Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 11

EXANA0110 – EXANA119

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juin 04

EXANA110 – Louvain, septembre 2003.

a) $\displaystyle\int \frac{(1+x)^3-(1-x)^3}{(1+x)^2-(1-x)^2}\ dx =$

b) $\displaystyle\int e^{\cos^2 x}\ \sin(2x)\ dx =$

c) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{e^x}\, dx =$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2-x^2-2\cos x}{x^4} =$

$$a)\ I=\int \frac{(1+x)^3-(1-x)^3}{(1+x)^2-(1-x)^2}\ dx = \int \frac{1+3x+3x^2+x^3-1+3x-3x^2+x^3}{1+2x+x^2-1+2x-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int (3+x^2)\, dx = \frac{x}{2}\left(3+\frac{x^2}{3}\right)$$

$$b)\ I=\int e^{\cos^2 x}\sin 2x\ dx = \frac{1}{2}\int e^{\cos^2 x}\sin x\cos x\ dx = -\frac{1}{4}\int e^{\cos^2 x}\, d\left(\cos^2 x\right) = -\frac{1}{4}e^{\cos^2 x}$$

$$c)\ I=\int \frac{\sin x}{e^x}\, dx = \int e^{-x}\sin x\ dx$$

$$\begin{matrix} f=e^{-x} & f'=-e^{-x} \\ g'=\sin x & g=-\cos x \end{matrix} \ \rightarrow\ I=-\cos x\, e^{-x}-\int e^{-x}\cos x\ dx$$

$$\begin{matrix} f=e^{-x} & f'=-e^{-x} \\ g'=\cos x & g=\sin x \end{matrix} \ \rightarrow\ I=-e^{-x}(\cos x+\sin x)-\int e^{-x}\sin x\ dx$$

$$\rightarrow I=-\frac{e^{-x}}{2}(\cos x+\sin x)$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{2-x^2-2\cos x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x+2\sin x}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-2+2\cos x}{12x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x}{24x} = -\frac{1}{12}$$

Résolu le 24 juin 2004

EXANA111 – Louvain, septembre 2003.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{(1-x)x}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$$

a) Donnez le domaine de f.
b) Donnez l'équation des asymptotes s'il y en a.
c) Donnez le graphe de f en situant le ou les extrema éventuels.

$a)$ $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$b)$ Asymptote verticale : $AV \equiv x = -1$

Asymptotes horizontales

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1-x)x}{(1+x)\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty} -\frac{x^2}{x|x|} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{x^2}{x|x|} = +1 \quad \rightarrow \quad AH \equiv y = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x^2}{x|x|} = -1 \quad \rightarrow \quad AH \equiv y = -1 \end{cases}$$

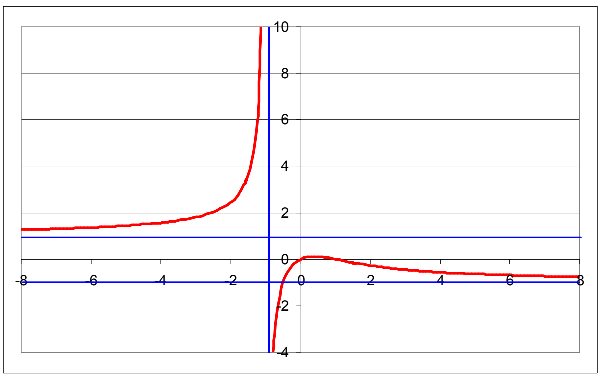
$$c)\ f'(x) = \frac{(1-2x)(1+x)\sqrt{1+x^2} - (1-x)x\left[\sqrt{1+x^2} + (1+x)\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}.2x\right]}{(1+x)^2(1+x^2)}$$

$$= \frac{-2x^3 - x^2 - 2x + 1}{(1+x)^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 0 \\ f'(0) > 0 \quad \text{et} \quad f'(1) < 0 \end{cases} \quad \text{Il y a donc un maximum dans l'intervalle } [\ 0, 1\ ]$$

Un calcul exact (sur calculatrice) donne : $(+0.3760, +01596)$

Il y a aussi un point d'inflexion en $(\ 1, 0)$



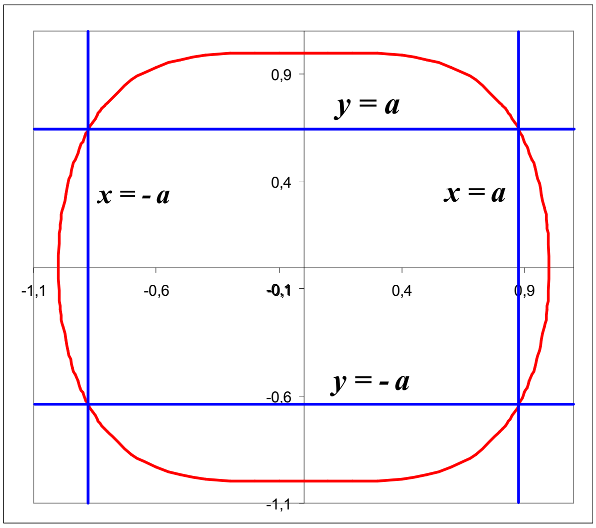
Résolu le 24 juin 2004

EXANA112 – Louvain, septembre 2003.

a) Donnez l'aire maximale d'un rectangle (de côtés parallèles aux axes) inscrits dans la courbe

$$y^2 + x^4 = 1$$

b) Donnez le volume maximal d'un cône obtenu par la rotation d'un triangle d'hypoténuse donné a autour d'un côté adjacent à l'angle droit.



a) Puisque la figure est symétrique, il suffit d'étudier le premier quadrant.

Soit (a,b) un point de la courbe.

Les droites $x = b$ et $y = a$ délimite avec les axes un rectangle dont la surface est

$$S_1 = ab \quad \text{avec} \quad a^2 + b^4 = 1 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{1-b^4}$$

Donc : $S_1 = b\sqrt{1-b^4}$

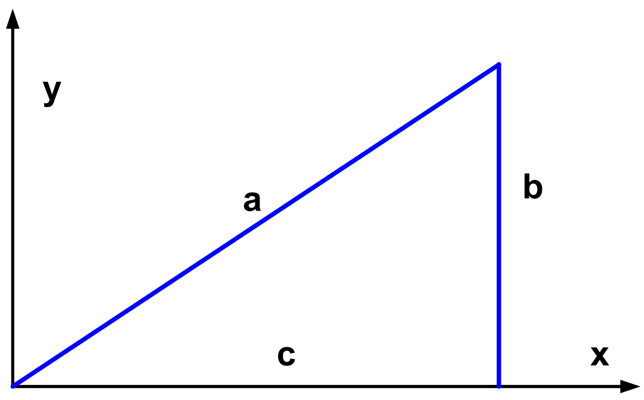
Cette surface sera maximale en un point où la dérivée est nulle :

$$\frac{dS_1}{db} = \sqrt{1-b^4} + b.\frac{1}{2\sqrt{1-b^4}}\left(-4b^3\right) = \frac{2\left(1-b^4\right)-4b^4}{2\sqrt{1-b^4}} = \frac{1-3b^4}{\sqrt{1-b^4}}$$

$$\rightarrow \; b = \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \quad \rightarrow \; a = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

La surface du rectangle cherché est donc :

$$S = 4S_1 = 4.ab = 4.\sqrt{\frac{2}{3}}.\sqrt[4]{\frac{1}{3}} = 4.\sqrt[4]{\frac{2^2}{3^3}} \simeq 2.482$$



b) Le volume sera maximal si l'aire du rectangle est maximale.

Aire du triangle : $A = \frac{1}{2}bc = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - b^2}$

$\rightarrow \frac{dA}{db} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2} + \frac{b}{2}.\frac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2}}(-2b)$

$\rightarrow a^2 - 2b^2 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{2}\, b$

Autrement dit le triangle est isocèle : $c = b = a\frac{\sqrt{2}}{2}$

Le volume du cône est donc : $V = \frac{\pi}{3}b^2c = \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 a^3 \simeq 0.37a^3$

Résolu le 24 juin 2004

EXANA113 – Liège, juillet 2004.

Soit

$$f(x) = \frac{ax^2 + be^{-x}}{1+x}$$

Où *a* et *b* sont des constantes réelles strictement positives.

1. Déterminer *a* et *b* sachant que le graphe de *f* présente
   a. Une asymptote oblique en $y = x - 1$ en $+\infty$
   b. Un minimum local en $x = 1$
2. Avec les valeurs de *a* et *b* identifiées plus haut, la fonction *f* possède-t-elle d'autres asymptotes et minima ou maxima locaux que ceux identifiés ci-dessus ? (Le calcul de la dérivée seconde peut être évité.)
3. Esquissez le graphe de *f*.

a) La fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Si $y = x - 1$ est une asymptote, alors $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - x\right] = -1 \end{cases}$

$$\to \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{ax^2 + be^{-x}}{1+x}}{x} = 1 \quad \to \quad a = 1$$

$$\to \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2 + be^{-x}}{1+x} - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{be^{-x} - x}{1+x} = -1$$ Ce qui est bien vérifié.

$$f'(x) = \frac{\left(2x - be^{-x}\right)(1+x) - \left(x^2 + be^{-x}\right)}{(1+x)^2} = \frac{(x+2)\left(x - be^{-x}\right)}{(1+x)^2}$$

Or on a $f'(1) = 0 \to 1 - be^{-1} = 0 \to b = e$

b) La fonction a aussi une asymptote verticale en $x = -1$

Il nous faut encore vérifié que si la fonction a des asymptotes en $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+e^{1-x}}{1+x} = -\infty \quad \text{Pas d'asymptote horizontale}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+e^{1-x}}{x+x^2} \xrightarrow{Hospital} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-e^{1-x}}{1+2x} \xrightarrow{Hospital} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+e^{1-x}}{2} = +\infty$$

$\to$ Pas d'asymptote oblique en $x \to -\infty$

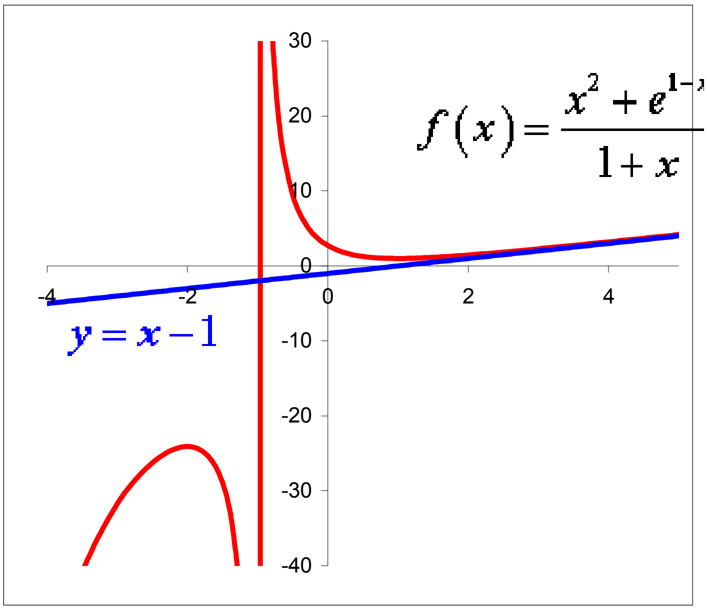
Tableau des signes de $f\,'(x)$

$f\,'(x)$ s'annule en $x = -2$ et $x = 1$

	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x-e^{-x}$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\frac{1}{(1+x)^2}$		$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$	
$f\,'$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	1
f	$-\infty$	$\nearrow$	Max $y=-4-e^3$	$\searrow$		$\searrow$	min $y=1$	$\nearrow$	$+\infty$

Maximum : $x=-2, y=-4-e^3$ Minimum : $x=1, y=1$

Le tableau permet de tracer la fonction



Résolu le 17 août 04

EXANA114 – Liège, juillet 2004.

Soit

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$$

Où n est un entier positif ou nul quelconque.

4. Calculez I_0 et I_1
5. Montrez, par une intégration par parties, que

$$I_n = e - n.I_{n-1}$$

   Remarque : ne pas calculer explicitement la valeur de I_n

6. Exprimez

$$\int_0^1 u^n e^u du \quad \text{en fonction de } I_n$$

7. Montrez que

$$I_n > I_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) $I_0 = \int_1^e dx = e - 1$

$I_1 = \int_1^e \ln x \, dx$ Par parties $\begin{cases} f = \ln x \\ g' = 1 \end{cases} \to \begin{cases} f' = \dfrac{1}{x} \\ g = x \end{cases}$

$\to \ I_1 = [x.\ln x]_1^e - \int_1^e dx = e - (e-1) = 1$

b) $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$ Par parties $\begin{cases} f = (\ln x)^n \\ g' = 1 \end{cases} \to \begin{cases} f' = \dfrac{n}{x}(\ln x)^{n-1} \\ g = x \end{cases}$

$\to \ I_n = \left[x.(\ln x)^n\right]_1^e - \int_1^e n.(\ln x)^{n-1} dx = e - n.I_{n-1}$

c) $F = \int_0^e u^n e^u du$

Soit $u = \ln x \ \to \ x = e^u$ avec $u \in \left]\, 0,1 \,\right[$ et $x \in \left]\, 1,e \,\right[$

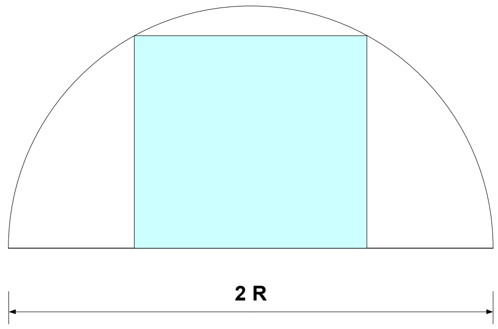
Donc : $du = \dfrac{dx}{x} \qquad \to \ F = \int_0^e (\ln x)^n \, dx = I_n$

d) $\forall x \in \left]\, 1,e \,\right[\ \to \ \ln x \in \left]\, 0,1 \,\right[$ Donc $(\ln x)^n > (\ln x)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \to \ I_n > I_{n+1}$

Résolu le 17 août 04

EXANA115 – Liège, septembre 2004.

Calculez l'aire du plus grand rectangle inscrit dans un demi-cercle de rayon *R*. Justifiez qu'il s'agit bien d'un maximum.



Voir figure 1

L'aire du rectangle est : $A(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$ avec $x \in \left]\, 0, R \,\right[$

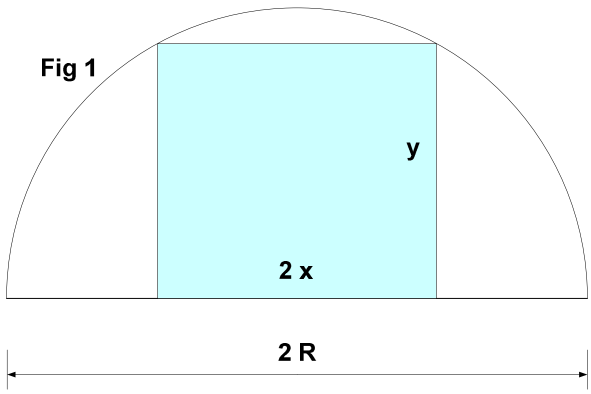
On obtient le maximum en annulant la dérivée :

$$A'(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2} + 2x\frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2\left(R^2 - 2x^2\right)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$\to R^2 - 2x^2 = 0 \to x = \pm\dfrac{R}{\sqrt{2}}$ On ne prend que la racine positive.

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum, il suffit d'étudier le signe de $A'(x)$

	0		$\frac{R}{\sqrt{2}}$		R
A'		$+$	0	$-$	
A	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	0



Résolu le 30 septembre 04

EXANA116 – Liège, septembre 2004.

Soit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx$$

1. Calculer I_0 et I_1
2. Montrer que, pour toute entier $n \geq 2$

$$I_{n+1} = (n+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n+1)I_{n-1}$$

3. Exprimez

$$\int_0^1 \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

1) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$ Intégrons par parties

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \sin x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g'(x) = -\cos x \end{cases} \rightarrow I_1 = \left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

2) Par parties : $\begin{cases} f(x) = x^{n+1} \\ g'(x) = \sin x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(x) = (n+1)x^n \\ g(x) = -\cos x \end{cases}$

$$\rightarrow I_{n+1} = \left[-x^{n+1}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x \, dx = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x \, dx$$

De nouveau par parties : $\begin{cases} f(x) = x^n \\ g'(x) = \cos x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(x) = nx^{n-1} \\ g'(x) = \sin x \end{cases}$

$$\rightarrow I_{n+1} = (n+1)\left\{\left[x^n \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1} \sin x \, dx\right\}$$

$$= (n+1)\left\{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n - nI_{n-1}\right\} = (n+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n+1)I_{n-1}$$

3) Soit $x = \sin u \rightarrow u = \arcsin u$ et $\sqrt{1-x^2} = \cos u$ et $du = \cos u \, du$

De plus : $x \in \left]0,1\right[\rightarrow u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Donc : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2u \sin u \, du = I_1$

Résolu le 30 septembre 04

EXANA117 – Bruxelles, juillet 2004.

Soit la fonction f de A dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$$

Et C la courbe d'équation $y = f(x)$ (C est le graphe de f)

4. Déterminer le domaine de définition de f (c'est-à-dire le plus grand A possible).
5. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et préciser de définition de f' et f''
6. Déterminer une équation cartésienne
    a. De la tangente à C au point d'abscisse 0
    b. Des asymptotes (éventuelles) de C.
7. Etablir le tableau des variations de f, f' et f'' contenant
    a. Les racines de f, f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale)
    b. Les signes de $f'(x)$ et $f''(x)$
    c. Les extrema de f, les domaines de croissance et de décroissance de f.
    d. Les points d'inflexion de C et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de C
8. Tracer soigneusement la courbe C d'après les résultats du d)
9. A partir de la courbe C, tracer les graphes des fonctions g et h dans $\mathbb{R}$ définies par :

- $g(x) = |\,f(x)\,|$
- $h(x) = \sqrt{1+2x\sqrt{1-x^2}}$

$a)\ dom\ f(x)=\{x\in\mathbb{R}\mid -1<x<1\}$

$b)\ f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad dom\ f'(x)=dom\ f(x)$

$f''(x)=-\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad dom\ f''(x)=dom\ f(x)$

$c)$ • $f(0)=1$ et $f'(x)=1 \rightarrow$ La tangente : $y=x+1$

• Il n'y a pas d'asymptote

$d)$ Racines:

$$f(x)=x+\sqrt{1-x^2}=0 \quad\rightarrow\quad x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq -0,7$$

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq 0,7$$

$f''(x)=-\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ Pas de racine. $f''(x)$ est toujours $<0 \rightarrow$ concavité <0

Extrema

$$f'(x)=0 \text{ si } x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\rightarrow\quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}$$

C'est un maximum car $\begin{cases} x<\dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f'(x)>0 \\ x>\dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f'(x)<0 \end{cases}$

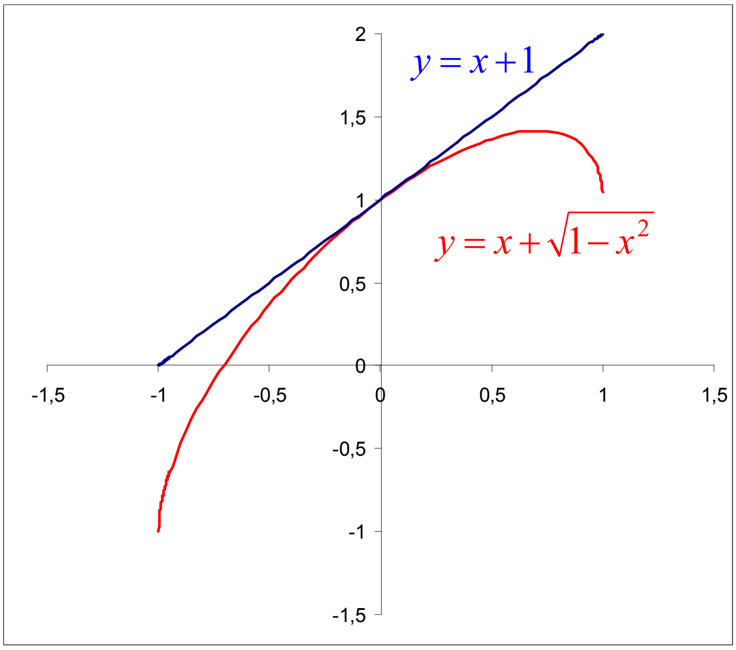
Tableau

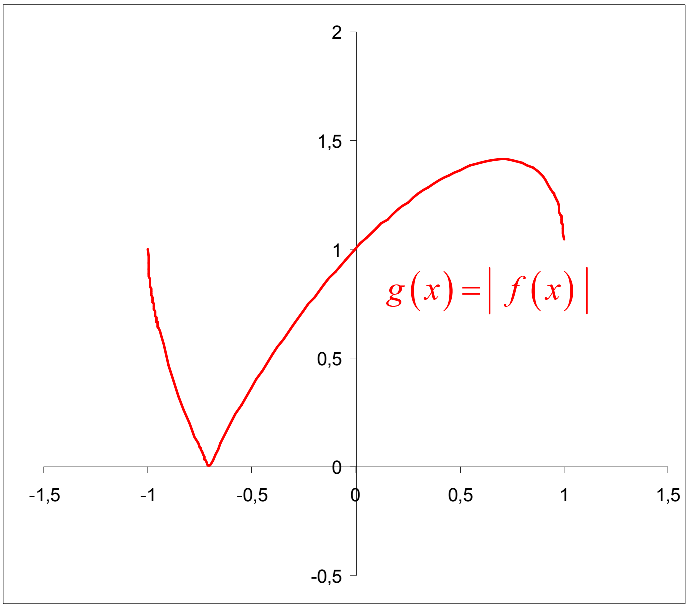
	1		$-0,7$		$0,7$		1
f'		+	+	+	0	−	
f''		−	−	−	−	−	
f		−	0	+	+	+	
		↗	↗	↗	M	↘	
Concavité				$\cap$			

$f)\ g(x)=|f(x)|$ Le traçage ne présente aucune difficulté

Pour $h(x)$, il suffit de remarquer que $f^2(x)=1+2x\sqrt{1-x^2}=h^2(x)$

$\rightarrow$ les graphes de $f(x)$ et $h(x)$ sont identiques





Résolu le 22 décembre 04

EXANA118 – Bruxelles, juillet 2004.

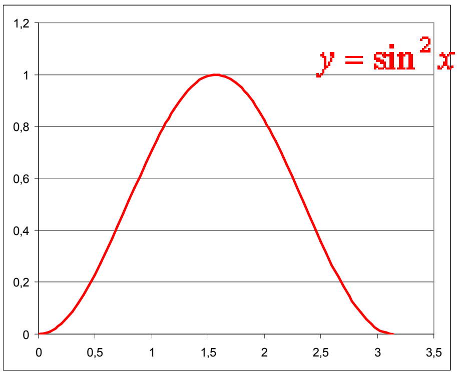
Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $Oxyz$, soient

- S la région du plan $Oxyz$ définie par

$$S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \sin^2 x\}$$

- D le solide engendré par la rotation d'un tour complet de S autour de l'axe Ox

a. Faire le croquis de S
b. Calculer l'aire de S
c. Calculer le volume de D



$$b)\ S = \int_0^\pi \sin^2 dx$$

$$h = \sin x \qquad h' = \cos x$$

$$g' = \sin x \qquad g = -\cos x$$

$$\rightarrow S = -[\sin x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 x\, dx = \int_0^\pi (1 - \sin^2 x)\, dx = \int_0^\pi dx - \int_0^\pi \sin^2 x\, dx$$

$$\rightarrow 2S = [x]_0^\pi \rightarrow \boxed{S = \frac{\pi}{2}}$$

$$c)\ D = \pi \int_0^\pi \sin^4 x\, dx$$

$$h = \sin^3 x \qquad h' = 3\sin^2 x \cos x$$

$$g' = \sin x \qquad g = -\cos x$$

$$\rightarrow D = \pi \left\{ -\left[\cos x \sin^3 x\right]_0^\pi + 3\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x\, dx \right\}$$

$$= 3\pi \int_0^\pi \sin^2 x\,(1 - \sin^2 x)\,dx = 3\pi \left[\int_0^\pi \sin^2 x\, dx - \int_0^\pi \sin^4 x\, dx \right]$$

$$= 3\pi (S - D)$$

$$\rightarrow \boxed{D = \frac{3\pi S}{4} = \frac{3\pi^2}{8}}$$

Résolu le 22 décembre 04

EXANA119 – Bruxelles, juillet 2004.

Pour n $\in \mathbb{N}$, soit la fonction F_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F_n(t) = \int_0^t x^n e^{-x} dx$$

d. Calculer $F_0(t)$ et $I_0 = \lim\limits_{t\to+\infty} F_0(t)$
e. Exprimer $F_n(t)$ en fonction de $F_{n-1}(t)$
f. Démontrer par récurrence que
   $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \lim\limits_{t\to+\infty} F_n(t)$ existe et $I_n = nI_{n-1}$
g. Calculer I_6

$a)\ F_0(t) = \int_0^t e^{-x} dx = -\left[e^{-x}\right]_0^t = -e^{-t} + 1$

$I_0 = \lim\limits_{t\to+\infty} F_0(t) = \lim\limits_{t\to+\infty 0} \left(-e^{-t} + 1\right) = 1$

$b)\ F_n(t) = \int_0^t x^n\ e^{-x} dx$

Par parties : $\begin{matrix} h = x^n & h' = nx^{n-1} \\ g' = e^{-x} & g = -e^{-x} \end{matrix}$

$\to F_n(t) = \left[-e^{-x}x^n\right]_0^t + n\int_0^t x^{n-1}\ e^{-x} dx = -t^n e^{-t} + nF_{n-1}(t)$

$c)$ Soit $n = 1$, vérifions $I_1 = I_0$. En effet,

$F_1(t) = \int_0^t x\ e^{-x} dx = \left[-e^{-x}x\right]_0^t + \int_0^t e^{-x} dx = -t\ e^{-t} + F_0(t) = -t\ e^{-t} + 1$

et $I_1 = \lim\limits_{t\to+\infty} F_1(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(-t\ e^{-t} + 1\right) = 1 = I_0$

Démontrons maintenant $I_n = nI_{n-1}$

De $b)$ on a $F_n(t) = -t^n e^{-t} + nF_{n-1}(t)$

$\to I_n = \lim\limits_{t\to+\infty} F_n(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(-t^n e^{-t} + nF_{n-1}(t)\right) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(-t^n e^{-t}\right) + n \lim\limits_{t\to+\infty} F_{n-1}(t)$

$= nI_{n-1}$

$d)\ I_6 = 6I_5 = 6\times 5I_4 = 6\times 5\times 4I_3 = 6\times 5\times 4\times 3I_2 = 6\times 5\times 4\times 3\times 2I_1$

$= 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 6! = 720$

Résolu le 22 décembre 04