervalle $\left]-a, a\right[$

$$\lim_{x \to -a^+} \text{arc tan } \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{y \to -\infty} \text{arc tan } y = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to a^-} \text{arc tan } \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{y \to +\infty} \text{arc tan } y = +\frac{\pi}{2}$$

$\rightarrow f$ est définie et continue sur $\left]-a, a\right[$ e n'a pas d'asymptote

Croissance, décroissance, extrema

$$f'(x)=\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{a^2-x^2}}\,\frac{\sqrt{a^2-x^2}-\dfrac{x(-x)}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}$$

$$=\frac{a^2-x^2}{a^2}\,\frac{a^2}{\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$f'(x)$ est strictement positive sur $]-a,a[$ et $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -a^+} f'(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to a^-} f'(x)=+\infty\end{cases}$

$\rightarrow f$ est strictement croissante sur $]-a,a[$ avec des tangentes verticales au graphe en $-a^+$ et a^-. En 0, la pente de la tangente vaut $f'(0)=\dfrac{1}{a}$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\frac{-2x}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Concavité, point d'inflexion

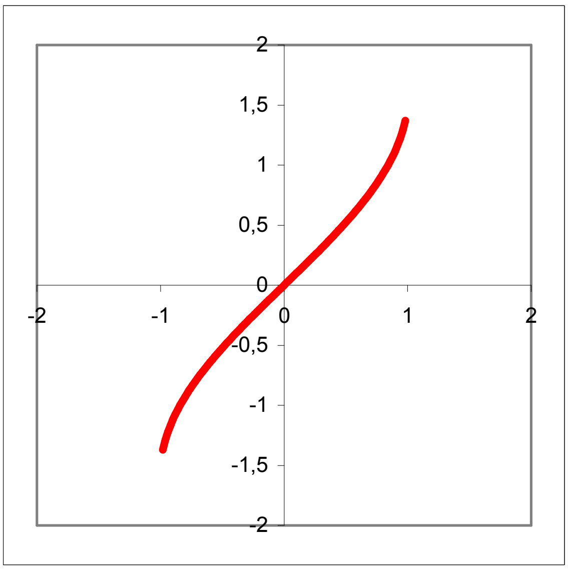
Tableau des signes

	$]-a,0[$	0	$]0,a[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$\rightarrow\ ]-a,0[$ concavité vers le bas, 0 point d'inflexion, $]0,a[$ concavité vers le haut

Conclusion

f est une fonction strictement croissante sur $]-a,a[$, maximale en $x=a$, minimale en $x=-a$. Point d'inflexion en $x=0$ à tangente d'équation $y=\dfrac{x}{a}$



EXANA084 – **Liège, septembre 2002.**

a) Calculer

$$\int_1^e x \ln x \, dx \qquad \text{où} \quad e = \exp(1)$$

b) Généralisez le résultat obtenu en a) en montrant que, pour $n \neq -1$

$$\int_1^e x^n \ln x \, dx = \frac{n\, e^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$$

c) Soit la fonction g définie par

$$g(x) = \int_1^x (2-t) \ln t \, dt$$

Déterminez x correspondant au maximum de $g(x)$ sur l'intervalle $[\,1, +\infty\,[$

a) Intégration par parties

$$u = \ln x \quad \to \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x \quad \to \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\to \int_1^e x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \left(\frac{e^2}{2} - 0 \right) - \frac{x^2}{4} \Big]_1^e = \frac{1}{4} \left(e^2 + 1 \right)$$

b) Intégration par parties

$$u = \ln x \quad \to \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x^n \quad \to \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (\text{puisque } n \neq -1)$$

$$\to \int_1^e x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x \Big]_1^e - \int_1^e \frac{x^n}{n+1} dx = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \Big]_1^e$$

$$= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \left(n \, e^{n+1} + 1 \right)$$

c) $g(x) = \int_1^x (2-t) \ln dt \quad \to \quad g'(x) = (2-x) \ln x$

Les zéros de $g'(x)$ sont $x = 1$ et $x = 2$

	1		2		$+\infty$
$\to$ Tableau des signes : $g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	

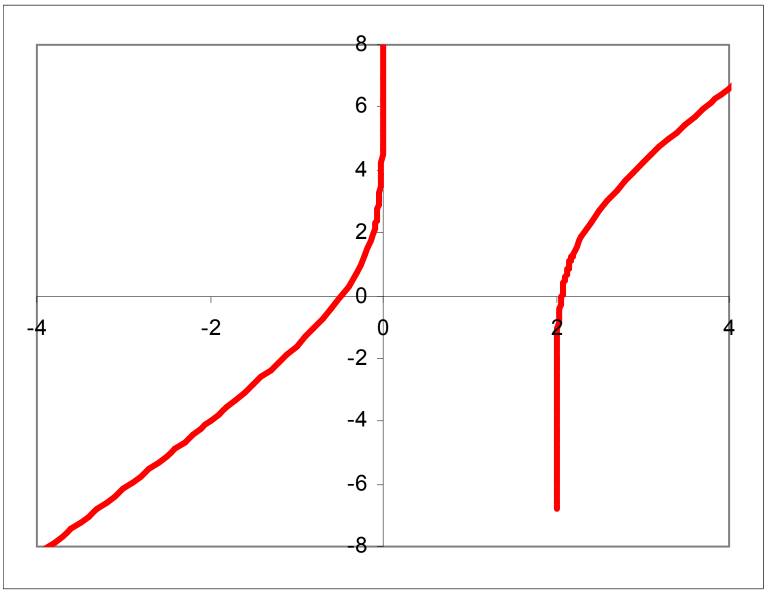
Donc $g(x)$ est maximale en $x = 2$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$

EXANA085 – Liège, juillet 2003.

On considère la fonction

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{x}\right) + \frac{2x}{a}$$

où a désigne un paramètre réel non nul. En utilisant une calculatrice graphique, on obtient la représentation suivante du graphe de f dans le cas particulier où $a = 1$.



a) Esquissez le graphique de f dans le cas où a désigne un paramètre réel strictement positif quelconque. Précisez, en justifiant, le domaine de définition de f, les limites caractéristiques et asymptotes, les extrema et changements de concavité éventuels.

b) Sans effectuer aucun calcul, esquissez le graphique de f dans le cas où a est strictement négatif.

a) La fonction f est définie si $\frac{1}{2} > \frac{a}{x}$ or $a > 0 \rightarrow x < 0$ ou $x > 2a$

La fonction f est indéfiniment continûment dérivable sur

$E =]-\infty, 0[\cup]2a, +\infty[$

Limites et asymptotes

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \ln\frac{1}{2} - \infty = -\infty \\
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{u\to+\infty} \ln u = +\infty \\
\lim_{x\to 2a^+} f(x) &= \lim_{u\to 0^+} \ln u + 4 = -\infty \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \ln\frac{1}{2} + \infty = +\infty
\end{aligned}
\rightarrow \text{Asymptotes verticales } \begin{cases} x = 0 \\ x = 2a \end{cases}$$

Recherchons s'il y a des asymptotes obliques

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{x}\right) + \frac{2}{a} = \frac{2}{a}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - \frac{2x}{a}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{x}\right) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

$\rightarrow$ Asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$: $y = \frac{2x}{a} - \ln 2$

Dérivées, variations et extrema

$$f'(x) = \frac{\frac{a}{x^2}}{\frac{1}{2} - \frac{a}{x}} + \frac{2}{a} = \frac{2a}{x^2 - 2ax} + \frac{2}{a} = \frac{2\left(a^2 + x^2 - 2ax\right)}{a\left(x^2 - 2ax\right)} = \frac{2(a-x)^2}{ax(x-2a)}$$

Comme la fonction est déginie sur E, on déduit que f' ne s'annule pas sur E et qu'elle reste strictement positive. $\rightarrow$ pas d'extremun sur E

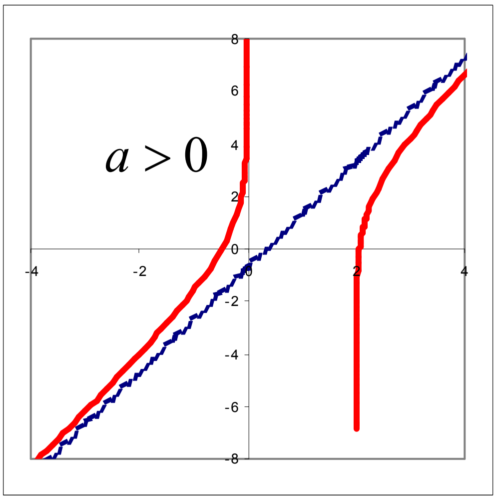
$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{2}{a}\,\frac{-2(a-x)x(x-2a) - (a-x)^2(2x-2a)}{x^2(x-2a)^2} \\
&= \frac{2}{a}\,\frac{(a-x)\left[-2x(x-2a) + 2(a-x)^2\right]}{x^2(x-2a)^2} \\
&= \frac{4a(a-x)}{x^2(x-2a)^2}
\end{aligned}$$

f'' ne s'annule pas sur E, est positive sur $]-\infty, 0[$ et négative sur $]2a, +\infty[$

$\rightarrow$ f convexe sur $]-\infty, 0[$ et concave sur $]2a, +\infty[$. Pas de point d'inflexion.

Tableau des variation de f

	$-\infty$		0^-	$2a^+$		$+\infty$
f'		$+$	$+\infty$	$+\infty$	$+$	
f''		$+$			$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow \cup$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow \cap$	$+\infty$
	AO		AV	AV		AO
	$y=\dfrac{2x}{a}-\ln 2$		$x=0$	$x=2a$		$y=\dfrac{2x}{a}-\ln 2$

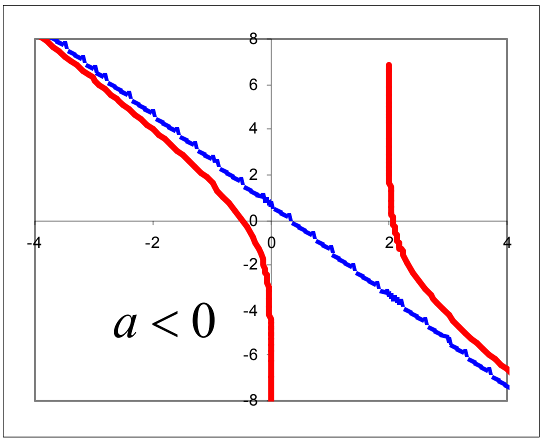


$b)$ En notant $f_a(x)=\ln\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{x}\right)+\dfrac{2x}{a}$

On a $\quad f_{-a}(-x)=f_a(x)$

Donc si $a<0$, la fonction est définie sur $E=\left]-\infty,2a\right[\cup\left]0,+\infty\right[$

Le graphique de $f_{-a}(x)$ est le symétrique de $f_a(x)$ par rapport à Oy



EXANA086 – Liège, juillet 2003.

On appelle « coefficients de Fourier » de la fonction f les paramètres a_0, a_1, a_2, …et b_1, b_2,….définis par

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \qquad k = 0,1,2,....$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \qquad k = 1,2,....$$

à condition que ces intégrales existent.

c) Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction $f(x) = x$
d) Montrez que les coefficients de Fourier d'une fonction paire de f sont donnés par

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \qquad k = 0,1,2,.....$$

$$b_k = 0 \qquad k = 1,2,........$$

$a)$ Calcul des a_k

$\underline{k=0}$ $\quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2} = 0$

$\underline{k=1,2,3....}$

Intégrons par parties

$u = x \qquad \rightarrow \quad u' = 1$

$v' = \cos(kx) \quad \rightarrow \quad v = \frac{\sin(kx)}{k}$

$$\rightarrow a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(kx)\,dx = \frac{x}{\pi}\left.\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(kx)}{k}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 + \left.\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{(-1)^k}{k^2}\right) = 0$$

Calcul des b_k

Intégrons par parties

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-x\left.\frac{\cos(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(kx)}{k}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k}\cos(k\pi) - \frac{\pi}{k}\cos(-k\pi) + \left.\frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= -\frac{2}{k}\cos(k\pi) = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

Conclusion

$a_k = 0 \qquad k = 0,1,2,.....$

$b_k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \qquad k = 1,2,3......$

$b)\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(kx)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx\right]$

La première intégrale du second membre devient en posant $x = -u$

$-\int_{+\pi}^{\pi} f(-u)\cos(-ku)\,du = \int_{0}^{\pi} f(u)\cos(ku)\,du$

Or $f(-u) = f(u)$ et $\cos(-u) = \cos u$

$\rightarrow\ a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$

$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(kx)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx\right]$

La première intégrale du second membre devient en posant $x = -u$

$-\int_{+\pi}^{0} f(-u)\sin(-ku)\,du = -\int_{0}^{\pi} f(u)\sin(ku)\,du$

Or $\sin(-u) = -\sin u$

$\rightarrow\ b_k = 0 \qquad k = 1, 2, 3.....$

EXANA087 – Liège, septembre 2003.

Etudier la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 + a^2}{x - a}$$

où a désigne un paramètre réel strictement positif.
En discutant s'il y a lieu en fonction de a, déterminer

e) Le domaine de définition de f
f) Les asymptotes éventuelles
g) Croissance / décroissance / extrema
h) Concavité / points d'inflexion.

Etablir le tableau des variations de f et esquisser le graphe de f.

$a)$ dom $f = \left]-\infty, a\right[\cup \left]a, +\infty\right[$

$b)$ <u>AV</u> $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty \;\rightarrow\;$ AV: $x = a$

<u>AH</u> Pas d'asymptote horizontale

<u>AO</u> $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+a^2}{x^2-ax} = 1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[f(x)-x\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a^2+ax}{x-a} = a$

$\rightarrow$ AO : $y = x + a$

$$c)\; f'(x) = \frac{2x(x-a)-(x^2+a^2)}{(x-a)^2} = \frac{x^2-2ax-a^2}{(x-a)^2}$$

Les zéros de f' sont : $x^2-2ax-a^2=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x_1 = a\left(1-\sqrt{2}\right) \\ x_2 = a\left(1+\sqrt{2}\right) \end{cases}$

On en déduit que $\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ sur } \left]-\infty, a\left(1-\sqrt{2}\right)\right[\cup \left]a\left(1+\sqrt{2}\right), +\infty\right[\\ f'(x) < 0 \text{ sur } \left]a\left(1-\sqrt{2}\right), a\right[\cup \left]a, a\left(1+\sqrt{2}\right)\right[\end{cases}$

$$d)\; f''(x) = \frac{(2x-2a)(x-a)^2-(x^2-2ax-a^2)2(x-a)}{(x-a)^4}$$

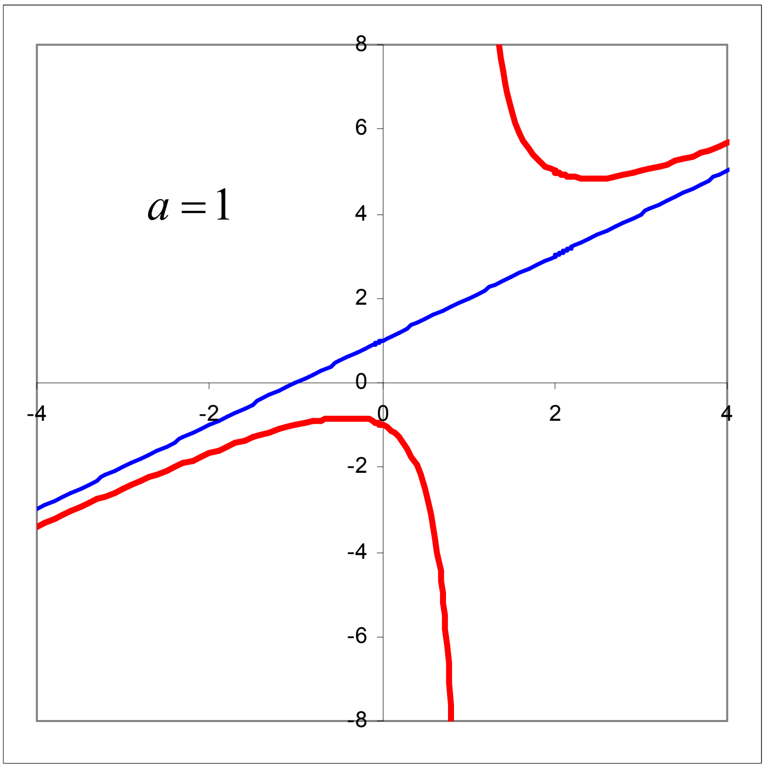
$$= \frac{4a^2}{(x-a)^3}$$

On en déduit que $\begin{cases} f'' < 0 \text{ si } x < a \;\rightarrow\; \text{concavité négative} \\ f'' > 0 \text{ si } x > a \;\rightarrow\; \text{concavité positive} \end{cases}$

Pas de point d'inflexion puisque f'' ne s'annule pas où elle existe.

Tableau des variations

	$-\infty$		$a\left(1-\sqrt{2}\right)$		a		$a\left(1+\sqrt{2}\right)$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	
f''		$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$	
f		$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	Min	$\nearrow$	
		$\cap$	$2a\left(1-\sqrt{2}\right)$	$\cap$		$\cup$	$2a\left(1+\sqrt{2}\right)$	$\cup$	
	AO $y=x+a$				AV $x=a$				AO $y=x+a$



EXANA088 – Liège, septembre 2003.

a) Calculer

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$$

et

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\, dx$$

b) Si on note

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}\, dx$$

où n est un naturel, a-t-on

$$I_n > I_{n+1}, \qquad I_n = I_{n+1} \quad \text{ou} \quad I_n < I_{n+1}$$

pour tout n ? Justifier sans évaluer aucune intégrale.

$$a)\ I_1 = \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int_0^1 \left[1-\frac{1}{1+x^2}\right] dx = 1-\left[\arctan x\right]_0^1 = 1-\frac{\pi}{4}$$

Calculons I_2 par parties

$$u = x \qquad \rightarrow \qquad u' = 1$$

$$v' = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2} \qquad \rightarrow \qquad v = -\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}$$

$$\rightarrow I_2 = \left[-\frac{x}{2\left(1+x^2\right)}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)} = -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

$$b)\ \forall x \in [\ 0,1\ ] \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n} > \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$$

$$\text{car } \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n} - \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n+1}} = \frac{x^4}{\left(1+x^2\right)^{n+1}} > 0$$

Or si $f(x) > 0 \ \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire de la surface delimitée par Ox, le graphe de $f(x)$ et les droites $x = a$ et $x = b$

Donc si $\dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n} > \dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$

alors $\displaystyle\int_a^b \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}dx > \int_a^b \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}dx$

$\rightarrow \qquad I_n > I_{n+1}$ pour tout naturel n

De fait on vérifie : $I_1 = 1-\dfrac{\pi}{4} \simeq 0.215 > 0.143 \simeq \dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4} = I_2$

EXANA089 – Bruxelles, juillet 2003.

Soit la fonction f de $\mathfrak{R}^+$ dans $\mathfrak{R}$ définie par

$$f(0) = 0$$
$$f(x) = x(\ln x)^2 \qquad \text{si} \qquad x > 0$$

Soit C la courbe d'équation $y = f(x)$

a) Vérifier que la fonction f est continue en 0
b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$: préciser les domaines de définition de f' et f''.
c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à C au point d'abscisse e.
d) Etablir le tableau de variations de f, f' et f'' contenant
   a. Les racines de f, f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines utiliser une décimale et $e \approx 2.72$)
   b. Les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$
   c. Les extrema de f, les domaines de croissance et de décroissance de f
   d. Les points d'inflexion de C et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de C.
e) Tracer soigneusement la courbe C d'après les résultats du d)

$a)\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln^2 x = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{\ln^2 x}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{2\ln x \dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} -\dfrac{2\ln x}{\dfrac{1}{x}} =$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} -\dfrac{2\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 2x = 0$

La fonction est donc bien continue en $x = 0$

$b)\ f'(x) = \ln^2 x + 2x\ln x\dfrac{1}{x} = \ln x(\ln x + 2)$

$\text{dom } f'(x) : x > 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = 0 \quad \text{si} \begin{cases} x = \dfrac{1}{e^2} \\ x = 1 \end{cases}$

$f''(x) = \dfrac{1}{x}(\ln x + 2) + \ln x\dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x}(\ln x + 1)$

$\text{dom } f''(x) : x > 0 \quad \text{et} \quad f''(x) = 0 \quad \text{si } x = \dfrac{1}{e}$

$c)\ f'(e) = \ln e(\ln e + 2) = 3 \qquad f(e) = e$

$\rightarrow$ Tangente $\equiv y - e = 3\,(x - e) \ \rightarrow\ y = 3x - 2e$

Tableau des variations

	0		$e^{-2} \simeq 0.1$		$e^{-1} \simeq 0.3$		1		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$	
			$\cap$		I		$\cup$