

Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 0

EXANA000 – EXANA009

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot

1 avril 03

EXANA001 – École polytechnique de Moscou.

Calculez : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{2x^2 + 1} \right)^{x^2}$

$$\begin{aligned} \text{Soit } y = x^2 \rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y+1}{2y+1} \right)^y &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4y+2} \right)^y \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^y \left(1 + \frac{1}{2y+1} \right)^y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } z = 2y+1 \rightarrow y &= \frac{z}{2} - \frac{1}{2} \\ \rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{z}{2} - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{\frac{z}{2} - \frac{1}{2}} &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{z}{2} - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{\frac{z}{2}} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 0 \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Solution proposée par Frédéric Baldan

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{2x^2+1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (e)^{x^2 \cdot \ln\left(\frac{x^2+1}{2x^2+1}\right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (e)^{x^2 \cdot \ln\left(\frac{x^2}{2x^2}\right)} = (e)^{+\infty \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)} = (e)^{-\infty} = 0$$

Résolu le 25 juin 2002

EXANA002 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2000.

La fonction gamma est définie, pour $\alpha > 1$ par la relation :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

a) Calculer $\Gamma(1)$.

b) Pour n entier > 0

a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x}$

b. Montrer, par une intégration par parties, que : $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

c. Dédire des points précédents la valeur de $\Gamma(n)$

d. On donne l'intégrale de Poisson :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

En déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$, en effectuant un changement de variable adéquat.

$$a) \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^0 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -[e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$$

$$b) 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$$

En appliquant n fois la règle de l'Hospital : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$

$$2) \Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad \text{et} \quad \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$$

Intégrons par parties : $f : x^n$ $f' : n x^{n-1}$
 $g' : e^{-x}$ $g : -e^{-x}$

$$\rightarrow \Gamma(n+1) = [-x^n e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} n x^{n-1} e^{-x} dx = n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n\Gamma(n)$$

$$3) \Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = (n-1)!\Gamma(1) = (n-1)!$$

$$c) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{Soit } t = \sqrt{x} \rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \rightarrow 2dt = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

Résolu le 25 juin 2002

**EXANA003 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types
2000-2001.**

On considère la fonction :

$$y = x^2 e^x$$

Démontrer que la n – ième dérivée est de la forme :

$$y^{(n)} = e^x (x^2 + \alpha_n x + \beta_n)$$

Déterminer a_n et b_n , en fonction de n .

$$y = x^2 e^x$$

$$y^{(1)} = 2x e^x + x^2 e^x = e^x (x^2 + 2x)$$

$$y^{(2)} = (2x + 2) e^x + (x^2 + 2x) e^x = e^x (x^2 + 4x + 2)$$

$$y^{(3)} = (2x + 4) e^x + (x^2 + 4x + 2) e^x = e^x (x^2 + 6x + 6)$$

$$y^{(4)} = (2x + 6) e^x + (x^2 + 6x + 6) e^x = e^x (x^2 + 8x + 12)$$

On peut établir le tableau suivant :

$y^{(n)}$	1	2	3	4	
α_n	2	4	6	8	$\rightarrow \alpha_n = 2n$
β_n	0	2	6	12	$\rightarrow \beta_n = (n-1)n$

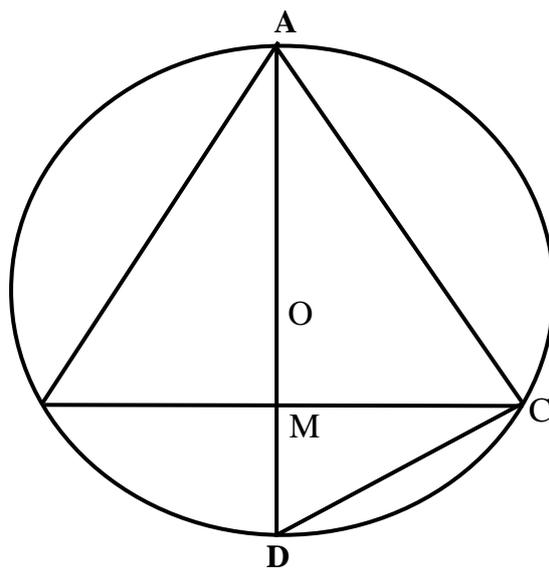
Conclusion : $y^{(n)} = e^x (x^2 + 2nx + (n-1)n)$

**EXANA004 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types
2000-2001.**

On donne un cercle de rayon $r = 1$.

Parmi les triangles isocèles inscrits dans ce cercle, quels sont ceux dont l'aire est maximale ?

Dans ce cas que vaut l'angle au sommet ?



Soit $x = OM$ et soit $H = AM$ la hauteur du triangle. On a $H = r + x = 1 + x$.

Par Pythagore :

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 \rightarrow AC^2 = (1+x)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 \quad \text{où } B \text{ est la base du triangle.}$$

$$AC^2 + CD^2 = (2r)^2 = 4$$

$$MC^2 + MD^2 = CD^2$$

$$\text{Donc } AC^2 + MC^2 + MD^2 = 4 \rightarrow (1+x)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + (1-x)^2 = 4$$

$$\rightarrow \frac{B^2}{2} = 2 - 2x^2 \rightarrow B = 2\sqrt{1-x^2}$$

$$\text{L'aire est donnée par : } S = \frac{2\sqrt{1-x^2}(1+x)}{2} = (1+x)\sqrt{1-x^2}$$

L'aire maximale se trouve en annulant la dérivée :

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{1-x^2} + (1+x) \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x) = \frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dS}{dx} = 0 \rightarrow 1-x-2x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -1 \text{ (à rejeter) et } x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow H = \frac{3}{2} \quad B = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad S = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Calcul de l'angle : si } \alpha = \hat{A}, \quad \tan \alpha = \frac{MC}{AM} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

C'est donc un triangle équilatéral.

**EXANA005 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types
2000-2001.**

Étudier la variation du volume d'un cône de révolution dont l'aire latérale reste égale à πa^2

Soit h : la hauteur, r le rayon de la base, et g la génératrice.

$$\text{On a : } g = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$\text{Soit aussi } S \text{ l'aire latérale. On a : } S = \pi r g = \pi a^2.$$

$$\text{Donc : } a^2 = r\sqrt{r^2 + h^2} \rightarrow h = \frac{1}{r}\sqrt{a^4 - r^4} \quad (1)$$

$$\text{Le volume } V \text{ est donné par : } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} r \sqrt{a^4 - r^4}$$

$$\text{Le volume est maximal si : } \frac{dV}{dr} = 0$$

$$\rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{\pi}{3} \left[\sqrt{a^4 - r^4} + \frac{r}{2\sqrt{a^4 - r^4}} (-4r^3) \right] = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{a^4 - r^4} = \frac{2r^4}{\sqrt{a^4 - r^4}} \rightarrow a^4 - r^4 = 2r^4 \rightarrow \boxed{r = \frac{a}{\sqrt[4]{3}}}$$

$$\text{Hauteur : (1) } \rightarrow h = \frac{\sqrt[4]{3}}{r} \sqrt{a^4 - \frac{a^4}{3}} \rightarrow \boxed{h = a \sqrt[4]{\frac{4}{3}}}$$

Résolu le 13 février 2003

EXANA006 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2001.

Considérons une tente en forme de cône circulaire droit, dont le rayon de base est R , et dont la hauteur vaut h (on ne considère pas de tapis de sol).

On impose un volume V de la tente. Quel rapport h / R faut-il choisir pour que l'aire du tissu utilisé soit minimale ?

Calculer R et h dans le cas où $V = 2 \text{ m}^3$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h \rightarrow h = \frac{3V}{\pi R^2}$$

$$S = \pi R g \quad \text{avec} \quad g = \sqrt{R^2 + h^2} \rightarrow S = \pi R \sqrt{R^2 + h^2}$$

$$\text{Donc } S = \pi R \sqrt{R^2 + \frac{9V^2}{\pi^2 R^4}} = \sqrt{\pi^2 R^4 + \frac{9V^2}{R^2}}$$

Pour obtenir l'aire minimale, on dérive :

$$\frac{dS}{dR} = \frac{1}{2\sqrt{\pi R^4 + \frac{9V^2}{R^2}}} \left(4\pi^2 R^3 - \frac{18V^2}{R^3} \right) = 0$$

$$\rightarrow 4\pi^2 R^3 - \frac{18V^2}{R^3} = 0 \rightarrow 4\pi^2 R^6 - 18V^2 = 0 \rightarrow 4\pi^2 R^6 - 18 \left(\frac{1}{3} \pi R^2 h \right)^2 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{h}{R} = \sqrt{2}}$$

$$\text{Si } V = 2 \text{ m}^3 \rightarrow h = \frac{3V}{\pi R^2} = \frac{3.2}{\pi \frac{h^2}{2}} \rightarrow \boxed{h = \sqrt[3]{\frac{12}{\pi}} = 1.563 \text{ m}}$$

$$\text{et } \boxed{R = \frac{h}{\sqrt{2}} = 1.11 \text{ m}}$$

Résolu le 13 février 2003

EXANA007 – Complément.

Calculer :
$$F(x) = \int \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + x + 2} dx$$

En divisant le numérateur par le dénominateur, on obtient :

$$F(x) = \int (x-1) dx + \int \frac{x+1}{x^2+x+2} dx.$$

On remarque que $(x^2+x+2)' = 2x+1 = x+1+x$, donc :

$$F(x) = \frac{(x-1)^2}{2} + \int \frac{d(x^2+x+2)}{x^2+x+2} - \int \frac{x}{x^2+x+2} dx.$$

De même, on remarque que : $\frac{1}{2}(x^2+x+2)' = \frac{1}{2}(2x+1) = x + \frac{1}{2}$, donc

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{(x-1)^2}{2} + \ln(x^2+x+2) - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+x+2)}{x^2+x+2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+2} \\ &= \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2+x+2) + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+2} \end{aligned}$$

Calculons le dernier terme :

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \frac{1}{2} \frac{4}{7} \int \frac{dx}{\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{7} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1}$$

On pose $t = \frac{2x+1}{\sqrt{7}} \rightarrow dx = \frac{\sqrt{7}}{2} dt$, d'où :

$$\frac{2}{7} \frac{\sqrt{7}}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan t = \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{7}}$$

Finalement :

$$F(x) = \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2+x+2) + \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C$$

Résolu le 13 février 2003

EXANA008 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2000.

- A) Calculer $F(x) = \int \sqrt{1-x^2} dx$
B) En déduire : $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$
C) Soit : $f(x) = \int_0^x \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} du$
calculer $f'(1/2)$
-

$$\begin{aligned} \text{A) } \int \sqrt{1-x^2} dx & \text{ soit } x = \sin t \rightarrow dx = \cos t dt \rightarrow t = \arcsin x \\ & \rightarrow \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = \frac{1}{2} \left(\int \cos 2t dt + \int dt \right) \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \int \cos 2t d2t + t \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2t + t \right) = \frac{1}{2} (\cos t \sin t + t) \\ & = \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B) } \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx & = \int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int \sqrt{1-x^2} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ & = -\frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + \arcsin x = \frac{1}{2} (\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}) \end{aligned}$$

$$\text{C) } f(x) = \int_0^x \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} du = \left[\frac{1}{2} (\arcsin u - x\sqrt{1-u^2}) \right]_0^x = \frac{1}{2} (\arcsin x - x\sqrt{1-x^2})$$

$$\text{Par conséquent : } f'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow{x=1/2} f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Résolu le 13 février 2003

EXANA009 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1999.

A) Rechercher l'ensemble de définition de la fonction :

$$F(x) = \int \frac{1}{3+5\cos x} dx$$

B) Calculer $F(x)$

C) En déduire la valeur de

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+5\cos x} du$$

A) $3+5 \cos x = 0 \rightarrow x = \pm 126.87^\circ + k360^\circ$

$$\text{dom } F(x) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 126.87^\circ + k360^\circ\}$$

$$B) F(x) = \int \frac{dx}{3+5 \cos x} = \int \frac{dx}{3+5 \frac{1+\tan^2 \frac{x}{2}}{1-\tan^2 \frac{x}{2}}} = \int \frac{1+\tan^2 \frac{x}{2}}{3+3 \tan^2 \frac{x}{2} + 5-5 \tan^2 \frac{x}{2}} dx$$

$$= 2 \int \frac{1+\tan^2 \frac{x}{2}}{8-2 \tan^2 \frac{x}{2}} d\left(\frac{x}{2}\right) = \int \frac{d \tan \frac{x}{2}}{4-\tan^2 \frac{x}{2}}$$

On pose $y = \tan \frac{x}{2} \rightarrow \int \frac{dy}{4-y^2} = \int \frac{dy}{(2-y)(2+y)} = \frac{1}{4} \int \frac{dy}{2-y} + \frac{1}{4} \int \frac{dy}{2+y}$

$$= -\frac{1}{4} \ln(2-y) + \frac{1}{4} \ln(2+y) = \frac{1}{4} \ln \frac{2+y}{2-y}$$

$$\rightarrow F(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{2+\tan \frac{x}{2}}{2-\tan \frac{x}{2}} + C$$

$$C) F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+5 \cos x} = \frac{1}{4} \left(\ln \frac{2+\tan \frac{\pi}{4}}{2-\tan \frac{\pi}{4}} - \ln \frac{2+\tan 0}{2-\tan 0} \right) = \frac{1}{4} \ln 3$$

Résolu le 13 février 2003