Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 10

EXANA0100 – EXANA109

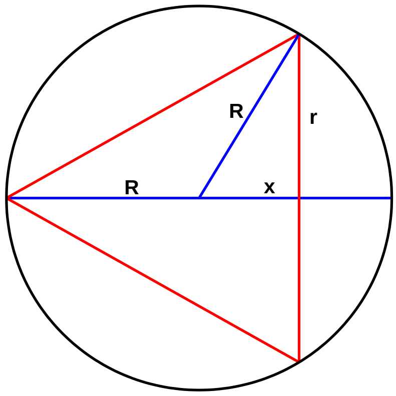
http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

Juin 04

EXANA100 –EPL, Louvain, juillet 2002, série 2.

On considère tous les cônes circulaires droits inscrits dans une sphère de rayon R. Déterminez le rayon r de la base et la hauteur h du cône de volume maximal. Donnez ensuite ce volume et comparez-le au volume de la boule.



La boule étant obtenu par la rotation d'un cercle et le cône par la rotation d'un triangle, on peut raisonner dans le plan.

Soit à maximaliser l'aire d'un triangle inscrit à un cercle de rayon R.

$$\begin{cases} h = R + x \\ r = \sqrt{R^2 - x^2} \\ S = hr \end{cases} \rightarrow S = (R+x)\sqrt{R^2 - x^2} \rightarrow \frac{dS}{dx} = \sqrt{R^2 - x^2} + (R+x)\frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}}(-2x)$$

$$\rightarrow 2x^2 + xR - R^2 = 0 \rightarrow x = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 8R^2}}{4} = \frac{R}{2} \rightarrow h = \frac{3R}{2} \quad \text{et} \quad r = R\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow \text{Le volume du cône} : V_C = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} . \frac{3R^2}{4} . \frac{3R}{2} = \frac{3\pi R^3}{8}$$

$$\text{Volume de la boule} : V_B = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \rightarrow \qquad \frac{V_B}{V_C} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{3\pi R^3}{8}} = \frac{32}{9} \simeq 3.56$$

Résolu le 24 juin 2004

EXANA101 – Louvain, septembre 2002.

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=$

b) $g(x)=\ln\left(\sin e^x\right)$ Calculer la dérivée $g'(x)$

c) $\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

d) $\int x^2\cos(2x)\,dx$

e) $\int\sqrt{x}\,\ln x\,dx$

$$a)\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=$$

$$1)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=+\infty$$

$$2)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)==\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

$$b)\ g(x)=\ln\left(\sin e^x\right)$$

$$g'(x)=\frac{1}{\sin e^x}.\cos e^x.e^x=e^x\ \cot e^x$$

$$c)\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x^3+1\right)}{\sqrt{1+x^3}}=\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}$$

$d)\ I = \int x^2 \cos 2x \, dx$

$$\begin{array}{ll} f = x^2 & f' = 2x \\ g' = \cos 2x & g = \dfrac{\sin 2x}{2} \end{array} \quad \rightarrow \quad I = x^2 \frac{\sin 2x}{2} - \int x \sin 2x \, dx$$

$$\begin{array}{ll} f = x & f' = 1 \\ g' = \sin 2x & g = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{array} \quad \rightarrow \quad I = x^2 \frac{\sin 2x}{2} + x \frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx$$

$$\rightarrow \ I = x^2 \frac{\sin 2x}{2} + x \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

$e)\ I = \int \sqrt{x} \ln x \, dx$

$$\begin{array}{ll} f = \ln x & f' = \dfrac{1}{x} \\ g' = \sqrt{x} & g = \dfrac{2\sqrt{x^3}}{3} \end{array} \quad \rightarrow \quad I = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \frac{2}{3} \int \sqrt{x} \, dx$$

$$\rightarrow \ I = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \left(\ln x - \frac{2}{3} \right)$$

Résolu le 24 juin 2004

EXANA102 – Louvain, septembre 2002.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

a) Donnez le domaine de f et analysez la parité de f.
b) Donnez la limite de f quand $x \to 0$ si cette limite existe.
c) Donnez les maxima et minima éventuels.
d) Donnez le graphe de f en mettant en évidence la partie du graphe comprise en $x = 1 / (3\pi)$ et $x = 3 / \pi$

$a)$ $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(-x) = -x \sin \frac{1}{-x} = x \sin \frac{1}{x} = f(x) \;\to\; \text{La fonction est paire}$$

$$b) \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sin t}{t} = 0$$

$c)$ Asymptote horizontale :

$$\lim_{x\to\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \qquad AH \equiv y = 1$$

$$d) \; f'(x) = \sin \frac{1}{x} + x \cos \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

$$\to \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} = 0 \;\to\; x \sin \frac{1}{x} = \cos \frac{1}{x} = f(x)$$

Il aura donc un extrema chaque fois que $f(x)$ sera égal à $\cos \frac{1}{x}$

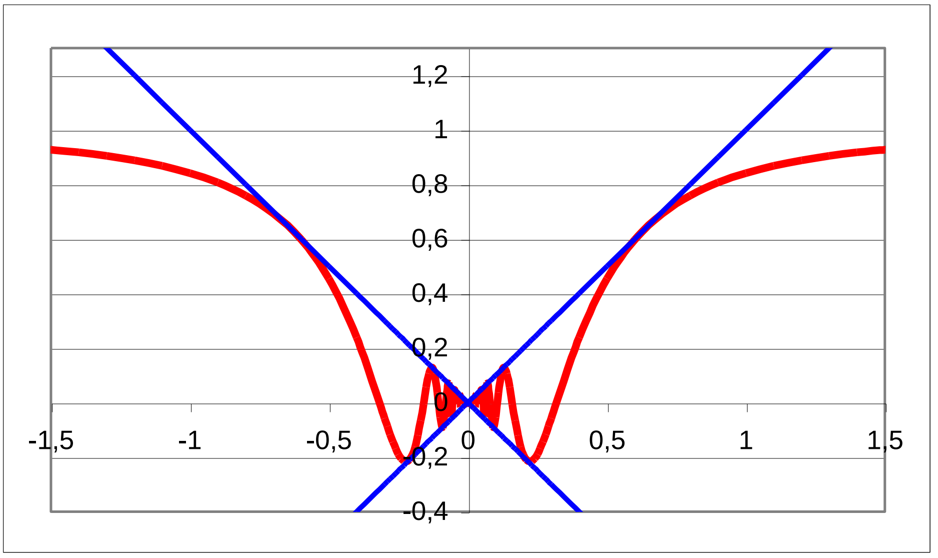
Ce qui se produit une infinité de fois.

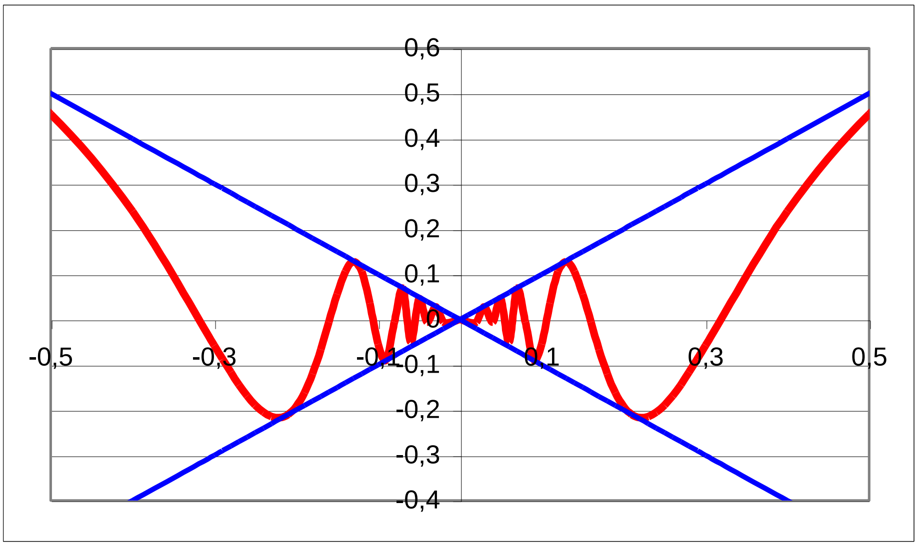
Par exemple, si $x \to 0$, alors $x \sin \frac{1}{x} \approx 0$ en vertu du point $b)$

$$\to \cos \frac{1}{x} = 0 \;\to x = \frac{1}{2k\pi}$$

D'autre part, les valeurs extrèmes de $\sin \frac{1}{x}$ sont ± 1.

Par conséquent, les extrema sont situés sur les droites : $y = \pm x$

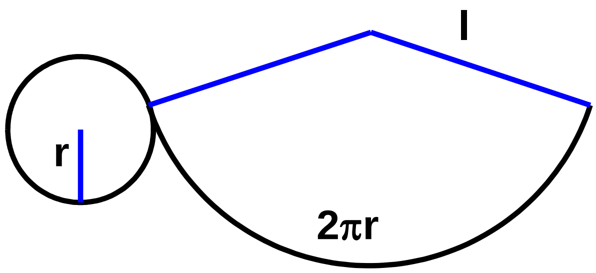




Résolu le 24 juin 2004

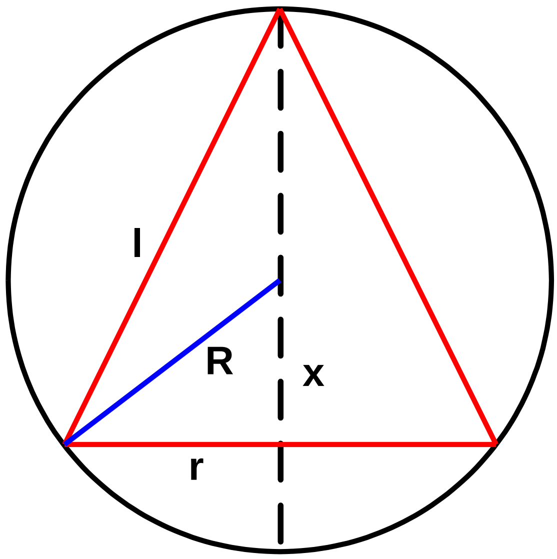
EXANA103 – Louvain, septembre 2002.

a) Donnez la surface latérale (sans la base) d'un cône circulaire droit en fonction du rayon r de sa base et de la longueur l de sa génératrice.
b) En considérant tous les cônes circulaires droits inscrits dans une sphère de rayon R, donnez le rayon r de la base et la hauteur h de celui dont la surface latérale est maximale. Calculer ensuite cette surface.



a) Développons la surface latérale. On a immédiatement :

$$A_L = \frac{2\pi r}{2\pi l}\,\pi l^2 = \pi\, r\, l$$



b) Appliquons Pythagore :

$$\begin{cases} l^2 = r^2 + (x+R)^2 \\ R^2 = x^2 + r^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r^2 = l^2 - (x+R)^2 \\ r = \sqrt{R^2 - x^2} \qquad (1) \end{cases} \rightarrow R^2 - x^2 = l^2 - (x+R)^2$$

$$\rightarrow l = \sqrt{2R(R+x)} \quad (2)$$

Donc l'aire latérale est, en utilisant (1) et (2) :

$$A_L = \pi r l = \pi \sqrt{R^2 - x^2}\,\sqrt{2R(R+x)} = \pi\sqrt{2R}\,(R+x)\sqrt{R-x}$$

Cette surface sera extrémale si : $\dfrac{dA_L}{dx} = 0$

$$\rightarrow \frac{dA_L}{dx} = \pi\sqrt{2R}\left(\sqrt{R-x} + (R+x)\frac{1}{2\sqrt{R-x}}(-1)\right) = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{R-x} = (R+x)\frac{1}{2\sqrt{R-x}} \rightarrow 2(R-x) = R+x \rightarrow x = \frac{R}{3}$$

Et donc : $\begin{cases} r = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}R \\ l = \dfrac{2R\sqrt{6}}{3} \end{cases} \rightarrow A_L = \pi\,\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R\,\dfrac{2R\sqrt{6}}{3} = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}\pi R^3$

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 6 juillet 2006. (Benoît Baudelet)

EXANA104 – Louvain, juillet 2003, série 1.

a) $\int \frac{dx}{1+\cos 2x} =$

b) $\int e^{2x} \sin x \, dx =$

c) $\int \frac{dx}{2x^2+4x+5} =$

d) $\int_{-1/4}^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

$$a)\ I = \int \frac{1}{1+\cos 2x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2}\tan x$$

$$b)\ I = \int e^{2x} \sin x \, dx$$

$$\begin{matrix} f = e^{2x} & f' = 2e^{2x} \\ g' = \sin x & g = -\cos x \end{matrix} \rightarrow I = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x \, dx$$

$$\begin{matrix} f = e^{2x} & f' = 2e^{2x} \\ g' = \cos x & g = \sin x \end{matrix} \rightarrow I = -e^{2x}\cos x + +2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x \, dx$$

$$\rightarrow I = \frac{e^{2x}}{5}\left(2\sin x - \cos x\right)$$

$$c)\ I=\int\frac{dx}{2x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{2(x+1)^2+3}=\frac{1}{2}\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)^2+1}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\int\frac{d\left(\frac{x+1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\frac{\sqrt{6}}{3}(x+1)$$

$$d)\ I=\int_{-1/4}^{1/4}\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$\text{Posons } t=2x \quad\rightarrow\quad dx=\frac{dt}{2}\quad\rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{4} & \rightarrow t=\frac{1}{2}\\ x=-\frac{1}{4} & \rightarrow t=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{2}[\arcsin t]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$$

Résolu le 24 juin 2004

EXANA105 – Louvain, juillet 2003, série 1.

On considère la fonction $f : \Re \setminus \{ 2 \} \to \Re$, définie par

$$f\left(x\right)=\frac{\sqrt{x^4-x^3+1}}{x-2}$$

e) Montrer que cette fonction est bien définie sur $\Re \setminus \{ 2 \}$.
f) Donnez l'équation des asymptotes.
g) Esquissez le graphe de f sans calculer f', mais en sachant que f' s'annule seulement en un point de [-1, 0] et en un point de [3, 4]
h) Montrez que la dérivée de f s'annule en un point de [-1, 0]

a) Il faut que x^4-x^3+1 soit toujours positif.

$$\text{En effet : }\begin{cases}\text{si } x<0 & \to\ -x^3>0\ \to\ x^4-x^3+1>0\\ \text{si } x=0 & \to\ x^4-x^3+1=1>0\\ \text{si } 0<x<1 & \to\ x^3<1\ \to x^4-x^3+1>0\\ \text{si } x>1 & \to\ x^4>x^3\ \to\ x^4-x^3+1>0\end{cases}$$

$\to \text{dom } f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

b) Asymptote verticale : $AV \equiv x=2$

Asymptote oblique :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4-x^3+1}}{x\left(x-2\right)}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4-x^3+1}}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4-x^3+1}-\left(x-2\right)x}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^3+1-x^4+4x^3-4x^2}{\left(x-2\right)\left(\sqrt{x^4-x^3+1}-\left(x-2\right)x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{x\left(x^2+x^2\right)}=\frac{3}{2}$$

$$\to\ AO\equiv y=x+\frac{3}{2}$$

$c)$ Graphe : Voir ci-dessous

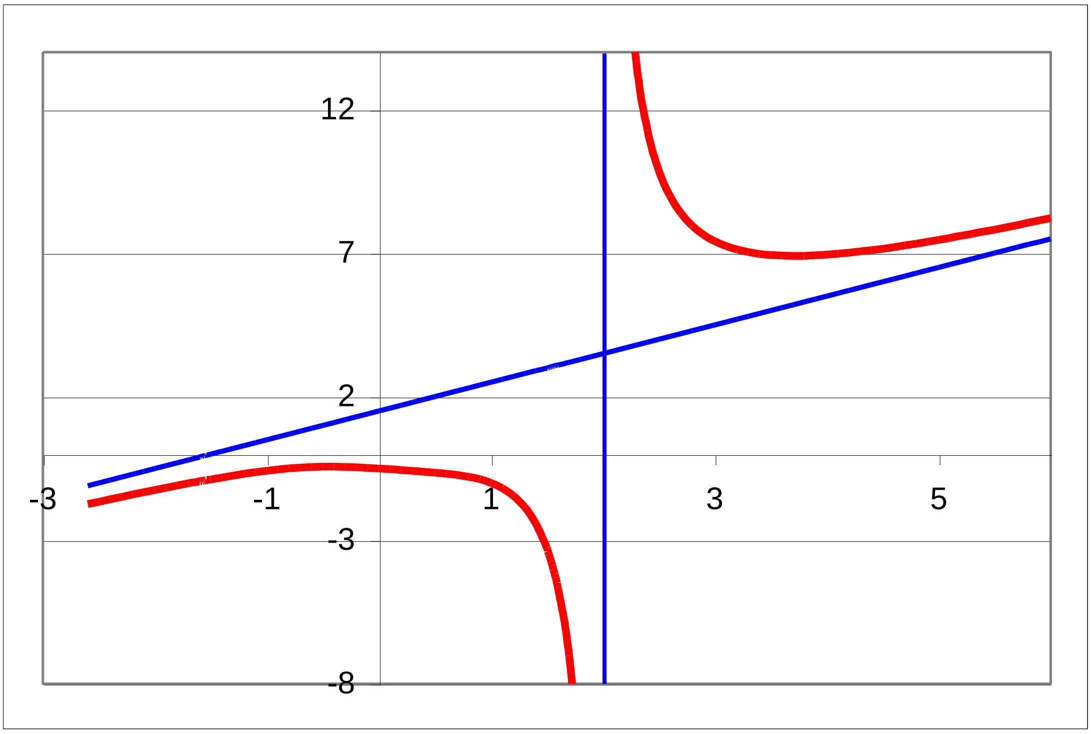
$$d)\ f'(x)=\frac{\frac{1}{2}\frac{4x^3-3x^2}{\left(x^4-x^3+1\right)^{\frac{1}{2}}}(x-2)-\left(x^4-x^3+1\right)^{\frac{1}{2}}}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2x^4-9x^3+6x^2-2}{(x-2)^2\left(x^4-x^3+1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Le dénominateur est toujours positif. Etudions le numérateur $N(x)$

On a : $N(0)=-2$ et $N(-1)=15$

$\rightarrow$ $f'(x)$ s'annule dans l'intervalle $[\,-1, 0\,]$



Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 1 août 2005 (Steve Tumson)

EXANA106 – Louvain, juillet 2003, série 1.

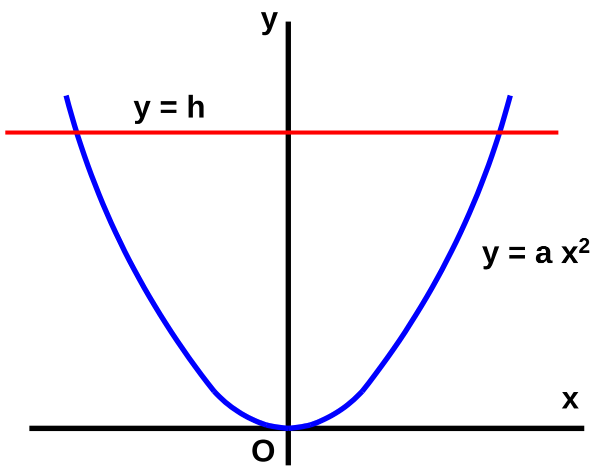
On considère une cuve obtenue par la rotation d'une parabole

$$y = a\,x^2$$

autour de l'axe des *y*. On suppose $a > 0$. (Unités : mètre, seconde).

c) donnez le volume $V(h)$ de la cuve correspondant à $0 \le a\,x^2 \le y \le h$.

d) On remplit la cuve de vin jusqu'à une hauteur de 2 mètres et on ouvre ensuite un robinet assurant un débit d'un litre par seconde. Le niveau du vin devient alors une fonction du temps $h(t)$. Donnez la vitesse de descente du niveau du vin (en m/s) au moment où $h(t) = 3/2$ (m).



$a)\, V(h) = \pi \int_0^h \left(\sqrt{\frac{y}{a}} \right)^2 dy = \frac{\pi}{2a} \left[y^2 \right]_0^h = \frac{\pi h^2}{2a}$

$b)$ Soit le débit de fuite : $D = 10^{-3}\ m^3/s$

A l'instant $t = 0$, le volume dans la cuve est : $V(2) = \dfrac{2\pi}{a}$

A l'instant t, le volume est : $V(t) = \dfrac{2\pi}{a} - D\,t$

Et le niveau correspondant : $\dfrac{\pi h^2}{2a} = \dfrac{2\pi}{a} - D\,t \to h(t) = \sqrt{4 - \dfrac{2aDt}{\pi}}$

La vitesse de descente est donc :

$$v_h = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{4 - \frac{2aDt}{\pi}}} \left(-\frac{2aD}{\pi} \right) = \frac{-aD}{\pi\sqrt{4 - \frac{2aDt}{\pi}}} = -\frac{aD}{\pi h}$$

Si $h = \dfrac{3}{2}\, m \quad \to \quad |\, v_h \,| = \dfrac{2a}{3\pi} 10^{-3} m/s$

Résolu le 24 juin 2004 . Modifié le 6 juillet 2006. (Benoît Baudelet)

EXANA107 – Louvain, juillet 2003, série 2.

a) $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$

b) $\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx$

c) $\int x\left(e^{\left(x^2\right)} + 2e^x + 1\right) dx$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}}{\ln(1+x) + \ln(1-x)}$

$a)\ I = \int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$

Soit $t = \sin x \ \rightarrow \ dt = \cos x \, dx$

Donc : $I = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int t^4 \left(1 - t^2\right) dt = \dfrac{t^5}{5} - \dfrac{t^7}{7}$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7}$$

$b)\ I=\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx=\frac{1}{2^5}\int \sin^4 2x\,d2x \quad (1)$

Procédons par étape.

Calculons : $J=\int \sin^2 t\,dt$

$$\begin{array}{ll} f=\sin t & f'=\cos t \\ g'=\sin t & g=-\cos t \end{array} \rightarrow J=-\sin t\cos t+\int \cos^2 t\,dt$$

$$\rightarrow J=-\sin t\cos t+\int t\,dt-\int \sin^2 t\,dt$$

$$\rightarrow J=\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4} \qquad (2)$$

Calculons : $H=\int \sin^4 t\,dt$

$$\begin{array}{ll} f=\sin^3 t & f'=3\sin^2 t\cos t \\ g'=\sin t & g=-\cos t \end{array}$$

$$\rightarrow H=-\sin^3 t\cos t+3\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt$$

$$=-\sin^3 t\cos t+\frac{3}{8}\int \sin^2 2t\,d2t$$

Avec $(2)\ \rightarrow\ H=-\sin^3 t\cos t+\frac{3}{8}\left(\frac{2t}{2}-\frac{\sin 4t}{4}\right)$

$$=-\sin^2 t\sin t\cos t+\frac{3t}{8}-\frac{3\sin 4t}{32}$$

$$=-\frac{1-\cos 2t}{2}\frac{\sin 2t}{2}+\frac{3t}{8}-\frac{3\sin 4t}{32}$$

$$=-\frac{\sin 2t}{4}+\frac{\sin 4t}{8}+\frac{3t}{8}-\frac{3\sin 4t}{32}$$

$$=\frac{3t}{8}-\frac{\sin 2t}{4}+\frac{\sin 4t}{32} \qquad (3)$$

Il nous reste à appliquer la formule (3) à (2), avec $t=2x$

$$\rightarrow I=\frac{1}{2^5}\left(\frac{3x}{4}-\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 8x}{32}\right)=\frac{1}{2^{10}}\left(24x-8\sin 4x+\sin 8x\right)$$

$$c)\ I=\int x\left(e^{\left(x^2\right)}+2e^x+1\right)dx=\int xe^{x^2}dx+2\int xe^x dx+\int xdx$$

Calculons chaque terme :

$$I_1=\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2=\frac{e^{x^2}}{2}$$

$$I_2=2\int xe^x dx=2\left(xe^x-\int e^x dx\right)=2xe^x-2e^x \qquad \text{(Intégration par parties)}$$

$$I_3=\int xdx=\frac{x^2}{2}$$

$$\rightarrow I=\frac{e^{x^2}}{2}+2xe^x-2e^x+\frac{x^2}{2}$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}}}{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{(1-x)^3}-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}}{\frac{1-x-1-x}{(1+x)(1-x)}}=\lim_{x\to 0}-\frac{\left(\sqrt{(1-x)^3}-\sqrt{1+x}\right)(1+x)(1-x)}{4x\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1-x)}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{(1-x)^3}-\sqrt{1+x}}{x}$$

$$=-\frac{1}{4}.1.\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{(1-x)^3}-\sqrt{1+x}}{x}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)^3-(1+x)}{x\left(\sqrt{(1-x)^3}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1-3x+3x^2-x^3-1-x}{x\left(\sqrt{(1-x)^3}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{1}{4}\frac{x^2-3x+4}{\sqrt{(1-x)^3}+\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}$$

Résolu le 24 juin 2004 Modifié le 6 juillet 2006 (Benoît Baudelet)

EXANA108 – Louvain, juillet 2003, série 2.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^4}}{(1-x)^2}$$

i) Donnez le domaine de *f*.
j) Donnez l'équation des asymptotes s'il y en a.
k) Donnez le graphe de *f* en situant le ou les extrema éventuels.

$a)$ dom $f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$b)$ Asymptote verticale : $AV \equiv x = 1$

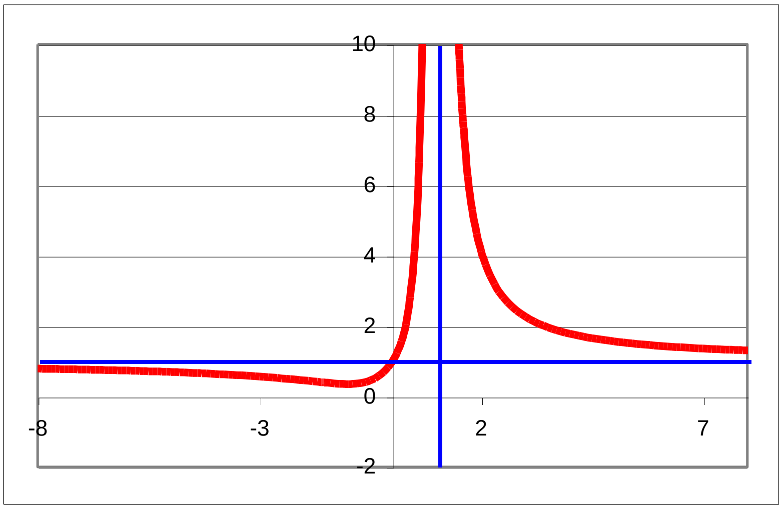
Asymptote horizontale : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{(1-x)^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \to \quad AH \equiv y = 1$

$$c) \; f'(x) = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\left(4x^3\right)(1-x)^2 - \sqrt{1+x^4}.2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{2x^3+2}{(1-x)^3\sqrt{1+x^4}}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; 2x^3 + 2 = 0 \;\to x = -1$

$$\begin{cases} \text{Si } x < -1 & \to f'(x) < 0 \\ \text{Si } 1 > x > -1 & \to f'(x) > 0 \end{cases} \quad \to \quad \text{C'est un minimum : } \left(\text{-1, } \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

Note : Il y a également un point d'inflexion en $(-1.7376, 0.4244)$



Résolu le 24 juin 2004

EXANA109 – Louvain, juillet 2003, série 2.

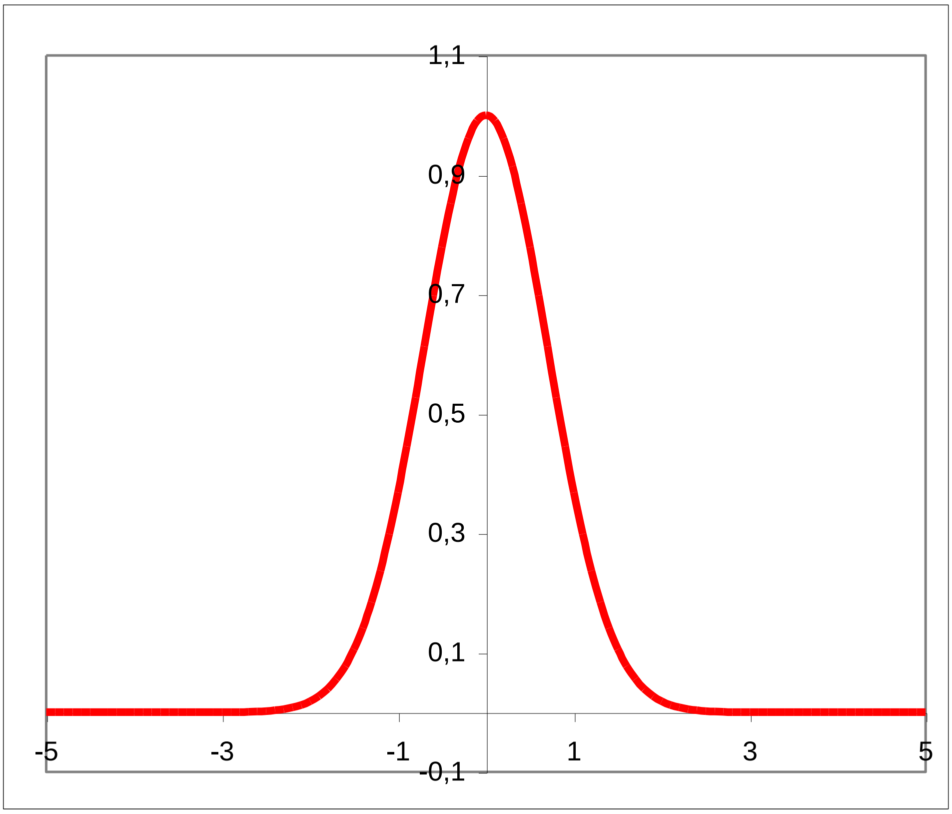
On considère la surface de révolution obtenue par rotation autour de l'axe Oy de la courbe définie par

$$y = e^{-\left(x^2\right)}$$

a) Donnez un graphe très approximatif de cette courbe ?

b) Donnez le volume correspondant à $0 < h \leq y \leq e^{-\left(x^2\right)} \leq 1$

c) Quelle est la limite de ce volume quand $h \to 0$?



a) Le graphique est donné ci-dessus.

b) Utilisons la méthode des tubes.

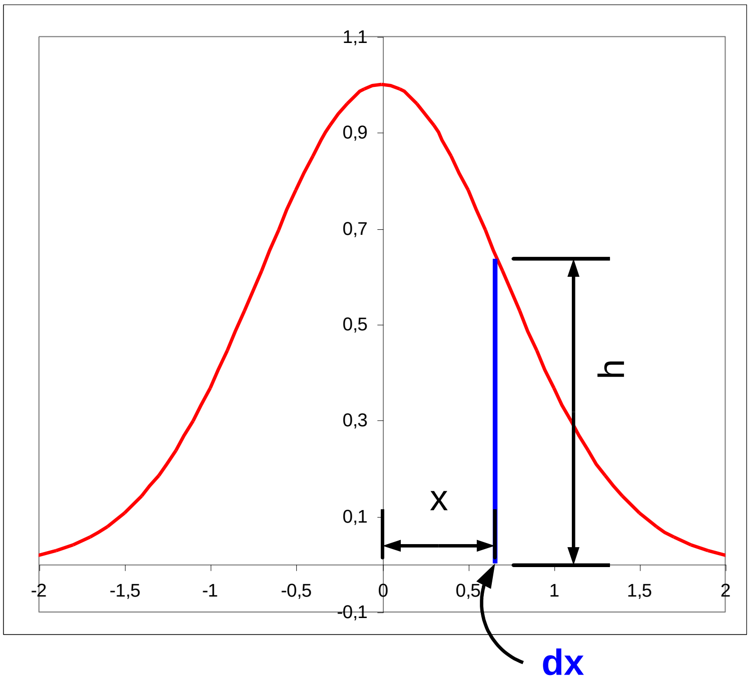
Soit un rectangle de largeur dx et de hauteur h

En tournant autour de Oy, ce rectangle engendre un tube d'épaisseur dx de hauteur h et de rayon x. Ce qui correspond à un volume

$dV = 2\pi x.h.dx$ avec $h = e^{-x^2}$

Il suffit d'intégrer entre $\begin{cases} x = 0 & \text{qui correspond à } h = 1 \\ x = +\infty & \text{qui correspond à } h = 0 \end{cases}$

$$V = 2\pi \int_0^{+\infty} x\, e^{-x^2} dx = \pi \int_0^{+\infty} e^{-x^2} d\left(x^2\right) = -\pi \left[e^{-x^2} \right]_0^{+\infty} = \pi$$



c) Si nous voulons faire une limite quand $h \longrightarrow 0$, il faut faire apparaître h

Soit $h = e^{-x^2} \quad \to \quad \ln h = -x^2 \qquad x = \sqrt{-\ln h}$

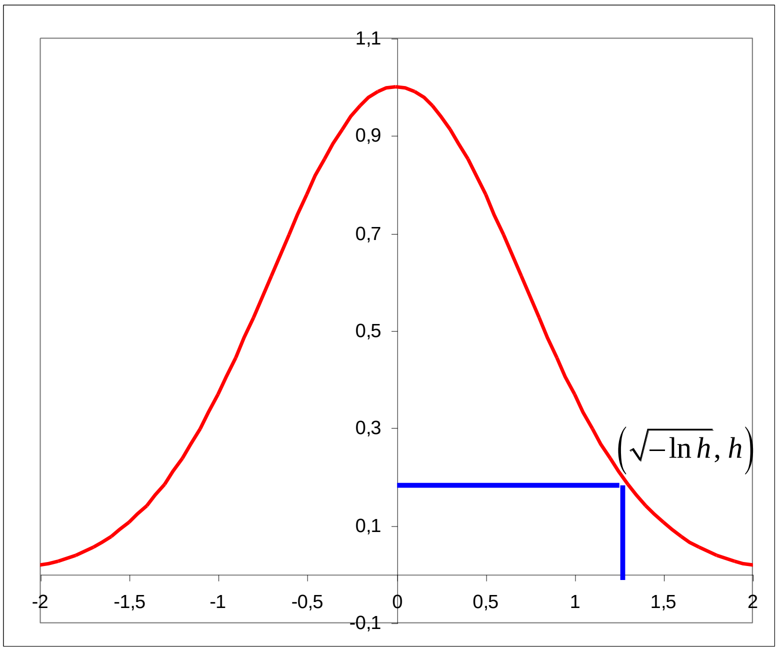
Le volume cherché sera la somme du volume engendré par le rectangle de longueur $\sqrt{-\ln h}$ et de hauteur h, et du volume engendré par la surface située entre les abscisses $x = \sqrt{-\ln h}$ et l'infini.

$$V = 2\pi\, h \left(\sqrt{-\ln h}\right)^2 + 2\pi \int_{\sqrt{-\ln h}}^{+\infty} x\, e^{-x^2}\, dx = -2\pi\, h \ln h - \pi \left[e^{-x^2} \right]_{\sqrt{-\ln h}}^{+\infty}$$

$$= -2\pi\, h \ln h + \pi\, e^{\ln h} = -2\pi\, h \ln h + \pi\, h$$

Donc, $\lim\limits_{h \to 0} V = \lim\limits_{h \to 0} \left[-2\pi\, h \ln h + \pi\, h \right] = -2\pi \lim\limits_{h \to 0} \left[h \ln h \right] = -2\pi \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln h}{\dfrac{1}{h}}$

$$= -2\pi \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{h}}{-\dfrac{1}{h^2}} = 2\pi \lim_{h \to 0} h = 0$$



Résolu le 24 juin 2004