Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 1

EXANA010 – EXANA019

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

1 avril 03

EXANA010 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1999

A) Rechercher l'ensemble de définition de la fonction :

$$F(x)=\int \frac{1}{e^x-1}\,dx$$

B) Calculer $F(x)$

C) En déduire la valeur de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x-1}\,dx$$

A) $e^x-1\neq 0 \rightarrow x\neq 0 \rightarrow$ Domaine : $\Re\setminus\{0\}$

B) Soit $y=e^x \rightarrow dy=e^x dx=ydx \rightarrow dx=\dfrac{dy}{y}$

$$F(x)=\int \frac{1}{e^x-1}\,dx=\int \frac{dy}{y(y-1)}=-\int \frac{dy}{y}+\int \frac{dy}{y-1}=-\ln y+\ln(y-1)$$

$$=\ln\frac{y-1}{y}=\ln\frac{e^x+1}{e^x}=\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)$$

C) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x-1}\,dx=\left[\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)\right]_1^{+\infty}=\ln 1-\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)=-\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)$

EXANA011 – FACSA, ULG, Liège, juillet 98.

A) Calculer $F(x)=\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$

B) Calculer $G(x)=\int \cos x \ln(1+\cos\ )\,dx$

$$A)\ F(x)=\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$$

Soit $t=\sqrt{x} \;\rightarrow\; dt=-\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=-\frac{1}{2t}dt \;\rightarrow\; dx=2t\,dt$

$$F(x)=\int \frac{2t\,dt}{t\cos^2 t}=2\int \frac{dt}{\cos^2 t}=2\tan t=\boxed{2\tan\sqrt{x}}$$

$$B)\, G(x)=\int \cos x \ln(1+\cos\ )\,dx$$

Par parties : $f'=\cos x \;\rightarrow\; f=\sin x$

$g=\ln(1+\cos x) \;\rightarrow\; g'=-\frac{\sin x}{1+\cos x}$

$$G(x)=\sin x\ln(1+\cos x)+\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx$$

$$=\sin x\ln(1+\cos x)+\int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}dx$$

$$=\sin x\ln(1+\cos x)+\int (1-\cos x)\,dx$$

$$=\boxed{\sin x\ln(1+\cos x)+x-\sin x}$$

EXANA012 – FACSA, ULG, Liège, juillet 97.

Calculer $F(t)=\int e^{2t}\ln\left(1+e^t\right)dt$

Suggestion : On effectuera un changement de variable suivi d'une primitivation par parties

---

$$F(t)=\int e^{2t}\ln\left(1+e^t\right)dt$$

$$Soit\ \ e^t=x \ \rightarrow\ e^t dt=dx \ \rightarrow\ dt=\frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow\ \int x^2\ln(1+x)\frac{dx}{x}=\int x\ln(1+x)dx$$

$$f'=x \qquad \rightarrow\ f=\frac{x^2}{2}$$

$$g=\ln(1+x)\ \rightarrow\ g'=\frac{1}{1+x}$$

$$\rightarrow\ \frac{x^2}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x}dx=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int(x-1)dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x}$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)-\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+x)=\frac{1}{2}\left[(x^2-1)\ln(1+x)-\frac{(x-1)^2}{2}\right]$$

$$\boxed{F(t)=\frac{1}{2}\left[\left(e^{2t}-1\right)\ln\left(1+e^t\right)-\frac{\left(e^t-1\right)^2}{2}\right]}$$

EXANA013 – FACSA, ULG, Liège, septembre 97.

Calculer $$F(x) = \int \frac{3x^3 + 10x^2 - 2x}{\left(x^2 - 1\right)^2}\, dx$$

Décomposons en fractions rationnelles :

$$\frac{ax+b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{(x+1)^2} = \frac{(a+c)x^3 + (2a+b-2c+d)x^2 + (a+2b+c-2d)x + (b+d)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

D'où le système :

a	b	c	d	X
1		1		3
2	1	−2	1	10
1	2	1	−2	−2
	1		1	0

qui a pour solution

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -\dfrac{5}{4} \\ c = -1 \\ d = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow F(x) = \int \frac{4x - \frac{5}{4}}{(x-1)^2} dx - \int \frac{x - \frac{5}{4}}{(x+1)^2} dx$$

1) $$\int \frac{4x-\frac{5}{4}}{(x-1)^2} dx = 2\int \frac{2x-2+\frac{11}{8}}{(x-1)^2} dx = 2\int \frac{d(x-1)^2}{(x-1)^2} + \frac{11}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^2} = 4\ln\ (x-1) - \frac{11}{4\ (x-1)}$$

2) $$-\int \frac{x-\frac{5}{4}}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2-\frac{5}{2}}{(x+1)^2}\ dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(x+1)^2}{(x+1)^2} + \frac{9}{4}\int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$= -\ln\ (x+1) - \frac{9}{4(x+1)}$$

$$\rightarrow F(x) = 4\ln\ (x-1) - \frac{11}{4\ (x-1)} - \ln\ (x+1) - \frac{9}{4(x+1)}$$

$$= \ln\frac{(x-1)^4}{x+1} - \frac{1}{4}\frac{11x+11+9x-9}{(x-1)(x+1)}$$

$$\boxed{F(x) = \ln\frac{(x-1)^4}{x+1} - \frac{5x+\frac{1}{2}}{(x-1)(x+1)} + C}$$

EXANA014 – FACSA, ULG, Liège, juillet 96.

A) Calculer $F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\tan x}$

B) Calculer $G(x)=\int \frac{x}{x^2+x+1}dx$

A) $t=\tan x \rightarrow x=\arctan t \rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}$

Limites d'intégration : $x=0 \rightarrow t=0$ *et* $x=\frac{\pi}{4} \rightarrow t=1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\tan x}=\int_0^1\frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}$$

Décomposons en fractions rationnelles :

$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{a}{1+t}+\frac{bt+c}{1+t^2}=\frac{(a+b)t^2+(b+c)t+(a+c)}{(1+t)(1+t^2)}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ a+c=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{-t+1}{1+t^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}-\frac{t}{1+t^2}+\frac{1}{1+t^2}\right)$$

$$\int_0^1\frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{1}{2}\left(\int_0^1\frac{1}{1+t}dt-\int_0^1\frac{t}{1+t^2}dt+\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left[\ln (1+t)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(1+t^2)}{1+t^2}+\left[\arctan t\right]_0^1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\ln 1-\frac{1}{2}\left[\ln (1+t^2)\right]_0^1+\arctan 1-\arctan 0\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(\ln 2+\frac{\pi}{2}\right)$$

A) Méthode alternative

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan x+1}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x+\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\Big[x+\ln\left|\cos x+\sin x\right|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}+\ln 2\right)$$

Plus simple. N'est-ce pas?

B) $G(x)=\int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}}$$

Calculons le deuxième terme : $-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}\frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}$

Soit $\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}=t \;\rightarrow\; dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$

$$\rightarrow\; -\frac{1}{2}\frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{dt}{1+t^2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tan} t=-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(2x+1)\right)$$

$$\boxed{G(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(2x+1)\right)}$$

Modifié le 4 aout 2009

EXANA015 – **FACSA, ULG, Liège, septembre 96.**

A) Montrer que $\dfrac{x^3+2x^2+x}{(x^3-1)^2}=\dfrac{x^2}{(x^3-1)^2}+\dfrac{x}{(x-1)^2\,(x^2+x+1)}$

B)Calculer : $F(x)=\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+x}{(x^3-1)^2}\,dx$

$$A)\ \frac{x^2}{(x^3-1)^2}+\frac{x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}+\frac{x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{x^2+x(x^2+x+1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}=\frac{x^2+x^3+x^2+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}=\frac{x^3+2x^2+1}{(x^3-1)^2}$$

$$B)\ F(x)=\int \frac{x^3+2x^2+x}{(x^3-1)^2}=\int \frac{x^2}{(x^3-1)^2}\,dx+\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,dx$$

Désignons par $A(x)$ le premier terme et par $B(x)$ le deuxième terme.

$$A(x)=\int \frac{x^2}{(x^3-1)^2}\,dx=\frac{1}{3}\int \frac{d(x^3-1)}{(x^3-1)^2}\,dx=-\frac{1}{3(x^3-1)}$$

$$B(x)=\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,dx$$

Décomposons en fractions rationnelles :

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{ax+b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+x+1}$$

On obtient le système :

a	b	c	d	X
1		1		0
1	1	–2	1	0
1	1	1	–2	1
	1		1	0

qui a pour solutions $\begin{cases} a=0 \\ b=\frac{1}{3} \\ c=0 \\ d=-\frac{1}{3} \end{cases}$

$$B(x)=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{1}{3}\left[\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2}-\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right]$$

$$=-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{3}\frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}$$

Calculons le deuxième terme en effectuant un changement de variable:

$$t=\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt$$

$$\rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan t=\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$B(x)=-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$F(x)=-\frac{1}{3(x^3-1)}-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\boxed{F(x)=-\frac{1}{3}\left(\frac{x^2+x+2}{x^3+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right)\right)}$$

EXANA016 - Polytech, UMons, questions-types 2000-2001.

Calculer $$F(x) = \int e^{\arcsin x} dx$$

Soit $t = \arcsin x \quad \Rightarrow \quad x = \sin t \quad \text{et} \quad dx = \cos t \, dt$

$F(x) \Rightarrow \int e^t \cos t \, dt$

Par parties : $f = e^t \quad \Rightarrow \quad f' = e^t$

$g' = \cos t \quad \Rightarrow \quad g = \sin t$

$\int e^t \cos t \, dt = e^t \sin t - \int e^t \sin t \, dt$

Par parties : $f = e^t \quad \Rightarrow \quad f' = e^t$

$g' = \sin t \quad \Rightarrow \quad g = -\cos t$

$\int e^t \cos t \, dt = e^t \sin t + e^t \cos t - \int e^t \cos t \, dt$

$\int e^t \cos t \, dt = \frac{e^t}{2}(\sin t + \cos t)$

Conclusion

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2} e^{\arcsin x} \left(x + \sqrt{1 - x^2} \right)}$$

Modifié le 19 juin 2018 (Hugues Vermeiren)

EXANA017 - POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2001.

Calculer $F(x) = \int x^{100} e^{-x} dx$

$$F(x) = \int x^{100} e^{-x} dx$$

$$f : x^{100} \rightarrow f' : 100x^{99}$$

$$g' : e^{-x} \rightarrow g : -e^{-x}$$

$$F(x) = -x^{100} e^{-x} + 100 \int x^{99} e^{-x} dx$$

$$f : x^{99} \rightarrow f' : 99x^{98}$$

$$g' : e^{-x} \rightarrow g : -e^{-x}$$

$$F(x) = -x^{100} e^{-x} + 100 \left(-x^{99} e^{-x} + 99 \int x^{98} e^{-x} dx \right)$$

Et ainsi de suite :

$$F(x) = -e^{-x} \left[x^{100} + 100 \quad x^{99} + 100.99 \quad x^{98} + 100.99.98 \quad x^{97} + ... \right]$$

$$= -e^{-x} \left[x^{100} + 100! \left(\frac{x^{99}}{99!} + \frac{x^{98}}{98!} + \frac{x^{97}}{97!} + ... + \frac{x}{1!} + 1 \right) \right]$$

$$= -e^{-x} \left[x^{100} + 100! \sum_{0}^{99} \frac{x^n}{n!} \right]$$

EXANA018 - POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2001.

A) Calculer $F(x)=\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

B) Calculer $F(x)=\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$

A) $F(x)=\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

$$y=\sqrt{x} \quad\rightarrow\quad x=y^2 \quad\rightarrow\quad dx=2y\,dy$$

$$F(x)\rightarrow \int \frac{2y\,dy}{1+y}=2\left(-\int \frac{dy}{1+y}+\int dy\right)=2y-\ln(y+1)$$

$$\boxed{F(x)=2\sqrt{x}-\ln\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

B) On décompose en fractions rationnelles :

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x+3}$$

D'où le système : $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 5a+4b+3c=1 \\ 6a+3b+2c=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=2 \\ c=-\frac{3}{2} \end{cases}$

$$F(x)=-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}+2\int \frac{dx}{x+2}-\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(x+1)+2\ln(x+2)-\frac{3}{2}\ln(x+3)$$

$$\boxed{F(x)=\ln\frac{(x+1)^2}{\sqrt{(x+1)(x+3)^3}}}$$

EXANA019 - POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2001.

A) Calculer $F(x)=\int e^{\sqrt{x}}dx$

B) Calculer $F(x)=\int e^{x}\sin x\,dx$

$$A)\ \text{Soit : } y=\sqrt{x} \quad\rightarrow\quad dx=2y\,dy$$

$$\Rightarrow F(x)=2\int ye^{y}dy$$

$$f:y \quad\rightarrow\quad f':dy$$

$$g':e^{y} \quad\rightarrow\quad g:e^{y}$$

$$\Rightarrow\ F(x)=2\left(y\,e^{y}-\int e^{y}dy\right)=2\left(ye^{y}-e^{y}\right)=2e^{y}\left(y-1\right)$$

$$\boxed{F(x)=2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$B)\qquad f:e^{x} \quad\rightarrow\quad f':e^{x}$$

$$g':\sin x \quad\rightarrow\quad g:-\cos x$$

$$F(x)=-e^{x}\cos x+\int e^{x}\cos x\,dx$$

$$f:e^{x} \quad\rightarrow\quad f':e^{x}$$

$$g':\cos x \quad\rightarrow\quad g:\sin x$$

$$F(x)=-e^{x}\cos x+e^{x}\sin x-\int e^{x}\sin x\,dx$$

$$\boxed{F(x)=\frac{e^{x}}{2}(\sin x-\cos x)}$$

Modifié le 31 mars 2010 (Jean-Jean Israel Wela)